



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: **Sistemas Lineares**



**Aula: Parte I: Revisão de Álgebra Linear:
Funções de Matrizes Quadradas**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2025/1

Rio de Janeiro, 24 de abril de 2025.



Referências

- Chen, C.-T. (2013). Linear System Theory and Design, Int. 4th ed., Oxford University Press. (*)
- Chen, C.-T. (1999). Linear System Theory and Design, 3rd ed., Oxford University Press.
- Noble, B. & Daniel, J. W. (1986). Álgebra Linear Aplicada, 2^a Edição, Prentice-Hall do Brasil.
- Strang, G. (2003). Introduction to Linear Algebra, 3rd ed., Wellesley Cambridge Press.
- Strang, G. (2010). Álgebra Linear e suas Aplicações, Cengage.

(*) Organizado para as Seção 3.6 da 4^a Edição.

FUNÇÕES DE MATRIZES QUADRADAS

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ENTÃO:

$$A^k := \underbrace{A A \dots A}_{k \text{ VEZES}} ; \quad A^0 := I$$

POLINÔMIO:

$$p(\lambda) := a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

NO QUAL $\lambda \in \mathbb{C}$, $a_i \in \mathbb{R}$

$$p(A) := a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

TEOREMA 3.4 (Phen, 1999, p. 63 ou 2013, pp. 77-78):

TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

$$\Delta(\lambda) := \det(\lambda I - A) \leftarrow \text{POLINÔMIO CARACTERÍSTICO}$$

ENTÃO

$$\Delta(A) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

$\downarrow A$

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

CAYLEY-HAMILTON $\uparrow$

$$\Rightarrow A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I$$

RESULTADO:

A^m , $m \geq n$, PODE SER EXPRESSO COMO
COMBINAÇÃO LINEAR DE $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$

EXPONENTIAL MATRICIAL

$$e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

NA QUAL: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in \mathbb{R}$

AXIOMAS:

① $e^{A \cdot 0} = I$

② $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$

SÉRIE DE MACLAURIN (TAYLOR)

$$e^{at} = e^{a \cdot 0} + \left(\frac{e^{at}}{1!} \right)' \Big|_{t=0} t + \frac{\left(\frac{e^{at}}{2!} \right)''}{2!} \Big|_{t=0} t^2 + \frac{\left(\frac{e^{at}}{3!} \right)'''}{3!} \Big|_{t=0} t^3 + \dots$$

$$= 1 + at + \frac{a^2}{2!} t^2 + \frac{a^3}{3!} t^3 + \dots$$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \dots$$

ATENÇÃO: NÃO USEM ESTA SÉRIE EM CÁLCULO NUMÉRICO!

PROPRIEDADES DA EXPONENCIAL MATRICIAL

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$$
$$\left[e^{At} \right]^{-1} = e^{-At}$$
$$\left[\underbrace{e^{At} \quad e^{-At}} \right] = e^{A_0} = I$$


ATENÇÃO:

$$e^{(A+B)t} \neq e^{At} e^{Bt}$$

GERALMENTE!

TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO:

$$\dot{x}(t) = A x(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0.$$

SOLUÇÃO: $x(t) = e^{At} x_0, \quad t \geq 0$

JUSTIFICATIVA VIA AXIOMAS ① e ②:

① $x(0) = e^{A \cdot 0} x_0 = I x_0 = x_0$ ② $\dot{x} = A(e^{At} x_0) = A x$



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: Sistemas Lineares



Aula: **Parte II: Revisão de Álgebra Linear:
Normas de Matrizes**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2025/1

Rio de Janeiro, 24 de abril de 2025.



Referências

- Chen, C.-T. (2013). Linear System Theory and Design, Int. 4th ed., Oxford University Press. (*)
- Chen, C.-T. (1999). Linear System Theory and Design, 3rd ed., Oxford University Press.
- Noble, B. & Daniel, J. W. (1986). Álgebra Linear Aplicada, 2^a Edição, Prentice-Hall do Brasil.
- Strang, G. (2003). Introduction to Linear Algebra, 3rd ed., Wellesley Cambridge Press.
- Strang, G. (2010). Álgebra Linear e suas Aplicações, Cengage.

(*) Organizado para o Capítulo 3, Seção 3.11, da 4^a Edição.

NORMAS DE MATRIZES

NORMAS MATRICIAIS INDUZIDAS POR
NORMAS VETORIAIS:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ENTÃO:

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_p = 1}} \|Ax\|_p$$

max

$$\|Ax\|_p$$

$$p \in \{1, 2, \infty\}$$

PROPRIEDADES:

$$\textcircled{1} \quad \|Ax\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|x\|_p$$

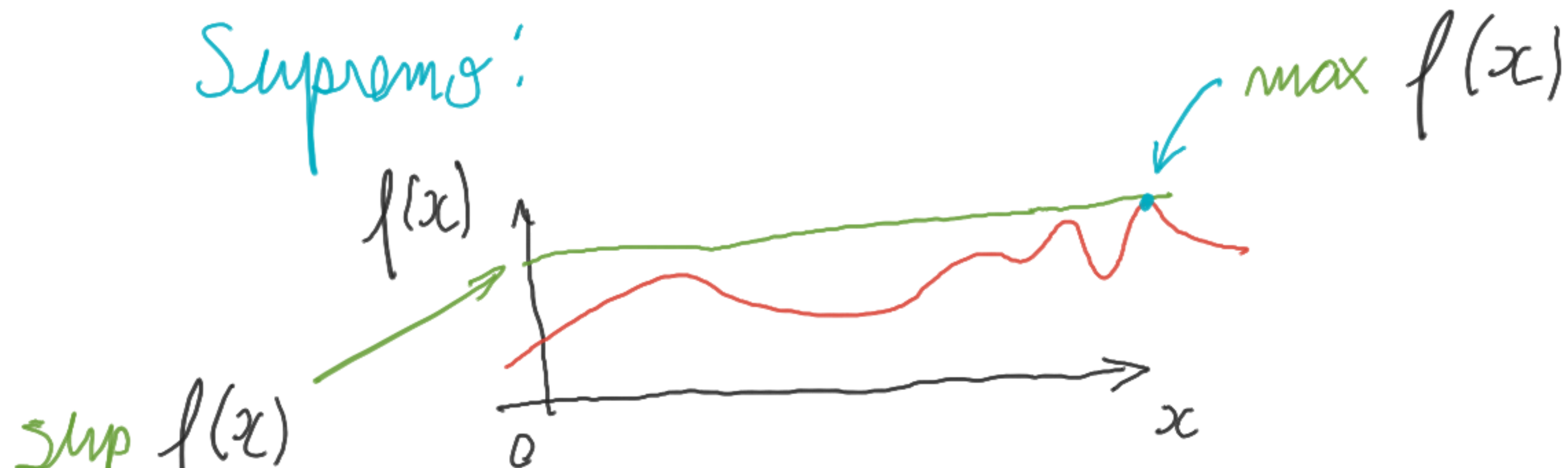
$$\textcircled{2} \quad \|A+B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p$$

$$\textcircled{3} \quad \|AB\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|B\|_p$$

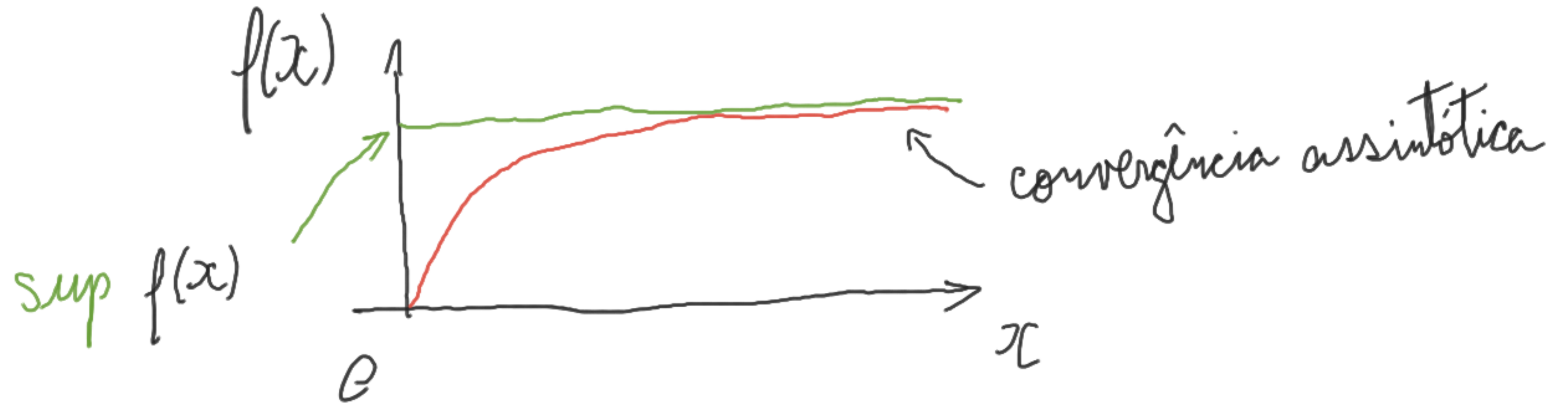
NAS QUAIS A E B SÃO MATRIZES COM
DIMENSÕES APROPRIADAS.

NOTA:

Supremo:



$\sup f(x)$
 $\uparrow$
 $\max f(x) \leftarrow$ máximo global que é o maior dos máximos locais



Neste caso $f(x)$ não tem máximo!

$$\sup f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

NORMAS INDUZIDAS:

$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A) \rightarrow$ MAIOR VALOR SINGULAR
DE A (Chen, 1999 ou 2013,
Seção 3.40)

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$