Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: **Sistemas Lineares**

Aula: **Realizações**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2025/1

Rio de Janeiro, 13 de maio de 2025.

Referências

- Chen, C.-T. (2013). Linear System Theory and Design, Int. 4th ed., Oxford University Press. (*)
- Chen, C.-T. (1999). Linear System Theory and Design, 3rd ed., Oxford University Press.
- Kailath, T. (1980). Linear Systems, Prentice Hall, Seções 2.1 a 2.2.1.
- Ogata, K. (2003). Engenharia de Controle Moderno, 4ª ed., Pearson Brasil, Seção 11.2 e exemplos A.11.1 a A.11.5.

- (*) Organizado para o Capítulo 4, Seções 4.4.1 e 4.5 da 4ª Edição.

REALIZAÇÕES SISO

- ASSUME-SE QUE $G(s)$ SEJA ESTRITAMENTE PRÓPRIA.
- SE FOR BIPRÓPRIA, ENTÃO CALCULA-SE $D = Q(s)$ E $\bar{G}(s) = \frac{R(s)}{D(s)}$ É FRAÇÃO RACIONAL ESTRITAMENTE PRÓPRIA A SER REALIZADA NO PRÓXIMO PASSO.

$$G(s) = \underset{\underset{D}{\parallel}}{Q(s)} + \frac{R(s)}{D(s)}$$

$D \leftarrow$ TRANSF. DIRETA

REALIZAÇÃO CANÔNICA CONTROLÁVEL

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m < n.$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \Longrightarrow D(s)\,y(s) = N(s)\,u(s) \Longrightarrow$$

$$s^n y + a_{n-1} s^{n-1} y + \dots + a_1 s y + a_0 y =$$

$$= b_m s^m u + \dots + b_1 s u + b_0 u$$

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

MATRIZ COMPANHEIRA
("COMPANION-FORM MATRIX")

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} x + D\, u$$

CASO BIPRÓPRIO

FORMA
CANÔNICA
CONTROLÁVEL

TEOREMA: SEJA O SISTEMA SISO COM FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$, ENTÃO: $G(s)=B^T(sI-A^T)^{-1}C^T+D$.

PROVA: NO CASO SISO:

$$G(s)=G^T(s)=B^T\left[(sI-A)^{-1}\right]^T C^T+D^T=$$

$$=B^T(sI^T-A^T)^{-1}C^T+D=$$

$$=B^T(sI-A^T)^{-1}C^T+D$$

// Q.E.D.

REALIZAÇÃO CANÔNICA OBSERVÁVEL

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ \cline{1-4} 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] x + D\, u$$

FORMA COMPANHEIRA

OUTRAS REALIZAÇÕES:

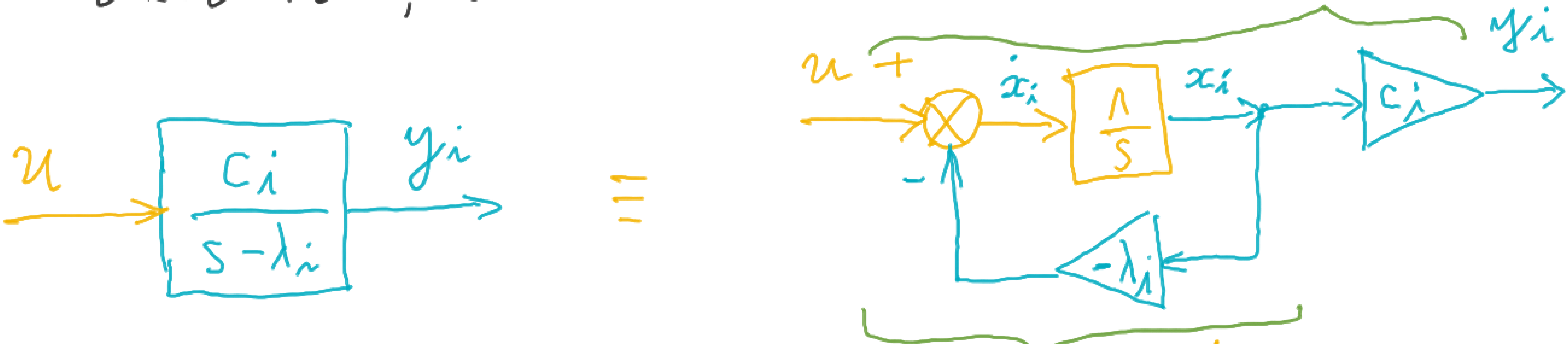
- FORMA CANÔNICA DO CONTROLADOR
- FORMA CANÔNICA DO OBSERVADOR

Ref.: (Kailath, 1980)

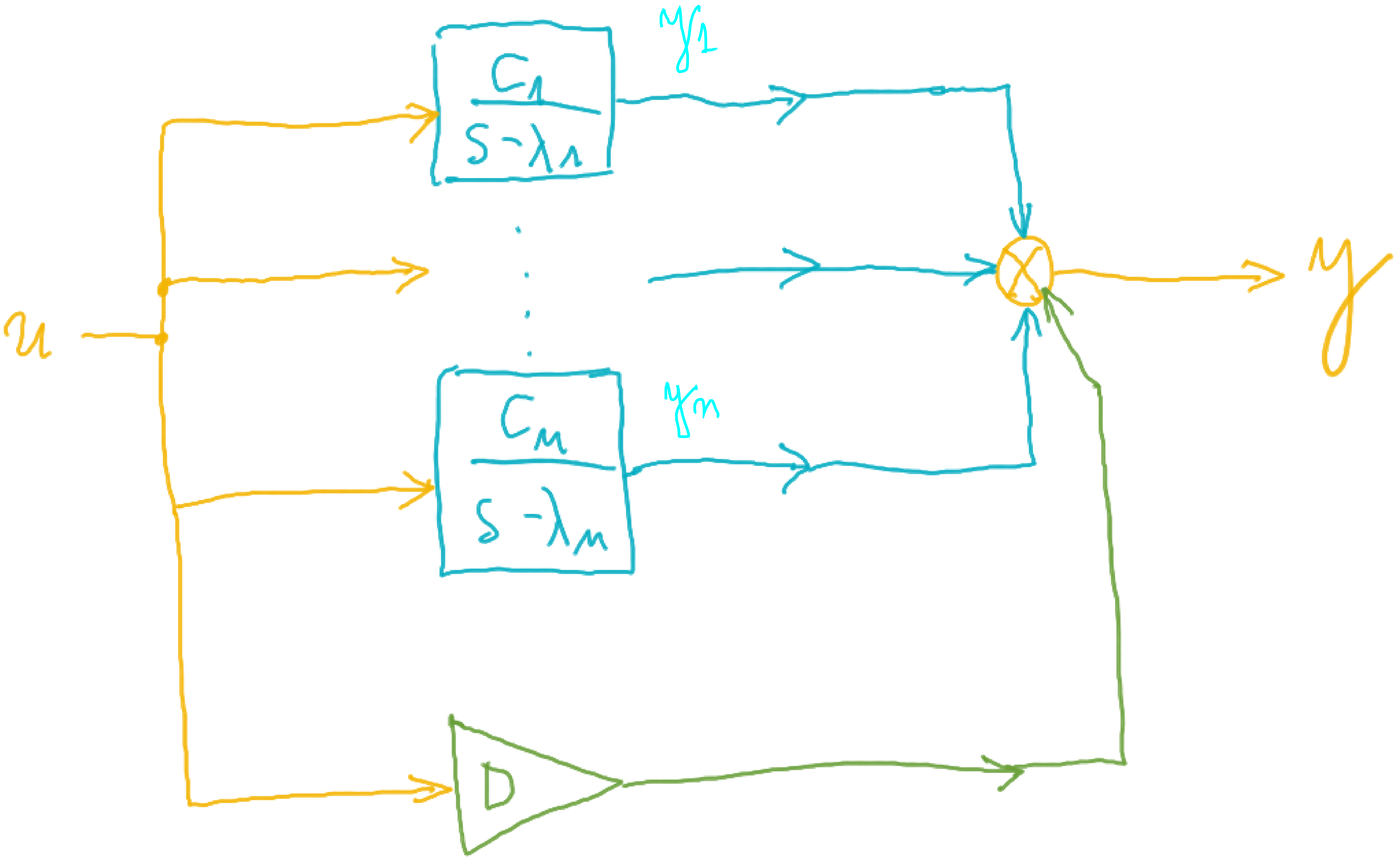
REALIZAÇÃO PARALELA (Kailath, 1980)

$$G(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{c_m}{s-\lambda_m} + D$$

DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS $\dfrac{c_i}{s-\lambda_i}$



$$\frac{1/s}{1-\lambda_i/s} = \frac{1}{s-\lambda_i}$$



u
$\frac{c_1}{s-\lambda_1}$
y_1
$\frac{c_n}{s-\lambda_n}$
y_n
D
y

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

FORMA DIAGONONAL

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} x + D u$$

Notas:

1. SE HOUVER POLOS MÚLTIPLOS, A MATRIZ A DEVERÁ ESTAR NA <u>FORMA DE JORDAN</u>.

2. NO CASO DE AUTOVALORES COMPLEXOS CONJUGADOS, ESSES PODEM SER REALIZADOS NA <u>FORMA MODAL</u>:

(Chen, 1999, p. 98 ou 2013, p. 123): $\begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \rightarrow$ AUTOVALORES: $\alpha_i \pm j\beta_i = \lambda_i$

Ex. 1: $G(s) = \dfrac{3s+5}{(s+2)(s+6)} = \dfrac{3s+5}{s^2+8s+12}$

REALIZAÇÕES CANÔNICAS:

CONTROLÁVEL	OBSERVÁVEL
$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$	$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} x$	$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$

Ex. 2: $G(s) = \dfrac{3s+5}{(s+2)(s+6)}$

DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS:

$$G(s) = \frac{C_1}{s+2}\Big/_{s+6} + \frac{C_2}{s+6}\Big/_{s+2} = \frac{C_1(s+6) + C_2(s+2)}{(s+2)(s+6)}$$

$$= \frac{(C_1+C_2)s + 6C_1 + 2C_2}{(s+2)(s+6)}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \Rightarrow C_1 = 3 - C_2 \\ 6C_1 + 2C_2 = 5 \Rightarrow \\ 6(3 - C_2) + 2C_2 = 5 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 18 - 6C_2 + 2C_2 = 5 \Rightarrow -4C_2 = -13 \Rightarrow C_2 = 13/4 \; ; \; C_1 = 3 - 13/4 = -1/4$$

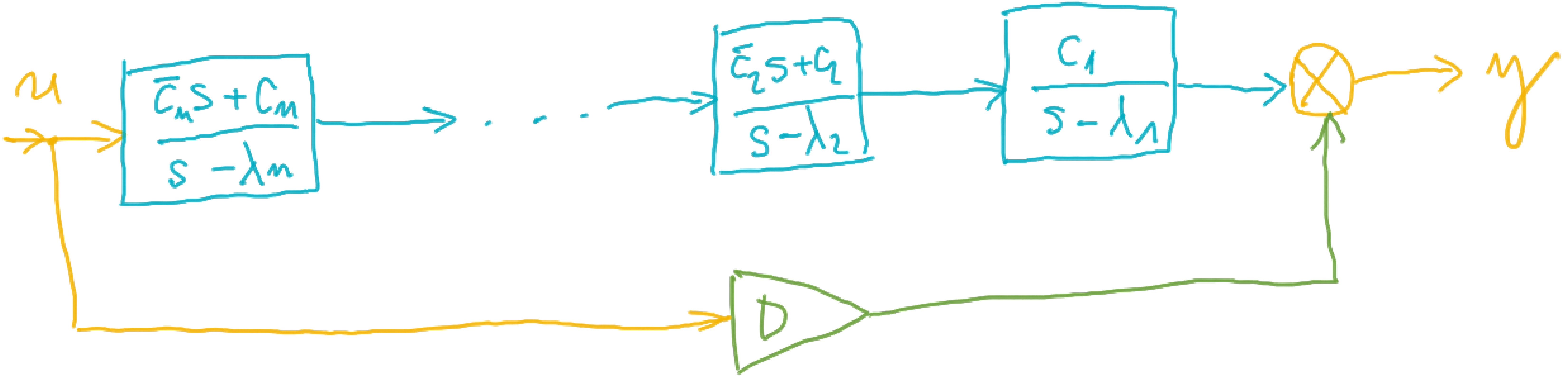
REALIZAÇÃO PARALELA:

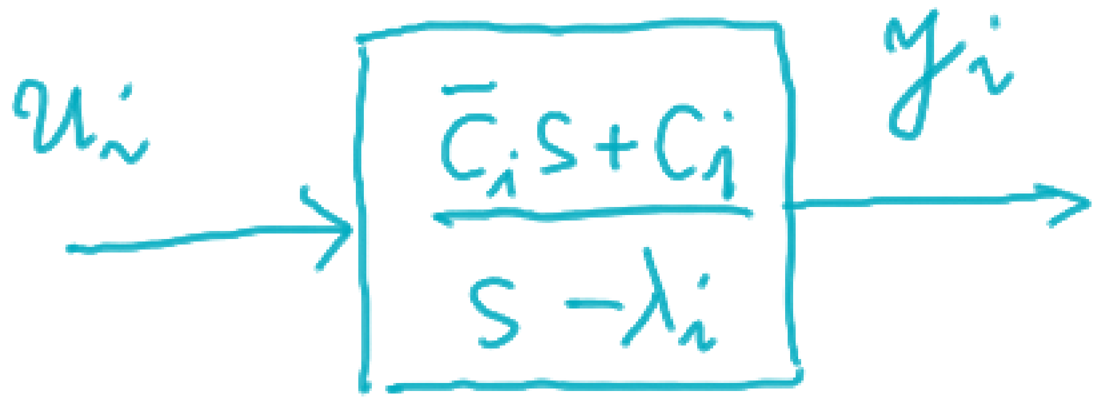
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{13}{4} \end{bmatrix} x$$

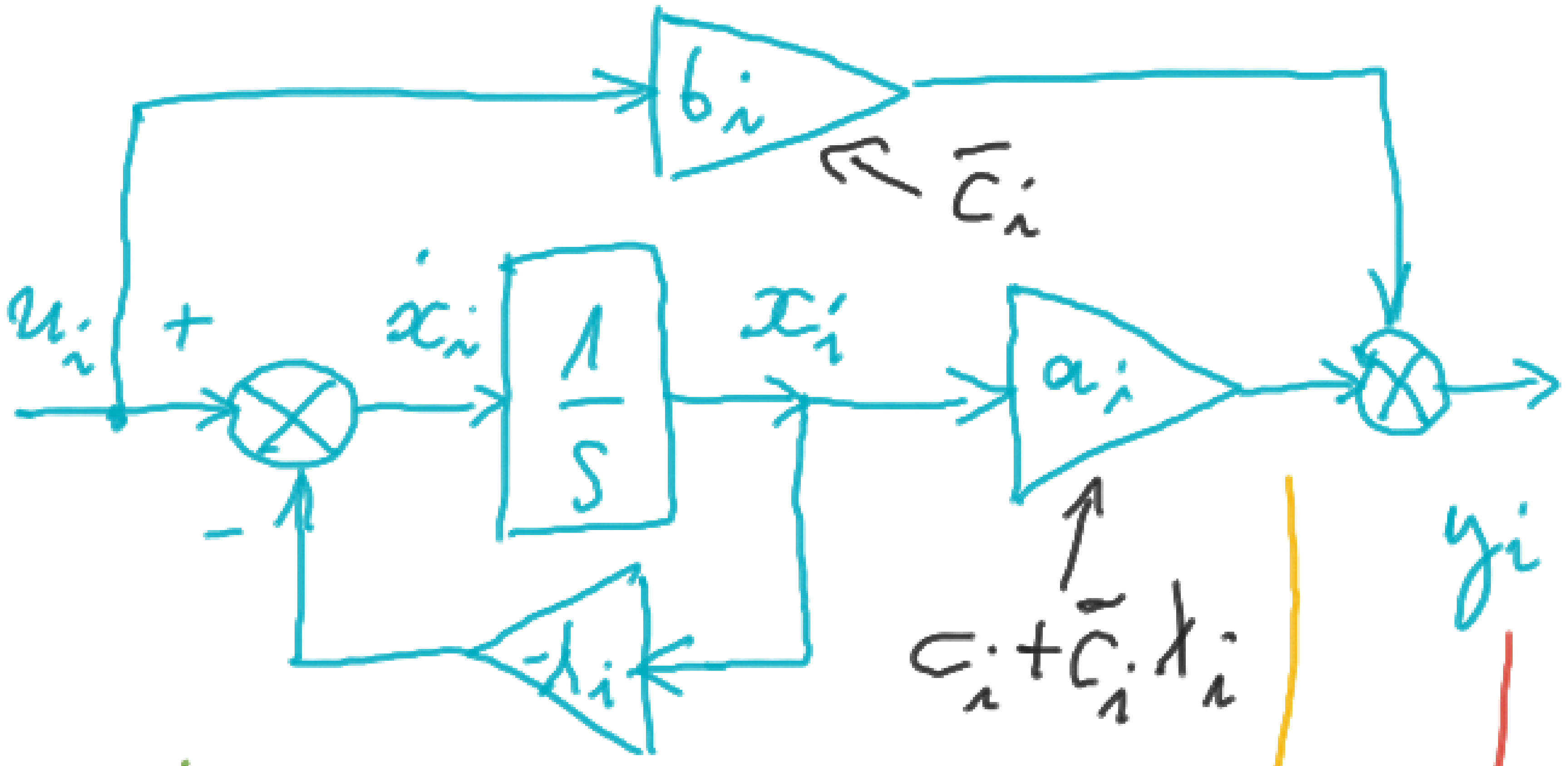
FORMA CASCATA (Kailath, 1980)

$$G(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1} \cdot \frac{\bar{c}_2 s + c_2}{s-\lambda_2} \cdots \frac{\bar{c}_n s + c_n}{s-\lambda_n} + D$$





$\equiv$



$$\frac{1}{s-\lambda_i}$$

$$\frac{a_i}{s-\lambda_i}$$

$$\frac{a_i}{s-\lambda_i} + b_i$$

$$\frac{a_i}{s-\lambda_i /1} + \frac{b_i}{1 / s-\lambda_i} = \frac{a_i + b_i(s-\lambda_i)}{s-\lambda_i}$$

$$= \frac{b_i s + a_i - b_i \lambda_i}{s-\lambda_i} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\bar{c}_i = b_i} \\ c_i = a_i - b_i \lambda_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_i = c_i + \bar{c}_i \lambda_i}$$

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

?

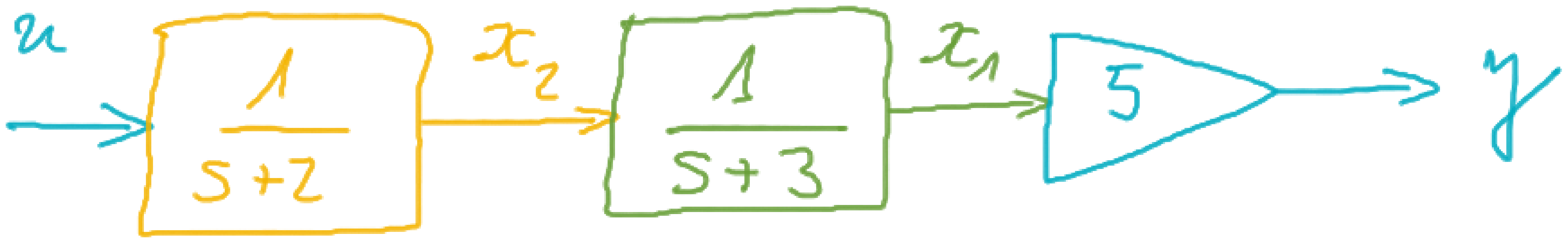
CONFERIR!

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_2 & b_2 a_3 & b_2 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & a_3 & b_3 & b_3 \cdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_2 \cdots b_n \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + D u$$

Ex. 3:

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+3)} = 5 \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+3}$$



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} x$$

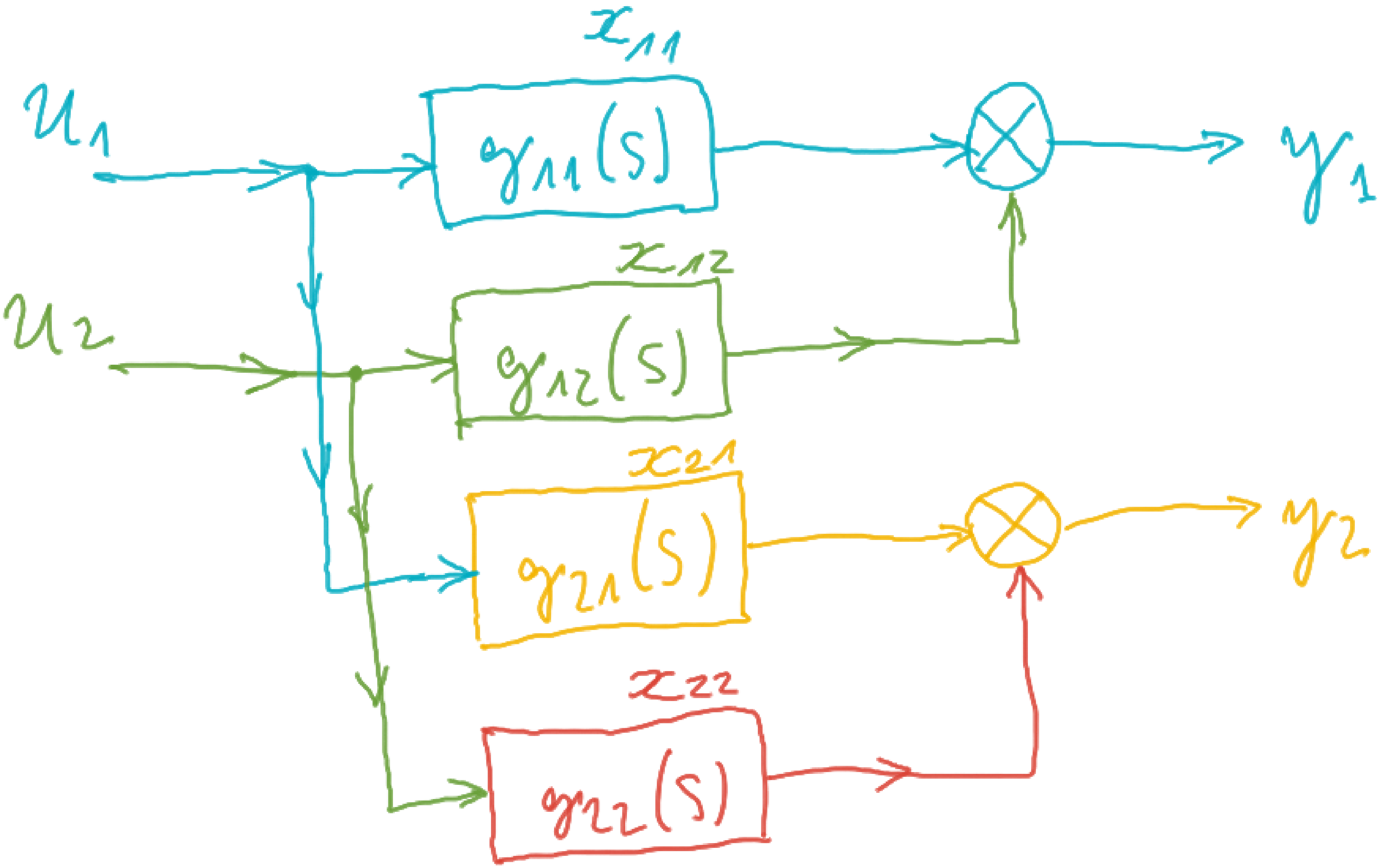
REALIZAÇÕES MULTIVARIÁVEIS (MIMO)

SISTEMA MIMO (MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA 2×2):

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} = C(sI-A)^{-1}B+D$$

REALIZAÇÕES SISO:

$$g_{ij}(s) = C_{ij}(sI-A_{ij})^{-1}B_{ij}+D_{ij}$$



x_{11}
u_1
$g_{11}(s)$
y_1
x_{12}
u_2
$g_{12}(s)$
x_{21}
$g_{21}(s)$
y_2
x_{22}
$g_{22}(s)$

$$x := \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad u := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$y = \overbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}}^{C} x + \overbrace{\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}}^{D} u$$