



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: Sistemas Lineares



Aula: **Realizações**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2025/1

Rio de Janeiro, 08 de maio de 2025.



Referências

- Chen, C.-T. (2013). Linear System Theory and Design, Int. 4th ed., Oxford University Press. (*)
- Chen, C.-T. (1999). Linear System Theory and Design, 3rd ed., Oxford University Press.
- Kailath, T. (1980). Linear Systems, Prentice Hall, Seções 2.1 a 2.2.1.
- Ogata, K. (2003). Engenharia de Controle Moderno, 4^a ed., Pearson Brasil, Seção 11.2 e exemplos A.11.1 a A.11.5.
- (*) Organizado para o Capítulo 4, Seções 4.4.1 e 4.5 da 4^a Edição.

REALIZAÇÕES

• PROBLEMA:

DADO $G(s)$ OBTER $\{A, B, C, D\}$

TAL QUE $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

• DIZ-SE ENTÃO QUE $\{A, B, C, D\}$ É UMA

REALIZAÇÃO DE $G(s)$.

• PROBLEMA COM INFINITAS SOLUÇÕES.

CONDIÇÃO DE REALIZABILIDADE

- O SISTEMA DEVE SER CAUSAL $\rightarrow$ IMPOSIÇÃO FÍSICA
- CONDIÇÃO BÁSICA:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \text{ FINITO}$$

$$\text{MAS } G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [C \cancel{(sI - A)^{-1}B}^{\infty} + D] = D \leftarrow \text{FINITO}$$

(Note: A red arrow points from the crossed-out term to 0, indicating it vanishes at infinity.)

Caso SISO

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{POLINÔMIO DE GRAU } m \\ \leftarrow \text{POLINÔMIO DE GRAU } n \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} N(s) & D(s) \\ \hline R(s) & Q(s) \end{array}$$

$$\rightarrow N(s) = \underbrace{Q(s)D(s)}_{m-n} + R(s)$$

NÃO CAUSAIS!

$$G(s) = \underbrace{Q(s)}_{\text{POLINÔMIO}} + \underbrace{\frac{R(s)}{D(s)}}_{\text{FRAÇÃO RACIONAL}}$$

$$Q(s) = \underbrace{q_{m-n}s + \dots + q_0}_{\text{DERIVADAS}} + \underbrace{q_0}_{\text{TRANSE. DIRETA}}$$

FRAÇÃO RACIONAL

TRANSE. DIRETA

- $G(s)$ É REALIZÁVEL S.S.S. $m \leq n$.
- EM OUTRAS PALAVRAS $G(s)$ DEVE SER UMA FRAÇÃO RACIONAL PRÓPRIA.
- SE $G(s)$ FOR ESTRITAMENTE PRÓPRIA, ENTÃO:

- $m > n$
- $Q(s) = 0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow$ REALIZAÇÃO: $\{A, B, C\}$
- BIPRÓPRIA, ENTÃO:
- SE $G(s)$ FOR $D = Q(s) \Rightarrow$ REALIZAÇÃO: $\{A, B, C, D\}$
 $m = n$

ALGORITMO:

FRAÇÃO RACIONAL IMPRÓPRIA

- ① SE $m > n \Rightarrow$ NÃO EXISTE REALIZAÇÃO!
- ② SE $n > m \Rightarrow D = 0$
- ③ SE $n = m \Rightarrow \hat{D} = Q(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$

REALIZAÇÕES SISO

- ASSUME-SE QUE $G(s)$ SEJA ESTRITAMENTE PRÓPRIA.

- SE FOR BIPRÓPRIA, ENTÃO CALCULA-SE
 $D = Q(s)$ E $\bar{G}(s) = \frac{R(s)}{D(s)}$ É FRAÇÃO RACIONAL ESTRITAMENTE

$$G(s) = \underbrace{Q(s)}_{D} + \frac{R(s)}{D(s)}$$

$D \leftarrow$ TRANSF. DIRETA

PRÓPRIA A SER
REALIZADA NO
PRÓXIMO PASSO.

REALIZAÇÃO CANÔNICA CONTROLÁVEL

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m < n.$$

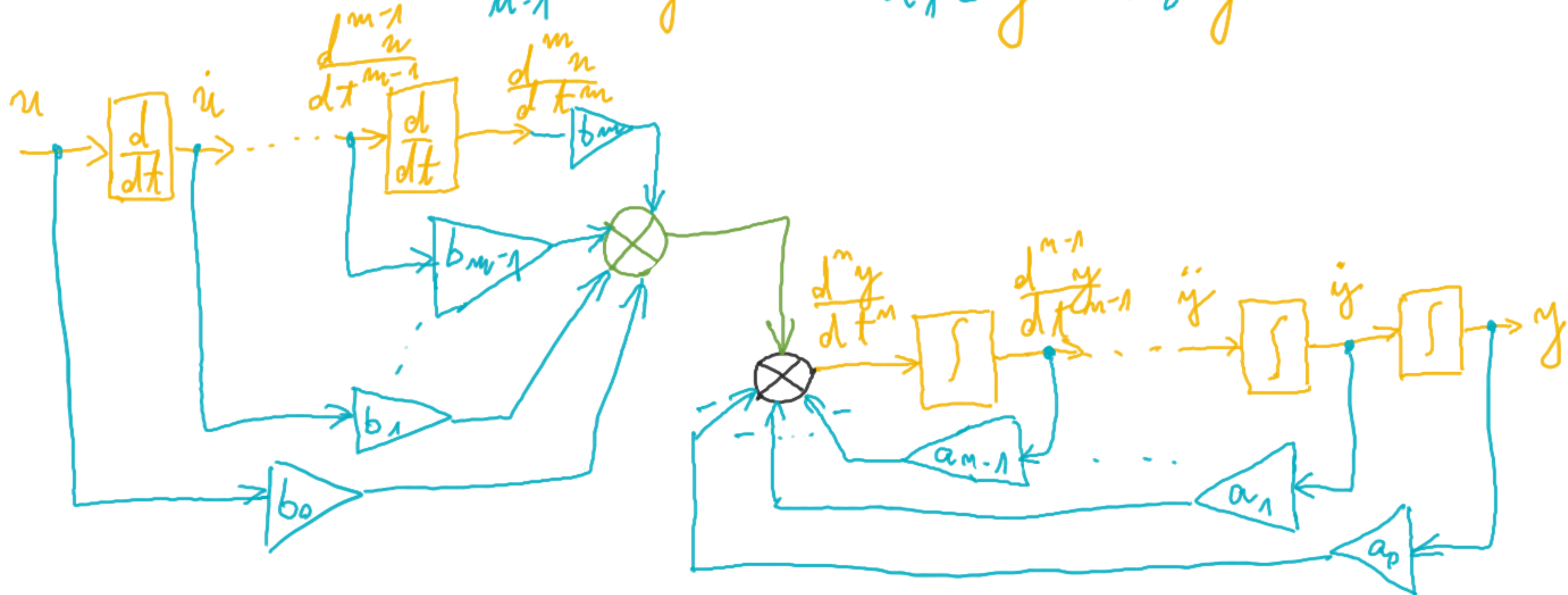
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow D(s) y(s) = N(s) u(s) \Rightarrow$$

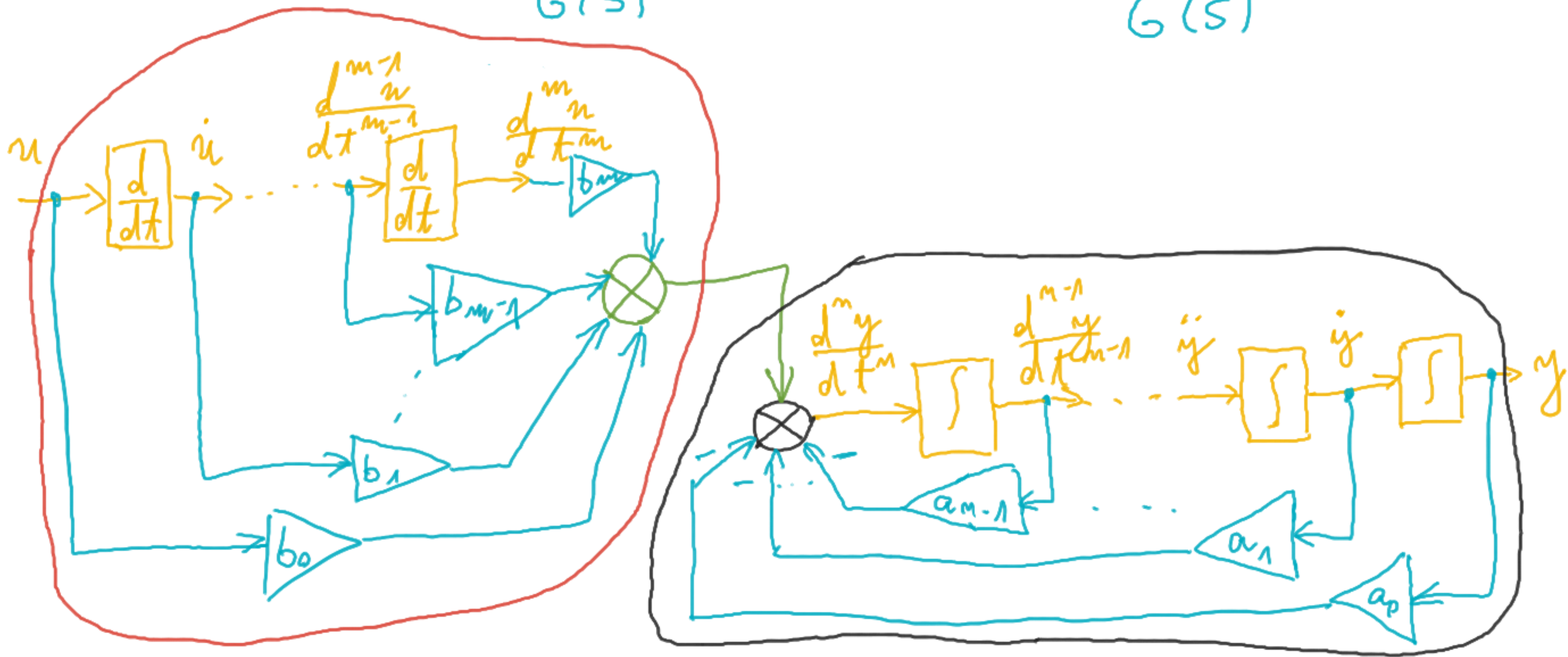
$$\begin{aligned} s^n y + a_{n-1} s^{n-1} y + \dots + a_1 s y + a_0 y &= \\ = b_m s^m u + \dots + b_1 s u + b_0 u \end{aligned}$$

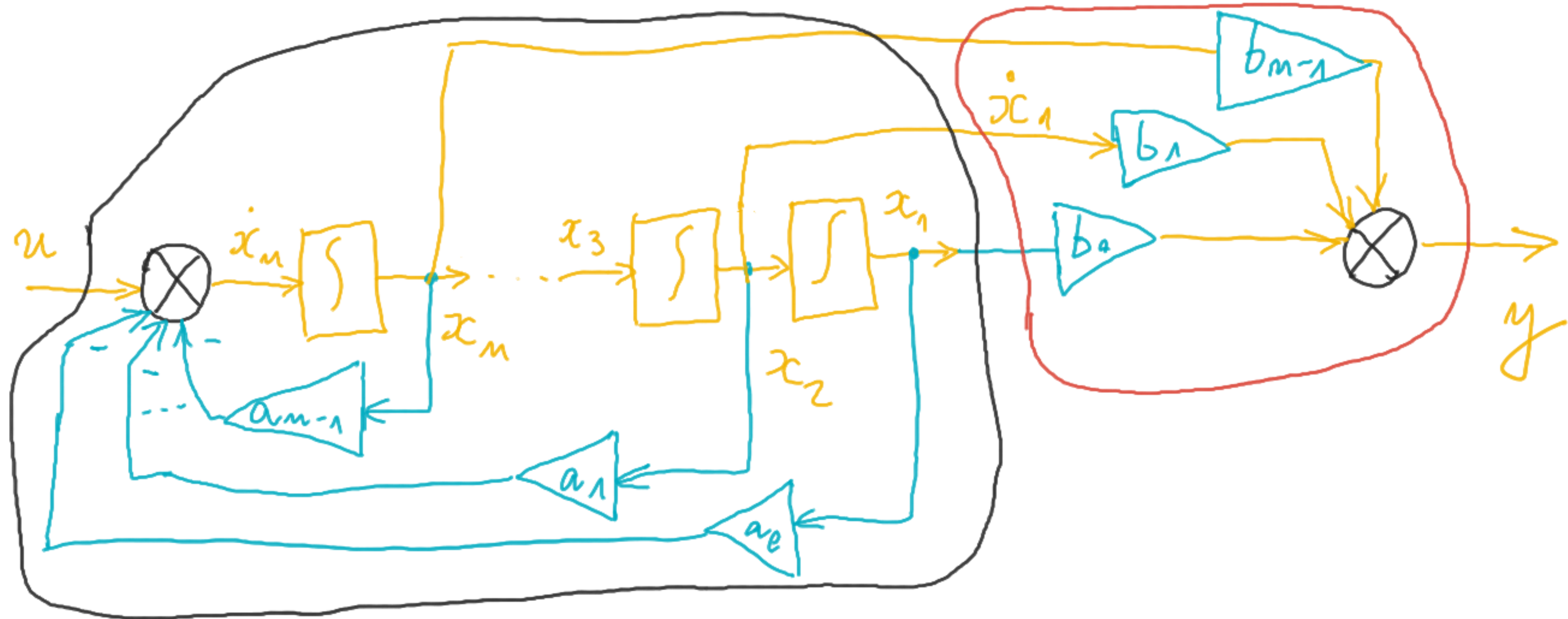
NO DOMÍNIO DO TEMPO, TEM-SE A
EQUAÇÃO DIFERENCIAL:

$$\frac{d^m y}{dt^m} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y =$$
$$= b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$s^m y = \overbrace{b_m s^m u + \dots + b_1 s u + b_0 u} - a_{n-1} s^{n-1} y - \dots - a_1 s y - a_0 y$$







$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1$$



$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

MATRIZ COMPANHEIRA
("COMPANION-FORM MATRIX")

FORMA
CANÔNICA
CONTROLÁVEL
CASO BIPRÓPRIO

$$y = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}] x + D u$$

Ex. 1

$$G(s) = \frac{5s^3 + 3s^2 + 7s - 1}{s + 5}$$

$$\begin{array}{r|l} 5s^3 + 3s^2 + 7s - 1 & s + 5 \\ -5s^3 - 25s^2 & \\ \hline 0s^3 - 22s^2 + 7s - 1 & \\ +22s^2 + 110s & \\ \hline 0s^2 + 117s - 1 & \\ -117s - 585 & \\ \hline -586 & \end{array}$$

$$0s^3 - 22s^2 + 7s - 1$$

$$+22s^2 + 110s$$

$$0s^2 + 117s - 1$$

$$\begin{array}{r} -117s - 585 \\ \hline -586 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} s + 5 & \\ \hline 5s^2 - 22s + 117 & \end{array}$$

ESTRITAMENTE
PRÓPRIA



$$G(s) = 5s^2 - 22s + 117 - \frac{586}{s+5}$$

NÃO CAUSAL

D

NÃO
REALIZÁVEL

Ex. 2

$$G(s) = \frac{7s^2 + 5s - 8}{\underline{\underline{2s^3 + 3s^2 + 10s + 4}}} \times 0,5$$

$$= \frac{3,5s^2 + 2,5s - 4}{s^3 + 1,5s + 5s + 2}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & -5 & -1,5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-4 \quad 2,5 \quad 3,5] x$$

ESTRITAMENTE
PRÓPRIA



$$D = 0$$

Ex. 3

$$G(s) =$$

$$\frac{10s^3 + 5s^2 + 7s - 1 \times 0,5}{2s^3 + 3s^2 + 10s + 4 \times 0,5} =$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 5 = D$$

$$= \frac{5s^3 + 2,5s^2 + 3,5s - 0,5}{s^3 + 1,5s^2 + 5s + 2}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -1,5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-10,5 \quad -21,5 \quad -5] x + [5] u$$

$$\begin{array}{l} N(s) \rightarrow 5s^3 + 2,5s^2 + 3,5s - 0,5 \quad \swarrow D(s) \\ \hline -5s^3 - 7,5s^2 - 25s - 10 \quad \downarrow \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} s^3 + 1,5s^2 + 5s + 2 \\ \hline 5 \leftarrow Q(s) \end{array}$$

$$R(s) \rightarrow 5s^3 - 5s^2 - 21,5s - 10,5$$

$$G(s) = \underset{D''}{5} + \frac{(-5s^2 - 21,5s - 10,5)}{(s^3 + 1,5s^2 + 5s + 2)}$$