	Universidade do Estado do Rio de Janeiro FEN – DETEL Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica Análise Tempo-Frequência de Sinais – **Lista de Exercícios** Professor: Michel P. Tcheou

LISTA 2

1. Seja uma senóide com suporte em $[t_1, t_2]$ definida por $s(t) = a_o \cos(2\pi f_o t + \phi_o)[\mu(t-t_1) - \mu(t-t_2)]$, $\mu(t)$ é a função degrau.
   (a) Calcule $\langle t \rangle$ e σ_t^2 em função de a_o, f_o e ϕ_o, t_1 e t_2.
   (b) Analise os resultados.

2. Faça o mesmo para os sinais / pulsos:
   (a) Gaussiano:
   $$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha(t-t_o)^2/2 + j\phi(t)}. \tag{1}$$
   (b) Retangular:
   $$s(t) = \sqrt{\frac{1}{|t_1 - t_2|}} e^{j\phi(t)} [\mu(t-t_1) - \mu(t-t_2)]. \tag{2}$$

3. Repare que podemos definir uma janela e avaliar a energia de um sinal no tempo também, como fizemos na equação
   $$\langle G(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)|S(\omega)|^2 d\omega. \tag{3}$$
   Observe que isso é no fundo um janelamento.
   - Se avaliamos o conteúdo de energia de um sinal usando uma janela específica no domínio do tempo, o que é melhor:
     - Calcular $|s(t)|^2$, janelá-lo com $g(t)$? ou
     - Janelar o sinal usando $s'(t) = s(t)g(t)$, aí calcular $|s'(t)|^2$?
     - Quais as diferenças entre essas abordagens?
   - Tem-se uma medida razoável?

4. O que ocorre com $p_s(\omega)$ quando $s(t) = a_o e^{j\omega_o t}$ e no caso de $s(t)$ ser composto somente da parte real ou da parte imaginária de $s(t)$.

5. Nesses casos compute as suas frequências médias e suas bandas. Discuta os resultados.

6. Pesquise e escreva uma redação sobre a obra e a vida de Rayleigh.

7. Encontre T^2, $\langle t \rangle$, $\langle t^2 \rangle$, $\omega_i(t)$, B^2, $\langle \omega \rangle$, $\langle \omega^2 \rangle$ e $t_g(\omega)$, para:
   (a)
   $$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\beta t^2/2 + j\omega_o t}; \tag{4}$$
   (b)
   $$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + jm \sin \omega_m t + j\omega_o t}; \tag{5}$$

(c)

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n)!}}\omega^n e^{-\alpha\omega/2 - jt_o\omega}; \tag{6}$$

(d)

$$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\gamma t^3/3 + j\beta t^2/2 + j\omega_o t}. \tag{7}$$

8. Encontre B_{AM}^2, B_{FM}^2, T_{SAM}^2 e T_{SPM}^2

   (a) para

   $$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\beta t^2/2 + j\omega_o t}; \tag{8}$$

   (b) para

   $$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + jm \sin\omega_m t + j\omega_o t}; \tag{9}$$

   (c) para

   $$S(\omega) = \sqrt{\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n)!}}\omega^n e^{-\alpha\omega/2 - jt_o\omega}; \tag{10}$$

   (d) para

   $$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\gamma t^3/3 + j\beta t^2/2 + j\omega_o t}. \tag{11}$$

9. Analiticamente, avalie a covariância para o "chirp"

   $$(\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\beta t^2/2 + j\omega_o t}. \tag{12}$$

10. Plote essa covariância usando Matlab.

11. Mostre que o problema da não separabilidade de fenômenos bem localizados no tempo e na frequência quando analisados através das técnicas vistas até aqui ocorre também quando usamos

    $$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t)s(t+\tau)dt, \tag{13}$$

    para calcular $|S(\omega)|^2$, conforme a equação

    $$|S(\omega)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-\jmath\omega\tau}d\tau. \tag{14}$$

12. Pesquise e escreva uma redação sobre a obra e a vida de Wiener.

13. Estude a seção 2.4 do livro texto, sobre o computo de $\mathcal{A}[s(t)]$ em diversos casos e as ferramentas relevantes.

14. Estude na seção 2.6 como a representação em quadratura do sinal pode ser empregada para aproximar o sinal analítico.

15. Mostre o resultado da equação

    $$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2}E_z, \qquad E_z = \int_{-\infty}^{\infty} |Z(\omega)|^2 d\omega. \tag{15}$$

16. Encontre as condições de A_1, A_2, ω_1 e ω_2 que acarretam os “paradoxos” 1 a 4, na equação

$$\begin{aligned}
A^2(t) =& A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2-\omega_1)t && (16)\\
\phi(t) =& \mathsf{arctan}\left(\frac{A_1\sin(\omega_1 t) + A_2\sin(\omega_2 t)}{A_1\cos(\omega_1 t) + A_2\cos(\omega_2 t)}\right) && (17)\\
\omega_i(t) =& \phi'(t) = \frac{1}{2}(\omega_2+\omega_1) + \frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)\frac{A_2^2 - A_1^2}{A^2(t)}\\
=& \frac{1}{2}(\omega_2+\omega_1) + \frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2-\omega_1)t} && (18)
\end{aligned}$$

17. Seja

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{-\lambda_n t} e^{j\omega_n t + \theta_n}. \tag{19}$$

   (a) Encontre uma expressão para $\omega_i(t)$.

   (b) Faça o mesmo para

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{-\lambda_n t}\cos(\omega_n t + \theta_n). \tag{20}$$

   (c) Discuta os resultados.

18. Elabore um argumento que permita “compreender o significado” do “paradoxo” 5.

19. Calcule a distribuição da frequência instantânea para um pulso como

$$s(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{\alpha t^2/2 + j\beta t^2/2 + j\omega_o t}. \tag{21}$$

20. Mostre que para esse pulso $\sigma_\omega > \sigma_{\omega_i}$.

21. Mostre que para os pulsos definidos na equação

$$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha(t-t_o)^2/2 + j\omega_o t}. \tag{22}$$

   tem-se $<t> = t_o$ e $<f> = f_o$.

22. Além disso, para esses pulsos calcule σ_t e σ_ω em função de α, t_o e ω_o.

23. Discuta os resultados encontrados.

24. Encontre os produtos $\sigma_t\sigma_\omega$ para os sinais:

   (a) $s(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{\alpha t^2/2 + j\beta t^2/2 + j\omega_o t}$.

   (b) $s(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{\alpha t^2/2 + jm\sin(\omega_m t) + j\omega_o t}$.

25. Para um pulso Gaussiano encontre $P_s(t,\omega) = P_s(t)P_S(\omega)$.

   (a) Faça um gráfico de sua forma (curvas de níveis) em função de σ_t e σ_ω.

26. Pesquise e descreva as diferentes versões da Desigualdade de Schwartz em função dos ”espaços de sinais” considerados.

27. Considerando $h(t) = (a/\pi)^{1/4} e^{at^2/2}$, encontre os valores dos termos definidos nas equações

$$<\tau(t)> = K_{\gamma_t(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau |s(\tau)h(\tau - t)|^2 d\tau \tag{23}$$

$$\sigma_\tau^2(t) = K_{\gamma_t(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - <\tau(t)>)^2 |s(\tau)h(\tau - t)|^2 d\tau \tag{24}$$

$$<\omega(t)> = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\Gamma_t(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_t^*(\tau) \frac{1}{j} \frac{d}{d\tau} \gamma_t(\tau) d\tau \tag{25}$$

$$\sigma_\omega^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - <\omega(t)>)^2 |\Gamma_t(\omega)|^2 d\omega. \tag{26}$$

para:

(a) $s(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\beta t^2/2 + j\omega_o t}$;

(b) $s(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + jct^3/3}$

28. Discorra sobre os impactos do "Teorema da Incerteza" em sua versão determinística tempo-frequência para a análise de sinais.

29. Avalie o produto $\sigma_t \sigma_\omega$ de sinais gerados:

(a) Pelo produto (no tempo) de duas Gaussianas normalizadas com parâmetros de forma (α) diferentes no tempo, mas centralizadas no mesmo instante, considere o sinal normalizado para energia unitária;

(b) Pela soma de duas Gaussianas normalizadas com parâmetros de forma iguais no tempo mas centralizadas em instantes distintos, considere o sinal normalizado para energia unitária.

30. Faça, analiticamente e computacionalmente as curvas de níveis de $P_s(t, \omega) = P_s(t) P_S(\omega)$ para:

(a) Uma Gaussiana normalizada;

(b) $s(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\beta t^2/2 + j\omega_o t}$;

(c) $s(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + jct^3/3}$

31. Pesquise e escreva uma redação sobre a obra e a vida de Heisenberg.