



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Jose Luis Huayanay Villar

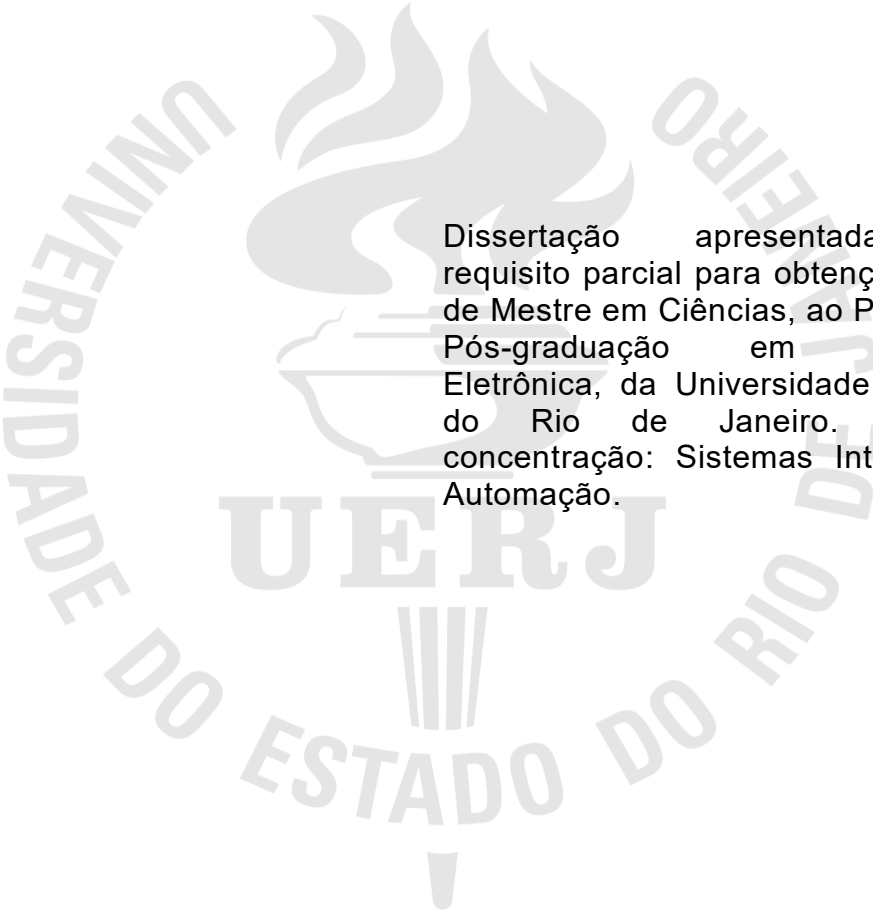
**Controladores para Irrigação Automática de Solos Modelados
por Equações Diferenciais Parciais Não-Lineares**

Rio de Janeiro

2021

Jose Luis Huayanay Villar

**Controladores para Irrigação Automática de Solos Modelados por
Equações Diferenciais Parciais Não-Lineares**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. José Paulo Vilela Soares da Cunha

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

H874 Huayanay Villar, Jose Luis.
Controladores para irrigação automática de solos
modelados por equações diferenciais parciais não-lineares /
Jose Luis Huayanay Villar. – 2021.
101f.

Orientador: José Paulo Vilela Soares da Cunha.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio
de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Controle automático -
Teses. 3. Equações diferenciais parciais - Teses. 4.
Sistemas de controle supervisorio - Teses. I. Cunha, José
Paulo Vilela Soares da. II. Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 681.511.42

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Jose Luis Huayanay Villar

**Controladores para Irrigação Automática de Solos Modelados por
Equações Diferenciais Parciais Não-Lineares**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 16 de julho de 2021

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Paulo Vilela Soares da Cunha D.Sc.(Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc.
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Ademar Gonçalves da Costa Junior, D.Sc.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB

Profa. Vilma Alves de Oliveira, Ph.D.
Faculdade de Engenharia - USP

Rio de Janeiro

2021

DEDICATÓRIA

À minha família Huayanay Villar, pelo apoio em me educar e me ensinar a alcançar meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, quando eu andar no vale da sombra do fracasso, seu cajado me dará ânimo.

À FAPERJ, pela bolsa de Mestrado.

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Eletrônica (PEL), UERJ-Brasil, por me permitir continuar meus estudos de Mestrado.

À minha família Huayanay Villar por ter me apoiado durante o tempo em que eu estava preparando a Dissertação.

À minha querida amada pela compreensão e amor de todos os dias.

Ao meu professor e orientador José Paulo V. S. da Cunha, a quem muito respeito pela paciência e por me permitir fazer parte da equipe de pesquisadores do PEL, UERJ.

RESUMO

HUAYANAY VILLAR, Jose Luis. *Controladores para irrigação automática de solos modelados por equações diferenciais parciais não-lineares*. 2021. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Nesta dissertação são propostas estratégias de controle para a irrigação de precisão. Os objetivos são desenvolver, analisar e testar métodos para controlar automaticamente o conteúdo de água no solo. O controle por modo deslizante (SMC) é aplicado para regular o conteúdo de água no solo de forma robusta, a incertezas paramétricas e perturbações. A dinâmica da infiltração da água em meio poroso (solo) é modelada pela equação de Richards, que é uma equação diferencial parcial (EDP) parabólica não-linear. Dois objetivos de controle são considerados: o controle da umidade média numa camada próxima à superfície e o controle do conteúdo de água em uma profundidade especificada no solo. Para isso, estratégias SMC são propostas, destacando-se o uso de um controlador com ações proporcional e integral conectado em cascata para o caso de sensor e atuador não colocados. Os resultados de simulações indicam o bom desempenho desses sistemas de controle e a rejeição de perturbações causadas pela evaporação da água ou chuva.

Palavras-chave: Controle por Modo Deslizante. Equação Diferencial Parcial. Equação de Richards. Dinâmica Não-Linear. Controle em Cascata. Controle Não Colocado. Controle de Irrigação.

ABSTRACT

HUAYANAY VILLAR, Jose Luis. *Controllers for automatic soil irrigation modeled by nonlinear partial differential equations*. 2021. 101 f. Dissertation (Master's degree in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, University of the State of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2021.

Control strategies for precision irrigation are proposed. The objective is to develop, analyze and test methods to automatically control the water content in the soil. Sliding mode control (SMC) is applied to regulate the water content in the soil with robustness to parametric uncertainties and disturbances. The dynamics of water infiltration in porous media (soil) is modeled by the Richards equation, which is a nonlinear parabolic partial differential equation (PDE). Two control objectives are considered: control of the average moisture in a layer near the surface and control of the moisture at a specified depth. SMC strategies are proposed, highlighting the use of a controller with proportional and integral actions connected in cascade for the case of non-collocated sensor and actuator. Simulation results indicate the performance of these control systems and the rejection of external disturbances such as water evaporation or rain.

Keywords: Sliding Mode Control. Partial Differential Equation. Richards Equation. Nonlinear Dynamics. Cascade Control. Non-Collocated Control. Irrigation Control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - (a) Estrutura (Dujiang Weir) para o sistema de irrigação e (b) Irrigação em uma fazenda de algodão	19
Figura 2 - (a) Cultura Machu Picchu, (b) Nascente de Água	20
Figura 3 - a) Gotejamento e tubulação de polietileno b) Sistema de irrigação por gotejamento de vinhedo em treliça	21
Figura 4 - Imagem da área de cultivo hidropônico e dos tanques de água ao nível do solo	22
Figura 5 - Controle e monitoramento - foto da empresa Agrosmart.	23
Figura 6 - Representação de solo saturado	26
Figura 7 - Representação de solo não saturado com espaços que contém ar.	27
Figura 8 - Diagrama do solo como uma mistura com 3 fases.	28
Figura 9 - Sinal do potencial de pressão.	31
Figura 10 - Coordenadas do sistema pela expressão unidimensional.	34
Figura 11 - Evolução de movimento de água no solo com entradas de: a).vazão= 7×10^{-6} m/s b).vazão= 7×10^{-6} m/s c).vazão= 7×10^{-7} m/s d).vazão= 7×10^{-4} m/s. Cada traço colorido representa o conteúdo de água numa camada; os traços mais grossos representam profundidade e os mais finos a superfície. ..	48
Figura 12 - Simulações das evoluções dos conteúdos de água em diversas camadas do solo. Cada traço colorido representa o conteúdo de água numa camada, afastadas entre si de 0; 1m com profundidade total 1 m.	50
Figura 13 - Simulações das evoluções dos conteúdos de água em diversas camadas do solo com espessuras de 0,1m para densidade de fluxo de 2×10^{-7} m/s. Cada traço colorido representa o conteúdo de água numa camada, afastadas entre si de 0; 1m com profundidade total 1 m.	52
Figura 14 - Dinâmica não-linear da propagação de água no solo, em formato tridimensional.	53
Figura 15 - Dados observados e previstos para cinco locais de medição em profundidades de 10cm a 150cm do centro do domínio do modelo.	55
Figura 16 - Tendência de variação do conteúdo de água em profundidade e tempo.	55
Figura 17 - Sensores no solo.	56

Figura 18 - Controle da média do conteúdo da água $\theta_{ref} = 0,1(m^3/m^3)$.	63
Figura 19 - Controle da média do conteúdo da água $\theta_{ref} = 0,2(m^3/m^3)$.	64
Figura 20 – Controle da média do conteúdo da água $\theta_{ref} = 0,3(m^3/m^3)$.	65
Figura 21 - Controle da média do conteúdo da água $\theta_{ref} = 0,4(m^3/m^3)$.	66
Figura 22 - O sinal de controle (azul) e o sinal de controle medio (amarelo) que aproxima o controle equivalente para $\bar{\theta}_{ref} = 0,1(m^3/m^3)$.	67
Figura 23 - o sinal de controle (azul) e o sinal de controle medio (amarelo) que aproxima o controle equivalente para $\bar{\theta}_{ref} = 0,2(m^3/m^3)$.	67
Figura 24 - o sinal de controle (azul) e o sinal de controle medio (amarelo) que aproxima o controle equivalente para $\bar{\theta}_{ref} = 0,3(m^3/m^3)$.	68
Figura 25 - o sinal de controle (azul) e o sinal de controle medio (amarelo) que aproxima o controle equivalente para $\bar{\theta}_{ref} = 0,4(m^3/m^3)$.	68
Figura 26 - Simulação do controlador da média do conteúdo da água no solo. (a) o conteúdo médio de água no solo até uma profundidade $L=0,15m$, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.	69
Figura 27 - Diagrama de controlador completo da umidade do solo.	70
Figura 28 - Resposta ao degrau da planta a ser identificada.	73
Figura 29 - Simulações das respostas ao degrau do sistema com SMC, (a) $\theta_{ref} \equiv 0,1 m^3/m^3$, (b) $\theta_{ref} \equiv 0,2 m^3/m^3$, (c) $\theta_{ref} \equiv 0,3 m^3/m^3$ e (d) $\theta_{ref} \equiv 0,4 m^3/m^3$.	77
Figura 30 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,50m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.	78
Figura 31 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,30m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.	79
Figura 32 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,20m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.	80
Figura 33 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,05m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.	82

Figura 34 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, $\theta_{ref}=0,10m^3/m^3$ (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,20m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle	83
Figura 35 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, $\theta_{ref}=0,30m^3/m^3$ (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,05m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle	84
Figura 36 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, $\theta_{ref}=0,40m^3/m^3$ (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,20m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle	84
Figura 37 - Simulação do controlador do conteúdo de água em malha fechada na profundidade $L=0,15m$, (a) conteúdo da água no solo, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.....	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Família de equações diferenciais parciais não-lineares.....	37
Tabela 2 - Tipos de Equações Diferenciais Parciais.	38
Tabela 3 - Propriedades hidráulicas de solos.	47
Tabela 4 - Tamanhos e funções dos poros do solo.....	49
Tabela 5 - Ajustes para o método de Cohen-Coon.	76

LISTA DE SIGLAS

EDP	Equação diferencial parcial (<i>Partial Differential Equation</i>)
EDPNL	Equação diferencial parcial não-linear
FAO	Organização das Nações Unidas para a Alimentação e a Agricultura (<i>Food and Agriculture Organization</i>)
GPR	Radar de penetração terrestre (<i>Ground Penetration Radar</i>)
MPC	Controle por modelo preditivo (<i>Model Predictive Control</i>)
MG	Margem de Ganho
PI	Proporcional integral
PID	Proporcional integral derivativo
SMC	Controle de modo deslizante (<i>Sliding Mode Control</i>)
SI	Sistema Internacional de Unidades
TDR	Refletômetro de domínio de tempo (<i>Time Domain Refletometer</i>)
VSC	Controle por Estrutura Variável (<i>Variable Structure Control</i>)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
OBJETIVOS GERAIS	17
Objetivos Específicos	17
ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	17
1. IRRIGAÇÃO DE PRECISÃO	18
1.1. Técnicas de irrigação	18
1.1.1 <i>Irrigação por aspersão</i>	18
1.1.2 <i>Irrigação industrial</i>	19
1.1.3 <i>Irrigação por superfície</i>	20
1.1.4 <i>Irrigação por gotejamento</i>	20
1.1.5 <i>Irrigação Hidropônica</i>	21
1.2. Controle automático de irrigação.....	22
1.2.1 <i>Controle do conteúdo da água no solo</i>	22
1.3. Desafios técnicos	24
1.3.1 <i>Impacto na sociedade</i>	24
2. MODELAGEM DA INFILTRAÇÃO DA ÁGUA NO SOLO	26
2.1. Armazenamento de água no solo	26
2.1.1 <i>Solos saturados</i>	26
2.1.2 <i>Solos não saturados</i>	27
2.1.3 <i>Conteúdo de água no solo volumétrico</i>	27
2.1.4 <i>Potencial hídrico</i>	29
2.2. Dinâmica de fluxo hidráulico	31
2.2.1 <i>Lei de Darcy</i>	31
2.2.2 <i>Equações de fluxo de água no meio saturado</i>	32
2.2.3 <i>Equações de fluxo de água no meio não saturado</i>	32
2.3. Dedução da equação de Richards.....	33
2.3.1 <i>Aplicações da equação de Richards</i>	35
3. DESCRIÇÃO DA DINÂMICA NÃO-LINEAR DE INFILTRAÇÃO DE ÁGUA NO SOLO	37
3.1. Equações diferenciais parciais não-lineares	37
3.1.1 <i>Tipos comuns de equações diferenciais parciais</i>	38

3.2	Não-linearidade na dinâmica da propagação de água no solo	39
3.3.	Métodos de condutividade e difusividade hidráulica	40
3.3.1	<i>Método de Van Genuchten</i>	41
3.3.2	<i>Método de Brooks e Corey</i>	41
3.3.3	<i>Método de Hayek</i>	41
3.3.4	<i>Solução exata</i>	42
3.4	Condições de contorno	43
3.5.	Condições de contorno para problemas de irrigação.....	44
3.6.	Simulação da propagação de água no solo	46
3.6.1	<i>Simulação para dinâmica linear</i>	47
3.6.1	<i>Simulação para dinâmica não-linear</i>	49
6.6.2	<i>Simulação da dinâmica não-linear para diferentes tipos de solo.....</i>	51
3.7.	Comparação e validação de resultados com outras fontes	54
4.	CONTROLE POR MODO DESLIZANTE DA MÉDIA DO CONTEÚDO DE ÁGUA NO SOLO	56
4.1	Controle de equações diferenciais parciais para irrigação	56
4.2	Sistemas, estrutura variável e modo deslizante	58
4.2.1	<i>Regular o conteúdo médio de água no solo</i>	58
4.2.2	<i>Lei de controle.....</i>	58
4.3	Simulação de controlador da média do conteúdo da água no solo.....	62
4.4	Comparação e validação de resultados com outras fontes	68
5.	REGULADOR DO CONTEÚDO DE ÁGUA NO SOLO EM UMA PROFUNDIDADE ESPECÍFICA.....	70
5.1.	Controle proporcional e integral	70
5.1.1	<i>Equação de controle proporcional.....</i>	71
5.1.2	<i>Equação de controle integral</i>	71
5.2.	Equação de controle PI para irrigação.....	72
5.3.	Métodos de identificação de sistemas e parâmetros de controle PI	72
5.3.1	<i>Método de Basilio-Matos</i>	73
5.3.2	<i>Parâmetros de Cohen-Coon</i>	76
5.3.3	<i>Respostas ao degrau do sistema</i>	76
5.4	Simulação controle do conteúdo da água em uma profundidade especificada.....	77
5.5	Comparação e validação de resultados com outras fontes	85

CONCLUSÃO	87
Trabalhos futuros	87
REFERÊNCIAS	89
APÊNDICE A - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DE RICHARDS	97
APÊNDICE B – ALGORITMOS DE SIMULAÇÕES EM SCILAB 6.1.0	99

INTRODUÇÃO

A água doce ou potável é um recurso escasso, resultando na necessidade de conseguir uma melhor racionalização do seu uso. A superfície do planeta Terra é coberta por cerca de 70% de água, sendo que 96% dessa água é retida em oceanos e apenas 2,5% correspondem a água doce. Desta forma, a água disponível para o uso humano, incluindo atividades domésticas e agricultura, corresponde a menos de 1% da água da Terra (FERRAZ, GONÇALO, SERRA, CARVALHOSA, & REAL, 2020). Em muitas partes do mundo o recurso da água doce é proporcionado pela chuva: a quantidade, a frequência e a intensidade, em vales que variam no espaço e no tempo (MOLINA & CUNHA, 2017). Além disso, o problema da escassez da água nos momentos críticos como a disseminação global da pandemia COVID-19, por exemplo, e os fenômenos naturais que afetam o desenvolvimento das culturas agrícolas consistem em uma motivação para desenvolver este trabalho. Propondo-se então, controladores para irrigação automática de solos modelados por equações diferenciais parciais Não-Lineares. Além disso possibilita-se abranger a agricultura de precisão, que tem como objetivo incrementar a e ciência produtiva dos cultivos, mediante a observação, medical e a ação sobre as condições específicas do processo de crescimento das plantações (LOZOYA, AGUILAR, & MENDOZA, 2016).

O método de irrigação é largamente empregado na irrigação de diversas culturas na América Latina, por exemplo na cidade de Machu Picchu (construída em meados de 1450), considerada uma das maravilhas do mundo, os Incas alcançaram um conhecimento avançado de planejamento hidráulico, drenagem e construção de irrigação durável (RIBEIRO, 2013). Empresas como a HIT Products Corporation-EEUU¹, a empresa israelense Tevatronic² e as empresas brasileiras Agrosmart³ e VillaMotors⁴, desenvolvem sistemas autônomos de controle de irrigação e oferecem irrigação inteligente e barata para pequenos agricultores. Neste trabalho será considerada a dinâmica não-linear da propagação da água no solo, para isto, faz-se uso de soluções analíticas ou numéricas da Equação de

1 www.hitproductscorp.com

2 www.tevatronic.net

3 www.agrosmart.com.br

4 www.joseluishuayanayvi.wixsite.com/villa-motors

Richards (Richards,1931), a qual define que se um meio poroso for umedecido por um líquido (água) e não estiver saturado, a pressão nos filmes será menor que a pressão atmosférica, o que dependerá da quantidade de líquido presente no meio (fenômeno capilar). Tal fato oferece informações importantes sobre a física do fenômeno e permite identificar a relação e dependência do resultado com as variáveis, como difusividade hidráulica (D) e a condutividade hidráulica (K) no processo, que são fatores relevantes a serem considerados. Existem métodos que são aplicados para desenvolver (K) e (D) em um meio não saturado como métodos de (BROOKS & COREY,1964; PHILIP, 1969; VAN GENUCHTEN,1980; E HAYEK,2016).

Villar, García, & Hiyo (2020), utilizaram controladores que eram simples temporizadores e comutadores para ligar um sistema de irrigação hidropônico e de solo. Apesar desses sistemas possibilitarem níveis elevados de uniformidade, as irregularidades da aplicação e a variabilidade espacial das propriedades do solo fazem com que o armazenamento de água no solo apresente grandes variações no espaço. Isso motiva a abordagem do problema de síntese do controlador mediante EDPs (J. M. CORON, 2007; KRSTIC & SMYSHLYAEV, 2008b) com base em modelos não lineares que descrevem com precisão seu comportamento dinâmico a ser controlado. Por outro lado, o Controle a Estrutura Variável (Variable Structure Control - V SC) ou Controle por Modo Deslizante (Sliding Mode Control - SMC) desenvolvidas em (UTKIN,1978) e pesquisas feitas por (WADDOO, 2012; E MOLINA & CUNHA, 2019) que permitiram assegurar desempenho superior para convergência e estabilidade.

Na dissertação de Molina & Cunha (2019), foi proposto controlar o conteúdo da água no solo para equação de Richards na forma linear, considerando a difusividade hidráulica e condutividade hidráulica constantes. Além disso, foram apresentadas estratégias de controle usando ações proporcional e integral (PI).

Como continuidade do trabalho de Molina & Cunha (2019), este trabalho propõe-se considerar a equação não-linear de Richards para poder projetar controladores automáticos de irrigação para solos modelados por equações diferenciais parcial parabólicas não-lineares.

OBJETIVOS GERAIS

Desenvolver, analisar e testar um método para controlar automaticamente o conteúdo de água no solo.

Objetivos Específicos

- Estudar a dinâmica não-linear de conteúdo de água no solo, modelado pela equação de Richards.
- Controlar e regular o conteúdo de água no solo, considerando-se o modelo não-linear.

ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho apresenta uma abordagem sistemática para desenvolver o controle automático da umidade no solo seguindo as seguintes etapas:

- O Capítulo 1 apresenta uma revisão bibliográfica a respeito da irrigação de precisão, a qual é dividida em três partes: técnicas de irrigação, controle automático de irrigação e desafios técnicos;
- O Capítulo 2 apresenta o desenvolvimento da modelagem de infiltração da água no solo, equações de fluxo de água no meio saturado e não saturado, equação de Richards e aplicações;
- O Capítulo 3 apresenta a descrição da dinâmica não-linear de infiltração de água no solo, equações diferenciais parciais (EDP) não-lineares, difusividade e condutividade hidráulica e condições de contorno;
- O Capítulo 4 apresenta o controle por modelo deslizante da média do conteúdo de água no solo;
- O Capítulo 5 apresenta o regulador do conteúdo de água no solo em uma profundidade específica;
- E por fim apresento as conclusões sobre o trabalho desenvolvido, trazendo também sugestões para trabalhos futuros no final desta dissertação.

1. IRRIGAÇÃO DE PRECISÃO

A irrigação é uma técnica utilizada na agricultura que tem por objetivo o fornecimento controlado para levar água às plantações em quantidade suficiente e no momento certo, assegurando a produtividade e a sobrevivência da planta (CARVALHO & ARAUJO, 2010). O setor que mais consome é também o que mais desperdiça água doce no Brasil. A agropecuária usa 70% da água no país, porém quase metade desse montante é jogada fora. As estimativas são da Organização das Nações Unidas para Agricultura e Alimentação, mais conhecida como FAO. Entre os motivos do desperdício estão irrigações mal executadas e falta de controle do agricultor na quantidade usada em lavouras e no processamento dos produtos (ANTONELLI, 2015).

1.1. Técnicas de irrigação

Ao redor do mundo existem inúmeras formas de estabelecer um sistema de irrigação. Algumas técnicas obtiveram maior sucesso e se destacaram tanto pela praticidade quanto pela eficiência. As seguintes subseções apresentam quais são elas.

1.1.1 Irrigação por aspersão

A irrigação por aspersão é um método de irrigação semelhante à chuva para as plantações, é uma forma de regar as plantas artificialmente com sistemas pressurizados. O que significa que precisa de água sob pressão para funcionar, existem muitos tipos diferentes de aspersores de irrigação (BROUWER, PRINS, KAY, & HEIBLOEM, 1988). Alguns são usados em hortas caseiras e outros em fazendas onde especificamente a água é distribuída através de um sistema de tubos, geralmente por bombeamento (COELHO, COELHO FILHO, & OLIVEIRA, 2005). Os sistemas por aspersão convencionais têm sido os mais utilizados para irrigação de hortaliças no Brasil, especialmente em pequenas áreas de produção. Em grandes áreas o sistema pivô central tem sido usado para irrigação, como no cultivo de tomate para processamento, ervilha, milho doce, cenoura, batata e melancia (MAROUELLI & SILVA, 1998). Pulverizadores nas saídas distribuem a

água por toda a superfície do solo por meio de uma rede que pode ser composta por bombas, válvulas, tubulações e aspersores.

1.1.2 Irrigação industrial

A maioria dos aspersores de irrigação opera por meio de tecnologia elétrica e hidráulica e são agrupados em zonas que podem ser ligadas e desligadas coletivamente pelo acionamento de uma válvula solenoide (Morgan, 1993). A exemplo disso, a Dinastia Qin da China que desenvolveu o sistema de irrigação em Dujiangyan, Figura 1, que ainda está sendo utilizada e atualmente irriga 5.300 quilômetros quadrados (WALLER & YITAYEW, 2015). Os aspersores domésticos variam amplamente em tamanho, custo e complexidade, eles incluem aspersão de impacto, aspersão oscilantes, sistemas de aspersão subterrâneos e aspersão portáteis (THOMAS, THOMAS, STUETZ, & ASHBOLT, 2014).

Figura 1 - (a) Estrutura (Dujiang Weir) para o sistema de irrigação e (b) Irrigação em uma fazenda de algodão.



Fonte: (a) Morgan, 1993; (b) Waller & Yitayew, 2015.

Ciência agrícola: Na América Latina, cidades como Machu Picchu, (construída no Peru por volta de 1450) são exemplos de conhecimento e ciência agrícola. Os Incas alcançaram um conhecimento avançado de planejamento hidráulicos, drenagem e construção de irrigação durável (RIBEIRO, 2013). Os engenheiros deram alta prioridade à drenagem superficial e subterrânea de Machu Picchu durante sua concepção e construção, Figura 2, anos mais adiante na década de 1950, a Stout-Wyss, uma empresa com sede em Portland, Oregon,

desenvolveu um sistema de irrigação do tipo tubo rolante para fazendas que se tornou o tipo mais popular para agricultores que irrigam grandes campos em diferentes cidades do planeta (THOMAS *et al.*, 2014).

Figura 2 - (a) Cultura Machu Picchu, (b) Nascente de Água.



Fonte: Extraído e Ribeiro, 2013.

1.1.3 Irrigação por superfície

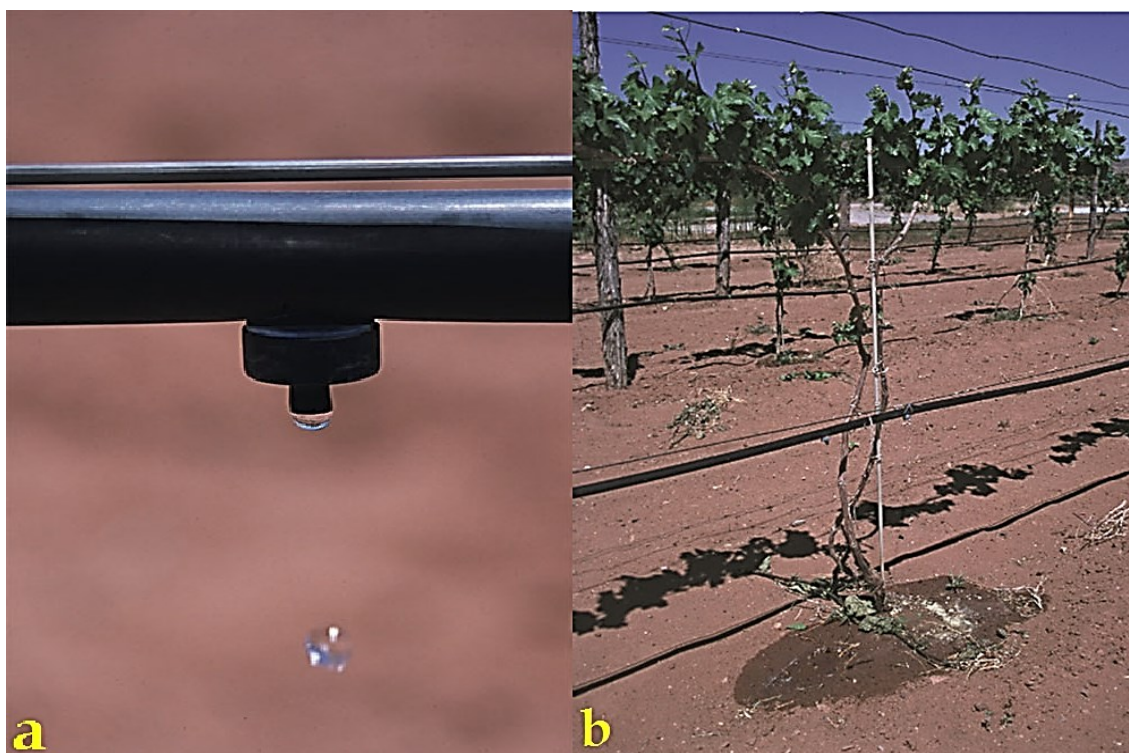
Na irrigação por superfície a distribuição da água se dá por gravidade, através da superfície do solo. Na maioria dos casos, esta técnica apresenta menor custo de implantação em relação aos demais métodos de irrigação (COSTA & SOUZA, 2006). A água flui por sulcos paralelos infiltrando-se pelo fundo e laterais deles, sem que a superfície do solo fique molhada na sua totalidade. Os sulcos podem ser com declividade zero (em sulcos curtos) ou com declividade diferente de zero (em sulcos longos) (LEVIEN, 2003).

1.1.4 Irrigação por gotejamento

A irrigação por gotejamento é um sistema fixo, cujo custo elevado limita seu uso para culturas nobres. Possui alta capacidade de retorno e exige elevado investimento em obras e aquisição de equipamentos para captação, condução, controle e distribuição da água. Devendo ainda considerar gastos com energia e mão de obra para operação e manejo do sistema, que representam importantes custos adicionais à produção (SILVA, FARIA, & REIS, 2003). Além disso, distribuem a água por meio de uma rede de válvulas, canos, tubos e emissores,

Figura 3. A maioria dos grandes sistemas de irrigação por gotejamento emprega algum tipo de filtro para evitar o entupimento do caminho do fluxo do pequeno emissor por pequenas partículas transportadas pela água (WALLER & YITAYEW, 2015). Aplicado, especialmente, para as culturas de árvores, como coqueiros, uvas, bananas, frutas cítricas, morangos, cana de açúcar, algodão, e árvores de paisagem em contentores. (GOYAL, 2012).

Figura 3 - a) Gotejamento e tubulação de polietileno b) Sistema de irrigação por gotejamento de vinhedo em treliça.



Fonte: Extraído de Waller & Yitayew, 2015.

1.1.5 Irrigação Hidropônica

Na irrigação hidropônica, Figura 4, há um sistema de microcontrolador programável que pode ativar e desativar a bomba de água da estufa em determinados momentos de acordo com o desenvolvimento do cultivo hidropônicas (VILLAR *et al.*, 2020).

Figura 4 - Imagem da área de cultivo hidropônico e dos tanques de água ao nível do solo



Fonte: Extraído de Villar *et al.*, 2020.

1.2. Controle automático de irrigação

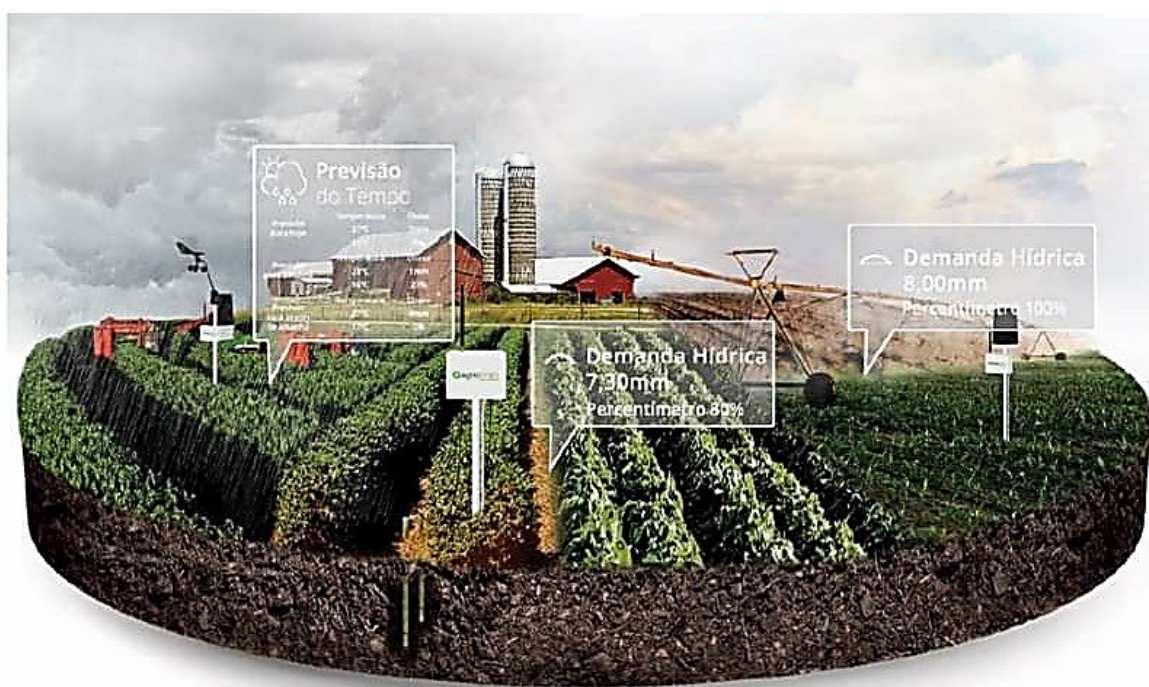
A maioria dos controladores possui um meio de definir a frequência da irrigação, o horário de início e a sua duração (MECHAM, 2006). Em geral esses sistemas requerem menos horas de trabalho do que os sistemas de produção convencionais, uma vez que não só podem ser automatizados, mas também a natureza das tarefas se torna significativamente diferente nesses sistemas. Assim como, suas propriedades de estabilidade que são estudadas com o auxílio de diferentes funções e critérios de estabilidade como pelos referidos autores (MOLINA & CUNHA, 2017; HAYEK, 2016; RANI & KAMALESH, 2014; BARKUNAN, BHANUMATHI, & SETHURAM, 2019; MUÑOZ-CARPENA & DUKES, 2005). O desempenho dos controladores é avaliado por simulações e experimento.

1.2.1 Controle do conteúdo da água no solo

Fazer o controle de umidade do solo é essencial para acompanhar o desenvolvimento de plantas ou o rendimento de uma cultura. A umidade é basicamente a quantidade de água que está presente no solo (ZREDA *et al.*, 2012; OLIVEIRA, 2015). Existem vários métodos geofísicos disponíveis que

podem informar de forma aproximada o conteúdo de água do solo, ver Figura 5, como refletômetro de domínio de tempo (TDR), sonda de nêutrons, sensor de domínio de frequência, sonda de capacitância, refletômetro de domínio de amplitude, tomografia de resistividade elétrica, radar de penetração no solo (GPR) e outros que são sensíveis às propriedades físicas da água (OZCEP *et al.*, 2005). Existem duas formas de realizar o controle de umidade do solo: o direto e o indireto.

Figura 5 - Controle e monitoramento - foto da empresa Agrosmart.



Fonte: Extraído de Vitón *et al.*, 2017.

Os métodos diretos incluem extração de água de uma amostra de solo por meio de evaporação, lavagem e reação química. Já o indireto inclui a medição das características do solo, dependendo do conteúdo de água, além das características de um determinado objeto do solo (CALBO & SILVA, 2005; VITÓN, & SOTO, 2017).

1.3. Desafios técnicos

A irrigação envolve a solução de vários problemas de engenharia e econômicos, enquanto minimizam as consequências ambientais negativas como (LORD, 2001):

- Competição pelos direitos da água, o estabelecimento de direitos de água comercializáveis pode desempenhar um papel importante na melhoria da eficiência, equidade e sustentabilidade do uso da água nos países em desenvolvimento;
- Direitos comercializáveis bem definidos formalizam e garantem os direitos existentes sobre a água detidos pelos usuários da água (ROZHDESTVENSKY & SIMAKIN, 1984);
- A irrigação com água salina ou com alto teor de sódio pode danificar a estrutura do solo devido à formação de solo alcalino;
- Complicações na medição precisa do desempenho da irrigação e a falta de labo-retórico de prova, que muda ao longo do tempo e do espaço usando medidas como produtividade, eficiência, equidade e adequação;
- Problema da escassez da água nos momentos críticos como a disseminação global das pandemias e fenômenos naturais que afetam o desenvolvimento da cultura.

1.3.1 *Impacto na sociedade*

As tecnologias sociais de reaproveitamento de água da chuva e dos efluentes domésticos para irrigação surgem como uma alternativa para tornar as cidades menos vulneráveis à seca e com melhor racionalização de seu uso (KHAN & LIMA, 2021).

Em outras palavras, a terra irrigada produz 2,5 vezes mais produtos do que a terra não irrigada (SUNDQUIST, 2007). O manejo adequado da água pode conduzir a excelentes resultados na produção de alimentos, porém seu mau uso provoca degeneração do meio físico natural (PAZ & MENDONÇA, 2000).

A água tem sido considerada, no final deste século, um recurso escasso e estratégico, por questão de segurança nacional e por seus valores social, econômico e ecológico (MAIA NETO, 1997). Um estudo de 2016 descobriu que

os países cuja agricultura dependia da irrigação, têm maior probabilidade de ser autocráticos do que outros países (SUNDQUIST, 2007).

Estas ações possibilitam um ritmo seguro de trabalho para que as indústrias e a agricultura possam atender à sua demanda. Além disso, a irrigação ou micro irrigação é o segmento de crescimento mais rápido da indústria de irrigação em todo o mundo e tem potencial para aumentar a qualidade do suprimento de alimentos por meio da melhoria da eficiência da água (LAMM, AYARS, & NAKAYAMA, 2006). Durante pandemias ou fenômenos naturais tem um propósito maior: evitar a suspensão do abastecimento de água no que compete seus equipamentos e serviços (ZHANG & GONG, 2020).

2. MODELAGEM DA INFILTRAÇÃO DA ÁGUA NO SOLO

Neste capítulo são apresentados conceitos de hidrologia, a fim de estudar os problemas de controle. Mostra-se os modelos que representam a dinâmica da propagação da água no solo.

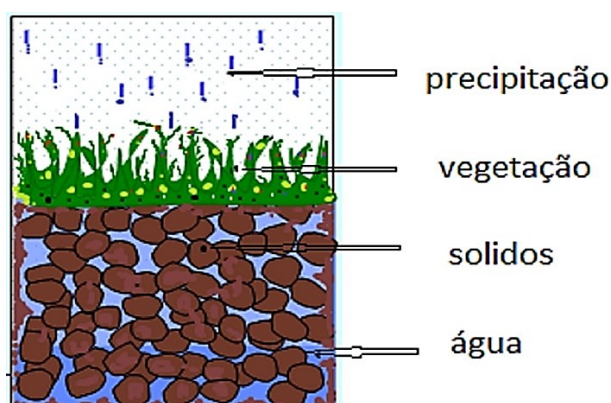
2.1. Armazenamento de água no solo

O solo consiste em uma fase sólida de minerais e matéria orgânica (a matriz do solo), bem como uma fase porosa que retém gases (a atmosfera do solo) e água como solução do solo (VORONEY, 2007; DANOFF-BURG, 2014). Visto que, as plantas requerem um suprimento quase contínuo de água, mas a maioria das regiões recebe chuvas esporádicas. A capacidade de retenção de água dos solos é vital para a sobrevivência das plantas (DENMEAD & SHAW, 1962). O solo é composto por duas partes: a parte sólida e a parte porosa (LIBARDI, 2005).

2.1.1 Solos saturados

O solo saturado é aquele em que, relativamente, todos os poros e fraturas estão preenchidos de água dependendo das características das partículas do solo, empacotamento e porosidade, Figura 6.

Figura 6 - Representação de solo saturado.



Fonte: Autor, 2021.

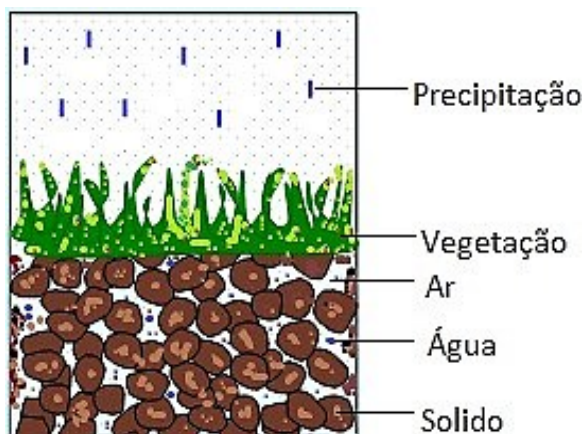
O limite de uma zona saturada pode ser estável ou instável, exibindo comportamentos conhecidos como instabilidade de *Saffman-Taylor* que consiste

em uma formação de padrões em uma interface morfológicamente instável entre dois fluidos em um meio poroso como instabilidade de *Rayleigh-Taylor*. Essa instabilidade é de uma interface entre dois fluidos de densidades diferentes que ocorre quando o fluido mais leve está empurrando o fluido mais pesado, para mais informações siga a referência (LI & GONG, 2014; SHARP, 1983).

2.1.2 Solos não saturados

A diferença do solo não saturado está na característica de possuir espaços que contém ar, Figura 7, com quantidade de água que neste caso será sempre menor que o valor de saturação (MILLAR, 1993).

Figura 7 - Representação de solo não saturado com espaços que contém ar.



Fonte: Autor, 2021.

2.1.3 Conteúdo de água no solo volumétrico

Seja uma amostra total v_t , isso seria a soma do volume de sólidos v_s mais o volume do poro v_f :

$$v_t = v_s + v_f \quad (2.1)$$

$$v_f = v_w + v_a \quad (2.2)$$

onde v_w é volume de água e v_a o volume de ar (LIBARDI, 2005), substituindo a equação (2.2) em (2.1) presentes no interior do espaço poroso,

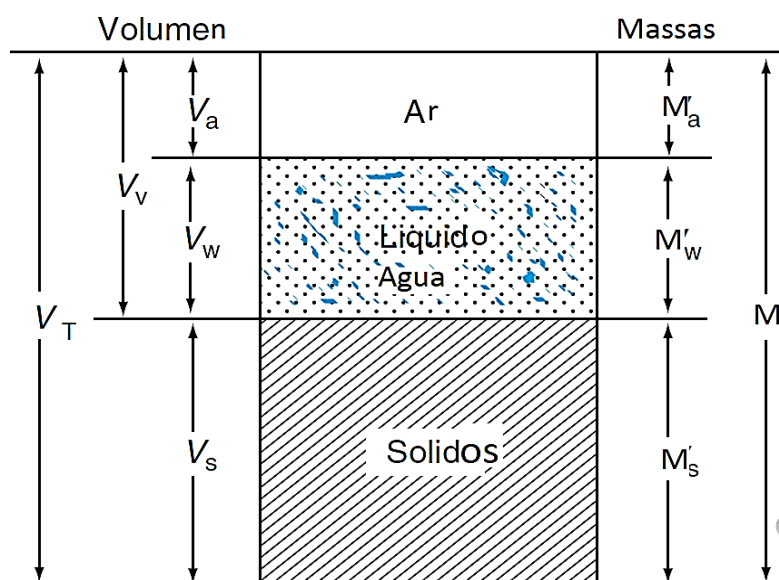
$$v_t = v_s + v_w + v_a \quad (2.3)$$

Considere-se o quociente do volume de água presente em uma amostra de solo em um determinado instante e o volume da amostra total, definido dessa forma,

$$\theta = \frac{v_w}{v_t} \quad (2.4)$$

onde θ é o conteúdo da água no solo volumétrico. O solo é considerado como um sistema conformado por 3 fases, Figura 8, composição do solo por volume e massa, e por fases de ar e água,

Figura 8 - Diagrama do solo como uma mistura com 3 fases.



Fonte: Adaptado de MIYAZAKI, 2005.

O conteúdo normalizado de água Θ é um valor adimensional definido por Van Genuchten (1980), como:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.5)$$

onde θ é o conteúdo volumétrico de água θ_r é o conteúdo de água residual, para θ_s é o conteúdo de água saturada,

$$\theta_s = \frac{v_f}{v_t} \quad (2.6)$$

θ_g é o conteúdo de água gravimétrica William & Whitman (1969), que depende da massa

$$\theta_g = \frac{m_w}{m_s} \quad (2.7)$$

m_w e m_s que representam a massa de água e solo respectivamente, M é a massa total do solo não saturado em um dado momento com a massa do ar.

2.1.4 Potencial hídrico

O potencial hídrico quantifica a tendência da água de se mover de uma área para outra devido à osmose (MOREIRA, 2014), gravidade (DE MELO SOUZA, PÉREZ, & BOTREI, 2006) e pressão mecânica como ação capilar, ou seja, que é causada pela tensão superficial (TAIZ & ZEIGER, 2002). Para determinar o potencial total do sistema solo-água é realizada a soma de diferentes potenciais (HILLEL, 1998).

$$\varphi_t = \varphi_g + \varphi_p + \varphi_o \quad (2.8)$$

na qual, φ_t é o potencial total, φ_g é o potencial gravitacional, φ_p é o potencial de pressão e φ_o é o potencial osmótico.

Outra referência mais avançada (Taiz & Zeiger, 2002) inclui muitos fatores diferentes que podem afetar o potencial total da água. A soma desses potenciais determina o potencial geral da água e a direção do fluxo de água:

$$\varphi_T = \varphi_0 + \varphi_g + \varphi_p + \varphi_0 + \varphi_v + \varphi_m \quad (2.9)$$

onde φ_0 é o potencial de correção de referência, φ_v é o potencial de umidade e φ_m é o efeitos de potencial mátrico. Nesta seção só estudaremos três potenciais importantes: potencial gravitacional, potencial pressão, potencial osmótico.

Potencial gravitacional: O potencial gravitacional φ_g em um espaço é a energia potencial gravitacional U nesse espaço por unidade de massa (MARION, 2013) e a massa m com densidade ρ é constante dentro de um volume pequeno dV ,

$$\phi_g = \frac{U}{m} \rightarrow m = \iiint_V \rho dV \quad (2.10)$$

para uma profundidade específica z ,

$$U = mgz \rightarrow \varphi_g = gz \quad (2.11)$$

Potencial pressão: A pressão exercida por um fluido em equilíbrio se torna uma função da força exercida pela gravidade, Figura 9, com pressão hidrostática que pode ser determinada a partir de uma análise de volume (BETTINI, 2016), onde a pressão hidrostática pode ser calculada de acordo,

$$p(z) - p(z_0) = \frac{1}{A} \int_{z_0}^z dz' \iint_A dx' dy' \rho(z')g(z') = \int_{z_0}^z dz' \rho(z')g(z') \quad (2.12)$$

onde, p é a pressão hidrostática (P_a). ρ é a densidade do fluido (kg/m^3), g é a aceleração gravitacional (m/s^2), A é a área de teste (m^2), z é a altura (paralela à direção da gravidade) da área de teste (m) e z_0 é a altura do ponto de referência zero da pressão (m). A equação (2.12) pode ser simplificada,

$$P = p - p_0 = \rho gh \quad (2.13)$$

sendo que, h é a altura de $z - z_0$ e ρ é a densidade de água, então o potencial de submersão,

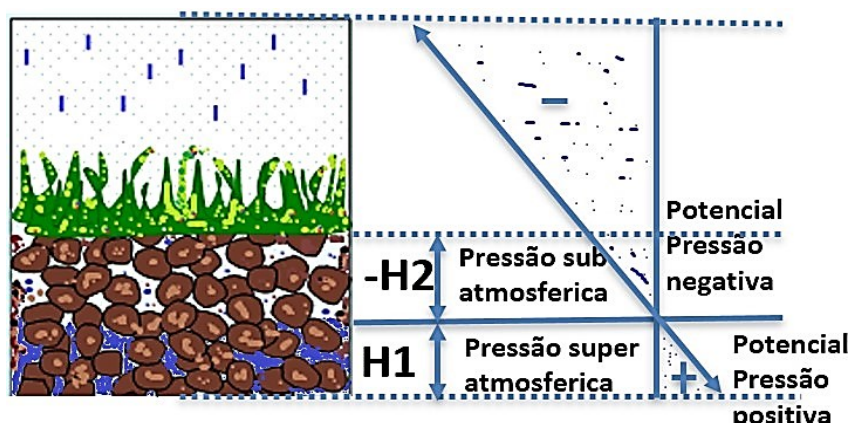
$$\varphi_p = P \quad (2.14)$$

quando a pressão hidrostática é menor que a pressão atmosférica tem-se,

$$\Psi = -P \quad (2.15)$$

onde Ψ é o potencial mátrico.

Figura 9 - Sinal do potencial de pressão.



Fonte: Autor, 2021.

Potencial osmótico: Como as regiões do solo geralmente não são divididas por uma membrana semipermeável, o potencial osmótico normalmente tem uma influência desprezível no movimento de massa da água nos solos (JONES, 2013).

2.2. Dinâmica de fluxo hidráulico

Governada basicamente pelos efeitos da viscosidade e densidade em relação à inércia forças do fluxo. Neste contexto, a avaliação da dinâmica de fluxo hidráulico por meio de modelos matemáticos de simulação possibilita a compreensão da sazonalidade do fluxo de base, além de quantificar a reserva reguladora e definir estratégias de solução.

2.2.1 Lei de Darcy

Henry Philibert Gaspard Darcy, engenheiro francês que fez contribuições importantes para a hidráulica, incluindo a lei de Darcy para o fluxo em meios porosos em filtros de areia (DARCY, 1856 *apud* BROWN, 2002).

$$Q = \frac{AK (h_2 + z_2) - (h_1 + z_1)}{L} \quad (2.16)$$

onde Q é o fluxo de volume de água (m^3/s), A é a área da seção transversal (m^2), h é a cabeça de pressão, z é a profundidade, L é o comprimento do caminho do fluxo (m) (MILLAR, 1993).

$$q = \frac{Q}{A} \quad (2.17)$$

ou,

$$q = -K \nabla H \quad (2.18)$$

onde q é a densidade de fluxo (m/s), K é a condutividade hidráulica (m/s), ∇H consiste no gradiente de coluna de água e o operador diferencial ∇ é representada,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (2.19)$$

i, j, k são os vetores unitários e na forma do vector,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.20)$$

2.2.2 Equações de fluxo de água no meio saturado

Se a equação de Buckingham-Darcy for admitida como válida para quantificação de solos não saturados então, a descrição desse fluxo deve obedecer ainda a lei de conservação de massa (HILLEL, 1998; PREVEDELLO, 1987), que é expressa por,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot q \quad (2.21)$$

na qual, $\theta \in [0, 1)$ é o conteúdo de umidade no solo (m^3/m^3), $\partial \theta / \partial t$ é a sua taxa de variação em relação ao tempo e $\nabla \cdot q$ é o divergente do movimento da água no solo.

2.2.3 Equações de fluxo de água no meio não saturado

A equação de fluxo de água em meios porosos não saturados é deduzida da combinação de três equações que ilustram princípios físicos de conservação: a equação de continuidade (LIBARDI, 2005), a lei de *Buckingham-Darcy* (BUCKINGHAM, 1907) e a equação de *Bernoulli* (DYSTHE, 1979).

2.3. Dedução da equação de Richards

Richards (1931), combinou a equação de *Buckingham-Darcy* com a equação da continuidade e obteve a equação diferencial geral que governa o fluxo de água em solos não saturados. Matematicamente, a lei de Darcy pode ser expressa pela equação para solo não saturado (eq. 9),

$$q = -K(\theta)\nabla\Phi \quad (2.22)$$

Onde $-\nabla\Phi$ é o campo total (movimento da água) ou o campo total que tende a produzir um movimento da água,

$$\Phi = \Psi + \varphi \quad (2.23)$$

Se a força da gravidade for representada como o gradiente negativo do potencial $\varphi = gz$, onde z é a altura de um nível de referência, então $F = -\nabla\varphi = -g$. A variação da força de gravidade com z é desprezada, sendo g considerado constante, substituindo equação (2.23) em (2.22) tem-se

$$q = -K(\theta)\nabla[\Psi(\theta) - z] \quad (2.24)$$

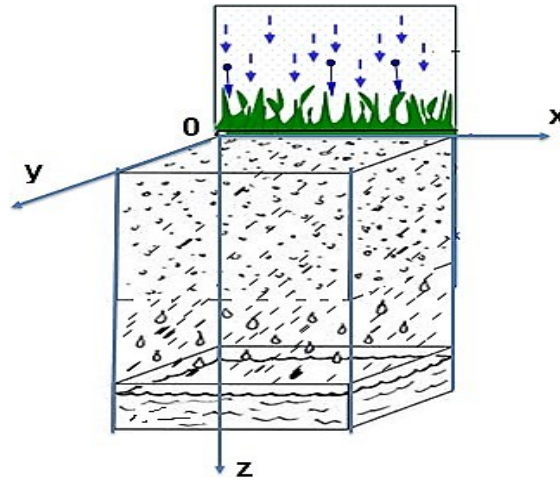
Esta equação descreve a condutividade K e potencial mátrico Ψ que depende do conteúdo de água. Substituindo a equação (2.24) em (2.21) (HILLEL, 1998), tem-se

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\theta)\nabla(\Psi(\theta) - z)] \quad (2.25)$$

Através da seguinte expressão unidimensional podemos visualizar as coordenadas do sistema, Figura 10.

$$\frac{\partial\theta}{\partial\Psi} \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \left(\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (2.26)$$

Figura 10 - Coordenadas do sistema pela expressão unidimensional.



Fonte: Autor, 2021.

Se for necessário escrever a equação (2.26) em função de conteúdo de água no solo não saturado $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ os termos podem ser escritos como,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.27)$$

Onde $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ é a inclinação da curva de umidade característica (conteúdo de água ou θ). Substituindo (2.27) na equação (2.26) temos,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right] \quad (2.29)$$

Se a capacidade específica do conteúdo da água no solo, $C(\theta)$ é descrita teremos,

$$C(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \quad (2.30)$$

Se introduzir a função denominada difusividade hidráulica D , temos

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{C(\theta)} = K(\theta) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta} \quad (2.31)$$

que foi determinada por (KLUTE, 1965) e tem suas unidades físicas no SI (m^2/s),

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta} \quad (2.32)$$

O modelo deste sistema de irrigação pode ser reduzido a uma EDP unidimensional com fluxo de água vertical unidimensional num solo semi-infinito ($z \in R^+$). Para isto, assume-se que a água seja aspergida uniformemente sobre a superfície plana do solo, por conseguinte (2.26) poderá ser restrita ao espaço unidimensional vertical (MOLINA & CUNHA, 2019)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \left[\frac{\partial D(\theta)}{\partial z} - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \right] \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.34)$$

Podendo ser também representada com outra nomenclatura mais compacta para seu uso mais adiante, destacando-se o seu comportamento não-linear:

$$\theta_t = D(\theta) \theta_{zz} + [D_z(\theta) - K(\theta)] \theta_z \quad (2.35)$$

2.3.1 Aplicações da equação de Richards

A equação de Richards é usada para calcular a infiltração de um fluido no solo. Alguns aplicativos, de acordo com Farthing & Ogden (2017), são os seguintes

- Contaminação do solo por derramamentos de óleo;
- Melhoria da produção agrícola;
- Estudos hidráulicos de trincheiras de infiltração de águas pluviais;
- Melhoria de solos contaminados;

- Controle processo da infiltração e evaporação da água do solo;
- Controle crescimento e de biomassa individual;
- Estudo consumo de água em animais com pele capilar;
- Estudo em fenômenos de electromagnocapilar.

3. DESCRIÇÃO DA DINÂMICA NÃO-LINEAR DE INFILTRAÇÃO DE ÁGUA NO SOLO

Neste capítulo será desenvolvido o comportamento da não linearidade do modelo mediante equações diferenciais parciais (EDPs) e simulações, ou seja, mudanças dos parâmetros da dinâmica não-linear de infiltração de água no solo.

3.1. Equações diferenciais parciais não-lineares

Tabela 1 - Família de equações diferenciais parciais não-lineares.

Equações	Área de aplicação	EDPs não-lineares
Equações de Föppl-von (FOPPL, 1909)	Mecânica sólida	$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right) = P$
Equações campo Einstein (EINSTEIN, 1916)	Relatividade geral	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$
Equação de Richards (RICHARDS, 1931)	Fluxo meios porosos	$\theta_t = [K(\theta) (\psi_z + 1)]_z$
Equação Bateman-Burgers (BURGERS, 1948)	Mecânica dos fluidos	$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$
Equação Boltzmann (ARKERYD, 1972)	Mecânica estatística	$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \cdot \nabla f_i + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} \right)$
Equação de Schrödinger (HEFTER, 1985)	Superfluidos, quântica	$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$
Equação de Liouville (LIOUVILLE, 1990)	Combustão, astrofísica	$\nabla^2 \psi + \lambda e^\psi = 0$
Momento de Cauchy (ACHESON, 1990)	Transporte de impulso	$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f}$
Euler (RICHESON, 2019)	Fluidos não viscosos	$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{f}$
Meio poroso (ZIMMERMAN, 2002)	Difusão	$u_t = \Delta(u^\gamma)$
Equação Fokker-Planck (RISKEN & FRANK, 2012)	Difusão Browniano	$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (x p(x,t)) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$

Fonte: Organização do autor, 2021.

Nas últimas décadas este tema tem sido estudado extensivamente, com respeito aos modelos de EDPs não-lineares, de acordo a Tabela 1. Bem como, novos métodos foram desenvolvidos para encontrar a solução, que formam uma família de métodos como: separação variável comum, separação variável parcial, separação variável generalizada, separação variável funcional etc. (DÍAZ & LIONS, 1985; RAISSI, 2018). EDPs descrevem muitos sistemas físicos diferentes que são difíceis de estudar, quase não há técnicas gerais que funcionem para todas essas equações e geralmente, cada equação individual deve ser estudada como um problema separado.

3.1.1 Tipos comuns de equações diferenciais parciais

As equações diferenciais parciais elípticas, parabólicas e hiperbólicas de ordem dois têm sido amplamente estudadas, de acordo a Tabela 2 (DRÁBEK & HOLUBOVÁ, 2014), onde x, y, z são coordenadas, t é o tempo e a é uma função não-linear. Muitos diferentes problemas físicos podem ser representados por tais equações.

Tabela 2 - Tipos de Equações Diferenciais Parciais.

EDPs elípticas	EDPs parabólicas	EDPs hiperbólicas
Descrever estados de equilíbrio, não depende de tempo	Condutividade térmica, difusão	Fenômenos oscilatórios, vibrações
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial t} = a. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

Fonte: Autor, 2021.

Equações diferenciais parciais elípticas: As equações elípticas são adequadas para descrever estados de equilíbrio, por exemplo podemos obter a equação de Liouville (LIOUVILLE, 1990) que é equação de Poisson não-linear. Hilbert assume que a equação aparece como equação elíptica (HILBERT, 1900). Esta equação também descreve a carga espacial de eletricidade em torno de um fio brilhante e descreve a nebulosa planetária.

Equações diferenciais parciais parabólicas: As EDPs parabólicas são usadas neste trabalho para descrever uma ampla variedade de fenômenos dependentes

do tempo (PREVIATO, 2004), por exemplo a equação de Fisher e a equação de Richards (RICHARDS, 1931) aparece em muitos artigos na literatura ambiental porque descreve o fluxo de água.

Equações diferenciais parciais hiperbólicas: A equação hiperbólica do modelo é a equação de diferentes ondas, por exemplo as equações de águas rasas (águas baixas ou pouco profundas) na forma unidirecional, também são chamadas de equações de Saint-Venant (ROZHDESTVENSKY & SIMAKIN, 1984).

3.2 Não-linearidade na dinâmica da propagação de água no solo

Nesta seção veremos sobre a consequência da condutividade hidráulica e difusividade hidráulica a respeito da coluna de água do potencial mátrico $K(\Psi)$ ou ao conteúdo da água no solo $K(\theta)$, que é uma equação em derivadas parciais não-linear de Richards (1931), e Hillel (1998). Na equação de Richards em forma mista existem duas variáveis de estado (Ψ , θ) na seguinte forma tridimensional,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = C(\Psi(\theta)) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial t} = -\nabla \cdot q \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = +\frac{\partial}{\partial x} \left[K(\Psi(\theta)) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(\Psi(\theta)) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\Psi(\theta)) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial z} + K(\Psi(\theta)) \right] \quad (3.2)$$

usando a regra da cadeia e fazendo algumas simplificações matemáticas (PINEDA FRIAS, 2018), na qual $\theta \in [0, 1)$ é o conteúdo de umidade no solo (m^3/m^3), $\partial \theta / \partial t$ é a sua taxa de variação em relação ao tempo e ∇ é o divergente do movimento da água. A partir da equação (3.2) obtém-se equação de Richards:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\Psi(\theta)) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(\Psi(\theta)) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\Psi(\theta)) \left(\frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (3.3)$$

Uma vez que a difusividade hidráulica do conteúdo pode ser representada na forma

$$D(\theta) = K(\Psi(\theta)) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta} \quad (3.4)$$

a nova equação geral de Richards depende apenas da umidade (HILLEL, 1998; PINEDA FRIAS, 2018, eq. (2.1)) resulta,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial \theta}{\partial z} - K \right] \quad (3.5)$$

3.3. Métodos de condutividade e difusividade hidráulica

Existem várias equações empíricas que foram propostas para a relação de condutividade da umidade de acordo a Gardner (1960), e Hillel (1998), eq. (8.1a-8.1c):

$$K(\Psi) = a/\Psi^n \quad (3.6)$$

$$K(\Psi) = a/(b + \Psi)^n \quad (3.7)$$

$$K(\Psi) = K_s/(\Psi/\Psi_c)^n \quad (3.8)$$

$$K(\theta) = a\theta^n \quad (3.9)$$

$$K(\theta) = K_s(\theta/f)^n \quad (3.10)$$

onde K é a condutividade hidráulica em qualquer grau de saturação, K_s é a condutividade saturada do mesmo solo, a , b e n são constantes empíricas (diferentes em cada equação). Ψ é a cabeça de potencial matricial, θ é a umidade volumétrica, s é o grau de saturação, Ψ_c é a altura do potencial em qual $K = K_s/2$. Observe que f é a porosidade. Depois encontramos o modelo de (Van Genuchten, 1980, eq. (2-3)), que descreve aqui como uma função do conteúdo de água adimensional Θ :

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[\frac{1}{1 + (\alpha h)^p} \right]^m \quad (3.11)$$

no qual $\theta_r \in R^+$ é a umidade residual (m^3/m^3), $\theta_s \in R^+$ é a umidade de saturação (m^3/m^3), $p \in R^+$ é um parâmetro que depende do meio, $m \in R^+$ descreve a

retenção de água no solo e $h \in R$ é a cabeça de água. Deve-se notar que $0 \leq \theta_r \leq \theta \leq \theta_s < 1$. Por outro lado, θ pode ser expresso em função de Θ como

$$\theta = \Theta(\theta_s - \theta_r) + \theta_r \quad (3.12)$$

3.3.1 Método de Van Genuchten

Onde a expressão da difusividade hidráulica (Van Genuchten, 1980, eq. (20)),

$$D(\Theta) = \frac{(1-m) K_s}{2 \alpha m (\theta_s - \theta_r)} \Theta^{\frac{3-\frac{1}{m}}{2}} \times \left[\left(1 - \Theta^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{-(m+1)}{2}} - \left(1 - \Theta^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{(m-1)}{2}} \right] \quad (3.13)$$

e para condutividade hidráulica (Gardner, 1960):

$$K(\Theta) = K_s K_r = K_s \Theta^2 \left[1 - \left(1 - \Theta^{\frac{1}{m}}\right)^m \right],$$

$$m = 1 - \frac{2}{p}, \quad 0 < m < 1, \quad p > 2. \quad (3.14)$$

3.3.2 Método de Brooks e Corey

O modelo de (Brooks & Corey, 1964) considera a permeabilidades do ar e de líquido em função da saturação, a pressão capilar é prevista, a condutividade e difusividade hidráulicas relativa são determinadas experimentalmente. (CAMPBELL, 1985; VAN GENUCHTEN, 1980, Eq. (34.a-35)):

$$K_r(\Theta) = \Theta^{3+\frac{2}{\lambda}} \quad D(\Theta) = \frac{K_s}{a\lambda(\theta_s - \theta_r)} [\Theta]^{2+\frac{1}{\lambda}} \quad (3.15)$$

onde λ é índice de distribuição do tamanho dos poros, K_s a condutividade hidráulica de saturação, o λ flutua entre 0,2 (tamanho de grão uniforme) y em 3,0 (tamanho de grão heterogêneo). Sendo $\lambda = 2$ um valor de referência intermediário, o parâmetro a , além disso, está inversamente relacionado à pressão de borbulhamento.

3.3.3 Método de Hayek

A equação de Richards (2.35) pode ser escrita em termos do conteúdo de

água adimensional (HAYEK, 2016, eq. (10)),

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\Theta)}{\partial z} \quad (3.16)$$

Neste trabalho será utilizada a condutividade e difusividade hidráulica proposta por (HAYEK, 2016, eq. (11)),

$$K(\Theta) = \frac{K_s}{\theta_s - \theta_r} \Theta^n \quad D(\Theta) = \frac{nK_s}{a(\theta_s - \theta_r)} \Theta^{n-1} \quad (3.17)$$

válidas para $\Theta \in (0, 1]$, nas quais $a \in R^+$ é o grau de saturação e $n \in R^+$ é um parâmetro relacionado ao tamanho dos poros, K_s é a condutividade hidráulica saturada (m/s).

Recomenda-se usar os experimentos de (Mualem, 1978 e Hayek, 2016) para validação. Mualem (1978), usou dados experimentais de 50 solos, para os quais descobriu que n varia entre 2,5 e 24, tanto para solos granulares (areia ou cascalho), quanto para solos de textura fina (lodo e argila).

Por outro lado, Hayek (2016), desenvolveu uma solução exata para a equação de Richards unidimensional (2.35), que é válida para qualquer $n > 1$ e é uma ferramenta eficiente para a predição da difusividade e condutividade hidráulica dos solos.

3.3.4 Solução exata

A solução exata do conteúdo de água no plano z e t com $\theta_r < \theta_* < \theta_s$,

$$\theta(z, t) = \begin{cases} \theta_r + (\theta_* - \theta_r) \left[1 - \exp \frac{a(n-1)(z-z_f(t))}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}}, & z < z_f(t) \\ \theta_r & z \geq z_f(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

onde $z_f(t)$ é a profundidade de umidificação no tempo t , ao já atingir assintoticamente seu valor máximo θ_* ao longo do tempo, seja por aspersão ou gotejamento.

3.4 Condições de contorno

No campo das equações diferenciais, um problema de valor de contorno é uma equação diferencial junto com um conjunto de restrições adicionais, chamadas de condições de contorno.

Análises do domínio: Para a equação de Richards, trabalhamos em particular com o eixo z vertical, ou seja, o movimento descendente da água. Para em seguida, incentivamos o domínio (Johnson, 2009).

Definiu-se $\Omega = (a, b)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, como um conjunto aberto, nesse caso, este é um intervalo aberto;

- Seja $\Gamma = \partial\Omega$ o contorno de Ω , isto é, $\Gamma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \Gamma_D \cup N$ onde $\Gamma_D = \{a\}$ e $\Gamma_N = \{b\}$ são conjuntos desarticulados de forma que $\Gamma_D \cap N = \varnothing$ consiste em um conjunto relacionadas às condições de contorno de Dirichlet e Neumann respectivamente (ZIENKIEWICZ, TAYLOR, TAYLOR, & TAYLOR, 2000).

Condição Dirichlet: Dirichlet (1860), fez uma contribuição, no problema de Dirichlet o problema é encontrar uma função que resolva uma equação diferencial parcial especificada (EDP) no interior de uma determinada região ou um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}_n$. As condições de contorno de Dirichlet assumem a forma (CHENG & CHENG, 2005)).

$$\theta(x, t) = f(x, t) \quad \forall x, t \in \partial\Omega, \quad (3.19)$$

Na qual, $f(x, t)$ é uma função conhecida definida no espaço $\partial\Omega$. As condições de contorno de Dirichlet especificam o valor da função em uma superfície (Arfken, 1985), por exemplo valor do conteúdo da água no solo, valor de temperatura em um transporte de calor.

Condição Neumann: Neumann (1865), contribuiu em diferentes campos e define para uma equação diferencial em derivadas parciais sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) = g(x, t) \quad \forall x, t \in \partial \Omega \quad (3.20)$$

na qual, \mathbf{n} é a normal do contorno no espaço $\partial \Omega$ e $g(x, t)$ é uma função escalar. A derivada normal $\frac{\partial}{\partial n}$ é definida como (CHENG & CHENG, 2005):

$$\frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) = \nabla \theta(x, t) \cdot \mathbf{n}(x, t) \quad (3.21)$$

na qual ∇ é o gradiente (vetor) o produto interno com o vetor normal unitário \mathbf{n} , por exemplo, um valor da densidade de fluxo de água na superfície do solo enquanto no transporte de calor o gradiente de temperatura é prescrito.

Condição de Robin: Victor Gustave Robin (1855-1897) trouxe a especificação de uma combinação linear dos valores de uma função e os valores de sua derivada no limite do domínio (GUSTAFSON & ABE, 1998a). As condições de contorno de Robin também são chamadas de condições de contorno de impedância, por sua aplicação em problemas eletromagnéticos, ou condições de contorno convectivas, e por sua aplicação em problemas de transferência de calor. Se Ω é o domínio no qual a equação dada deve ser resolvida e $\partial \Omega$ denota seu limite, a condição de contorno de Robin é (AKIN, 2005),

$$a\theta + b\frac{\partial \theta}{\partial n} = g \quad (3.22)$$

a e b podem ser funções dadas ou constantes (GUSTAFSON & ABE, 1998b).

3.5. Condições de contorno para problemas de irrigação

Nesta seção, são apresentadas as condições de contorno para problemas de irrigação, em qualquer caso particular. Aqui, vamos discutir condições que são normalmente encontradas ao modelar o sistema em um solo não saturado (BEAR, 2013). Na classificação fundamental nesta dissertação distingue-se a usar dois tipos de condições de contorno.

Condições de contorno de Dirichlet em irrigação: Tal situação é definida como condições de empoçamento na superfície, ou seja, quando existe a presença de uma carga hidráulica na superfície do solo com um valor do conteúdo da água no solo com unidade no SI (m^3) (ARRAES, 2014).

$$\theta(0, t) = \theta_0(t), \quad z = 0, t \geq 0 \quad (3.23)$$

A condição de contorno especificada pela (3.23) e empregada quando é utilizada a equação de Richards na forma de difusividade.

Condições de contorno de Robbin em irrigação: Para implementar esta condição, considere o caso do fluxo de solos não saturados a partir de (RICHARDS, 1931, eq. (12); POP, 2002, eq. (1.1)),

$$q(z, t) = -K(\theta(z, t))\nabla[\Psi(\theta(z, t)) + \varphi(z)], \quad \varphi(z) = gz \quad (3.24)$$

na qual a força da gravidade $F = -\nabla\varphi = -g$ é representada pelo gradiente negativo do potencial, $\varphi, z \in R^+$ é a profundidade de interesse e g é a aceleração da gravidade, por outro lado no caso do fluxo unidimensional vertical tem-se,

$$q = -K(\theta)\frac{\partial}{\partial z}[\Psi(\theta) - z] \quad (3.25)$$

com q m/s como densidade do fluxo na direção z , aplique-se a derivada parcial a $\Psi(\theta)$ e z em (3.25), dessa forma,

$$q = -K(\theta)\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial z} + K(\theta) \quad (3.26)$$

Aplicando-se a regra da cadeia em (3.26), resulta

$$q = -K(\theta)\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} + K(\theta) \quad (3.27)$$

Substituindo-se a equação da difusividade (2.32) em (3.27),

$$K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} = q \quad (3.28)$$

Tais condições estão sustentadas pelas fontes bibliográficas (FENGNAN & ZHAO, 2020, eq. (1.6); BROADBRIDGE & WHITE, 1988, eq. (2)). Uma vez que, na distribuição de irrigação presume-se que a aspersão de água é distribuída uniformemente sobre toda a superfície do solo, esta situação é conhecida como a condição de contorno de Robbin definido em (3.20) (BEAR, 2013; SIERRA, DÍAZ, & GONZÁLEZ, 2006, eq. (6.2)). Em consequência, o controle da umidade do solo é realizado pela aspersão de água em sua superfície, dado pelo fluxo $u \in R^+$. Nesta também há perturbações ambientais, tais como chuva e evaporação de água, que resultam no fluxo $d_0 \in R$. A resultante desses fluxos de umidade é a densidade de fluxo de água na superfície do solo (m/s):

$$q(0, t) = u(t) + d_0(t) \quad (3.29)$$

Neste caso, Robbin na superfície do solo, que pode ser escrita como

$$K(\theta(0, t)) - D(\theta(0, t)) \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = q(0, t) \quad (3.30)$$

3.6. Simulação da propagação de água no solo

Parâmetros de solo real: A solução exata (3.18) é definida sobre o domínio infinito. Esta seção mostra como essa solução pode ser usada para modelar infiltração em solos semi-infinitos, Tabela 3. A infiltração ocorre quando a superfície do solo é umedecida devido a vários processos, irrigação por aspersão ou chuva, a infiltração se aplica a uma espessura finita do solo.

Tabela 3 - Propriedades hidráulicas de solos.

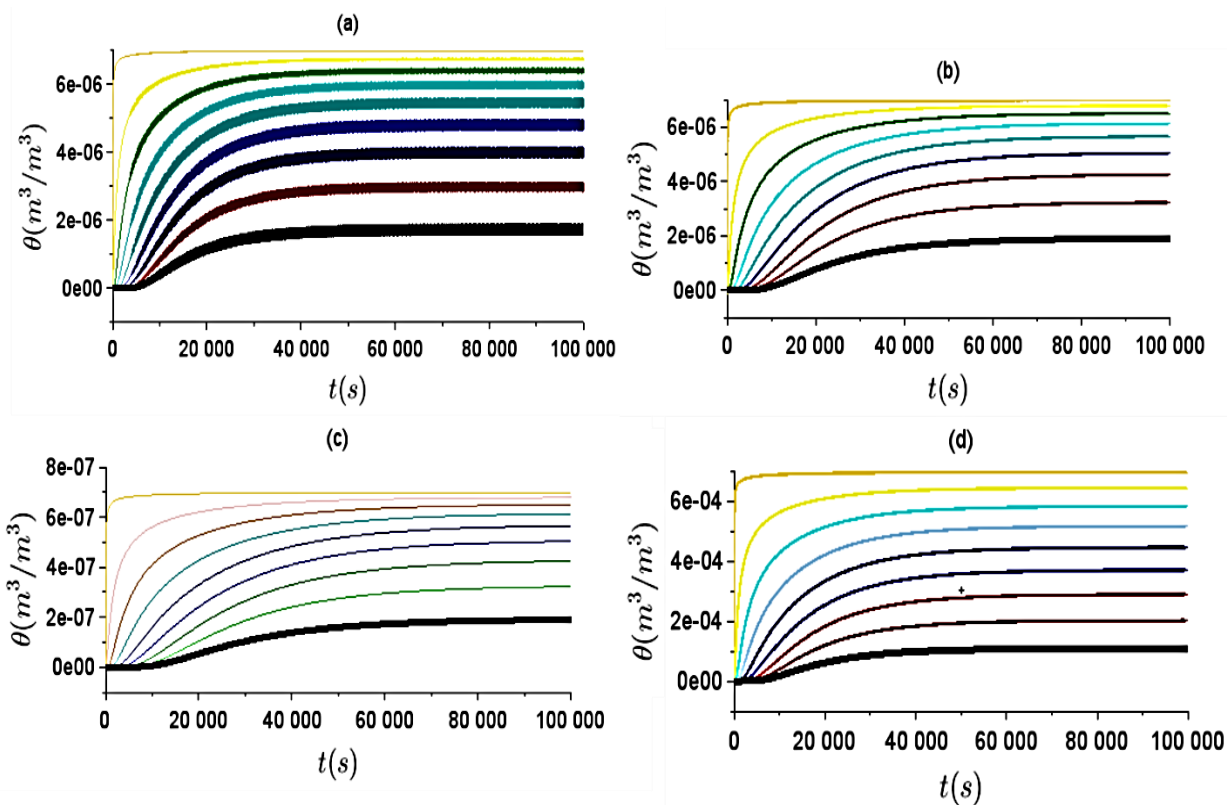
Solo	$\theta_s \left(\frac{m^3}{m^3} \right)$	$\theta_r \left(\frac{m^3}{m^3} \right)$	$K_s \left(\frac{m}{t} \right)$	$\alpha \left(\frac{1}{m} \right)$	n
Barro de Paraná	0,520	0,218	0,009	11,5	2,03
Areia	0.417	0,02	0,0000583	13.8	1,5-2,5
Areia argilosa	0,401	0,031	0,0000169	11,5	1,47
Franco-argiloso	0,41	0,095	0,000010	1,9	1,31
Franco-arenoso	0,39	0,100	0,0000033	5,9	1.48

Fonte: Organizado pelo autor a partir de Carsel & Parrish (1988), Van Genuchten (1980) e Hayek (2016).

3.6.1 Simulação para dinâmica linear

Para visualização de uma simulação de dinâmica linear apresenta-se na Figura 11, a evolução do movimento de água com diferentes entradas de vazão.

Figura 11 - Evolução de movimento de água no solo com entradas de: a).vazão= 7×10^{-6} m/s b).vazão= 7×10^{-6} m/s c).vazão= 7×10^{-7} m/s d).vazão= 7×10^{-4} m/s. Cada traço colorido representa o conteúdo de água numa camada; os traços mais grossos representam profundidade e os mais finos a superfície.



Fonte: Autor, 2021

Na Figura 11(a) apresenta-se o gráfico da dinâmica linear a uma profundidade de $L = 0,10m$ por camadas com vazão de entrada $7 \times 10^{-6} m/s$ e difusividade hidráulica constante $D = 8,6 \times 10^{-6} m^2/s$ e condutividade hidráulica constante $K_0 = 16,9 \times 10^{-6} m/s$. Observando-se que o conteúdo da água no solo vai aumentando ao passar o tempo.

No momento (b) da Figura 11 é possível observar o gráfico da dinâmica linear a uma profundidade de $L = 0,10m$ por camadas com vazão de entrada $7 \times 10^{-6} m/s$ e difusividade hidráulica constante $D = 5,46 \times 10^{-6} m^2/s$ e condutividade hidráulica constante $K_0 = 12,9 \times 10^{-6} m/s$. Comparando essa simulação com a mostrada na no item (a) anteriormente, percebemos que as ondas de água são mais suaves, mas não apresenta muita variação na infiltração de água.

No item (c) da Figura 11 mostra-se o gráfico da dinâmica linear a uma

profundidade de $L = 0,10$ m, por camadas com vazão de entrada $7 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ e difusividade hidráulica constante $D = 5,46 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ e condutividade hidráulica constante $K_0 = 12,9 \times 10^{-6} \text{ m/s}$. Comparando essa simulação com a mostrada na Figura 11(a) e (b) as ondas de água só variam proporcionalmente na entrada do fluxo. Já a Figura 11(d) visualizamos o gráfico da dinâmica linear a uma profundidade de $L = 0,10\text{m}$ por camadas com vazão de entrada 7×10^{-4} e difusividade hidráulica constante $D = 7,46 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ e condutividade hidráulica constante $K_0 = 4,69 \times 10^{-6} \text{ m/s}$.

Comparando essa simulação com as anteriores percebe-se que a infiltração sempre demonstra o mesmo comportamento, devido a sua linearidade, e é importante observar que para qualquer solo a ser estudado é mais simples obter sua estabilidade.

3.6.1 Simulação para dinâmica não-linear

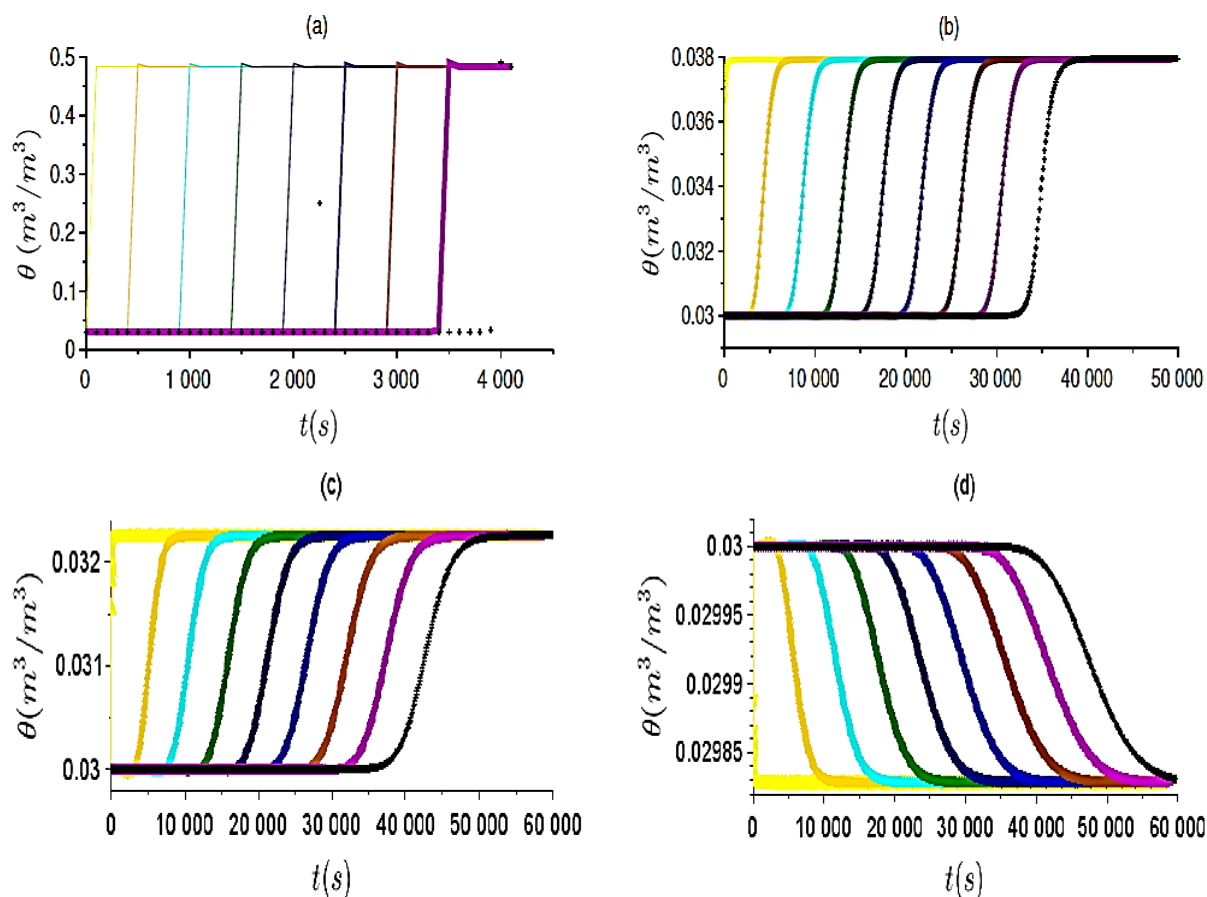
A Figura 12 mostra a simulação exata da onda viajante obtida pela equação (3.16) para valores do expoente n . Observa-se para diferentes solos o tamanho de poros, Tabela 4.

Tabela 4 - Tamanhos e funções dos poros do solo.

Tamanho dos poros (mm)	Descrição dos poros	Funções dos poros
$\leq 0,0002$	Residual	Retém água que as plantas não podem usar
0,0002-0,1	Armazenar	Retenha a água que as plantas podem usar
$\geq 0,05$	Transmissão	Permite que a água escoe e o ar entre
$\geq 0,1$	Enraizando	Raízes das plantas penetrem livremente
0,5-3,5	Canal de vermes	Permita que a água escorra e o ar entre
2-50	Canais de formigas	Permita que a água escorra e o ar entre

Fonte: Adaptado de Hamblin (1986).

Figura 12 - Simulações das evoluções dos conteúdos de água em diversas camadas do solo. Cada traço colorido representa o conteúdo de água numa camada, afastadas entre si de 0; 1m com profundidade total 1 m.



Fonte: Autor, 2021.

A Figura 12 apresenta a simulação da equação de Richards para ilustrar seu comportamento dinâmico não-linear. Foram utilizados os parâmetros de um solo real na Tabela 3. Cada traço colorido representa o conteúdo de água numa camada, afastadas entre si de 0, 1m com profundidade total 1m.

Nessa profundidade foi imposta a condição de contorno Dirichlet para o conteúdo da água $\theta(1, t) = 0,03 \text{ m}^3/\text{m}^3$, $\forall t \geq 0 \text{ s}$, que é igual à condição inicial $\theta(z, 0) = 0,03 \text{ m}^3/\text{m}^3$, $\forall z \in (0, 1) \text{ m}$. Foram realizadas duas simulações com condições de contorno tipo Neumann (3.30) e vazões de água distintas na superfície do solo: $q(0, t) \equiv 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ na Figura 12(a) e $q(0, t) \equiv 1,4 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ na Figura 12(b)

Observa-se que a água demora a se propagar aproximadamente $5 \times 10^2 \text{ s}$

na Figura 12(a) e 3×10^3 s na Figura 12(b) entre cada camada. Isso indica que a propagação depende da vazão de água devido às não linearidades dos coeficientes (3.17) da equação de Richards. Nota-se ainda que o atraso dessa infiltração é reduzido e o valor da umidade em regime permanente é aumentado quando a vazão de água é maior. O que parece coerente com o comportamento físico esperado. Nas presentes simulações usou-se o tamanho do poro distribuído no solo $n = 2$ para areia. Por conseguinte, $D(\theta) = 2,1 \times 10^{-5} \theta m^2/s$ e $K(\theta) = 1,4 \times 10^{-4} \theta^2 m/s$, que são obtidos de (3.17) com os parâmetros na Tabela 3

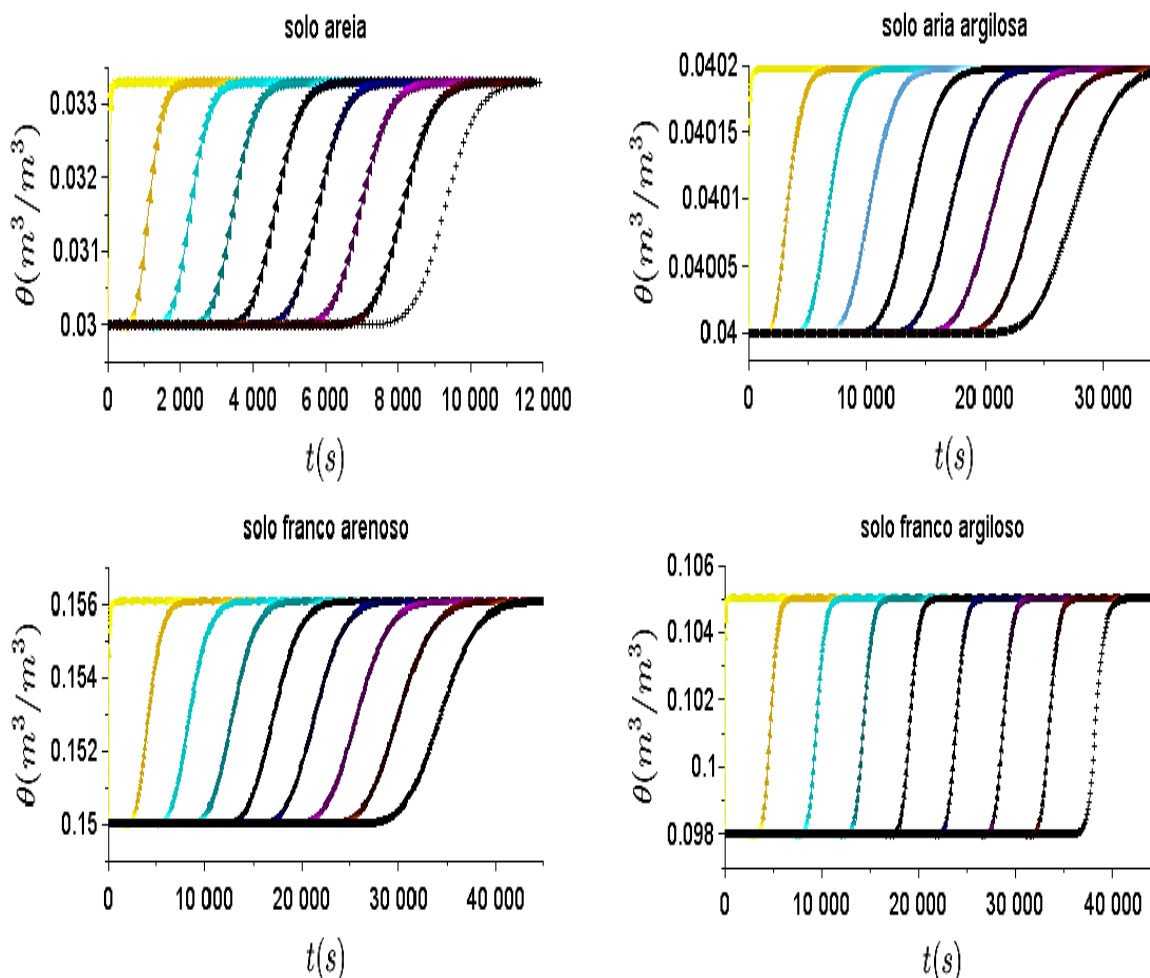
Na Figura 12(c) em comparação com a Figura 12(a) e (b) observa-se que a água demora a se propagar aproximadamente 5×10^3 s na Figura 12 entre cada camada, sujeitas as condições de tipo Neumann (3.30). Isso indica que a propagação depende de vazões de água distintas na superfície do solo: $q(\theta, t) \equiv 1,4 \times 10^{-7} m/s$ na Figura 12(c) mais alta a diferença das simulações em Figura 12(a) e Figura 12(b).

Em comparação com os itens (a), (b) e (c) anteriores na Figura 12(d) observa-se que a água demora a se propagar aproximadamente 7×10^3 s e apresenta um fenômeno de mudança brusca devido a entrada de vazão de água muito pequena e possível convergindo ao conteúdo de água residual. Isso indica que a propagação depende da vazão de água é $q(\theta, t) \equiv 9 \times 10^{-8} m/s$. Nota-se ainda que o atraso dessa infiltração é reduzido e o valor da umidade em regime permanente é aumentado quando a vazão de água é maior em relação as simulações (a), (b) e (c).

6.6.2 Simulação da dinâmica não-linear para diferentes tipos de solo

Na simulação da dinâmica não-linear para diferentes tipos de solo, Figura 13, utilizou-se para o solo areia parâmetros de tipos de solo real visto na Tabela 3 e Tabela 4 para solo areia, especificamente sujeitas as condições de contorno Neumann (3.30). Observou-se que a água demora em umedecer o solo um tempo $t = 7 \times 10^2$ s aproximadamente por camadas, isso indica que a propagação depende dos parâmetros de difusividade e condutividade (3.17) são: $D(\theta) = 2,1 \times 10^{-5} \theta^1 m^2/s$ e $K(\theta) = 1,4 \times 10^{-4} \theta^2 m/s$ respectivamente.

Figura 13 - Simulações das evoluções dos conteúdos de água em diversas camadas do solo com espessuras de 0,1m para densidade de fluxo de 2×10^{-7} m/s. Cada traço colorido representa o conteúdo de água numa camada, afastadas entre si de 0; 1m com profundidade total 1 m.



Fonte: Autor, 2021.

Para o solo areia argilosa utilizou-se parâmetros de tipos de solo real visto na Tabela 3 e Tabela 4 (solo areia argilosa), especificamente sujeitas as condições de contorno (3.23) e (3.28). Observou-se que a água demora em umedecer o solo um tempo $t = 3 \times 10^2$ s aproximadamente por camadas, isso indica que a propagação depende dos parâmetros de difusividade e condutividade hidráulica (3.17): $D(\theta) = 2,1 \times 10^{-5} \theta^{0.47} \text{ m}^2/\text{s}$ e $K(\theta) = 1,4 \times 10^{-4} \theta^{1.47} \text{ m/s}$ respectivamente.

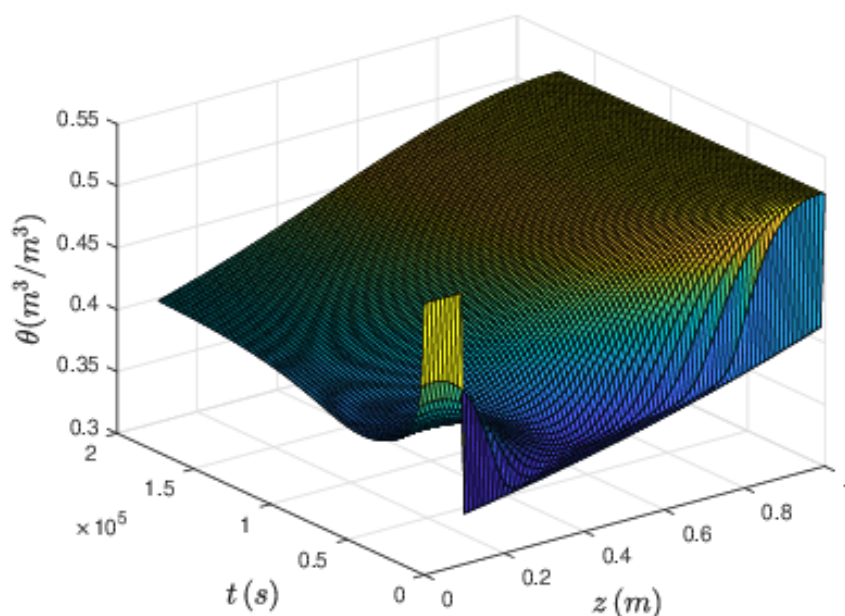
Logo, para o solo franco arenoso utilizou-se parâmetros de tipos de solo real visto na Tabela 3 e Tabela 4 (solo franco argiloso), especificamente sujeitas as condições de contorno (3.23) e (3.28). Observou-se que a água demora em

umedecer o solo um tempo $t = 3 \times 10^2$ s aproximadamente por camadas, isso indica que a propagação depende dos parâmetros de difusividade e condutividade hidráulica $D(\theta) = 2,1 \times 10^{-5} \theta^{0,48} \text{ m}^2/\text{s}$ e $K(\theta) = 1,4 \times 10^{-4} \theta^{1,48} \text{ m/s}$ respectivamente.

Na sequência, para o solo franco argiloso utilizou-se parâmetros de tipos de solo real visto na Tabela 3 e Tabela 4 (solo franco argiloso), especificamente sujeitas as condições de contorno (3.23) e (3.28). Observou-se que água demora em umedecer um tempo $t = 4 \times 10^2$ s aproximadamente por camadas, isso indica que a propagação depende da vazão de água $q = 2 \times 10^{-7} \text{ m/s}$. Por conseguinte, as equações (3.17) possuem valores de difusividade e condutividade hidráulica $D(\theta) = 2,1 \times 10^{-5} \theta^{0,31} \text{ m}^2/\text{s}$ e $K(\theta) = 1,4 \times 10^{-4} \theta^{1,31} \text{ m/S}$ respectivamente.

Já a simulação do sistema em uma profundidade total de $L = 1\text{m}$ com entradas diferentes que o anterior e parâmetros de modelo (Van Genuchten, 1980), para solo Guelph Loam apresenta-se na Figura 14.

Figura 14 - Dinâmica não-linear da propagação de água no solo, em formato tridimensional.



Fonte: Autor, 2021.

Neste caso pode-se observar um pico instável nos primeiros $t = 0,5 \times 10^4$ s, sendo este um comportamento não-linear do sistema. Este fenômeno acontece

quando o número total de nós internos é baixo ou o fluxo é significativamente grande, pode-se apresentar fenômenos de absorção⁵ por apresentar porosidade no solo, no caso tridimensional da Figura 14.

3.7. Comparação e validação de resultados com outras fontes

A presente pesquisa foi elaborada de forma meticulosa e orientada com diferentes fontes e trabalhos. Foi realizado um breve resumo geral que demonstra os diferentes resultados de simulação relacionadas à nossa pesquisa.

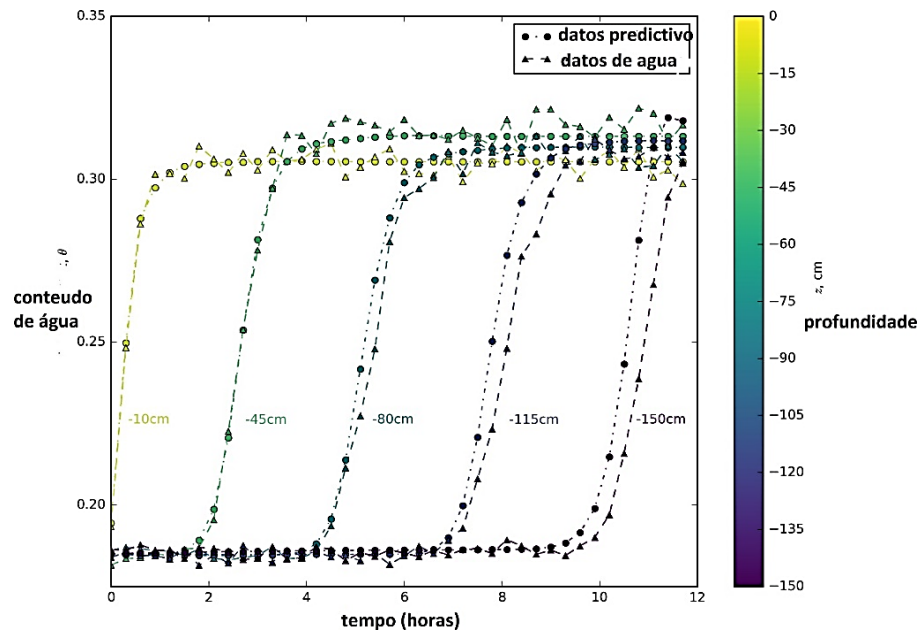
Cockett, Heagy, & Haber (2017) usaram os dados da quantidade de água observados para uma única curva de filtração, traçando através da profundidade, como mostra na Figura 15, codificada por cores. As medições rasas são as primeiras a aumentar a quantidade de água ao longo do curso do experimento de infiltração de água no solo. No estudo parametrizam esses tipos de solo usando o modelo empírico de van Genuchten que mostra os dados previstos sobrepostos aos dados reais para pontos de medição de quantidade de água ao longo do tempo. Esses dados são do centro do domínio do modelo e são codificados por cores por profundidade para agirem como areia, em vez de areia argilosa, levando ao resultado visto na Figura 15.

Resultado de Liu Fengnan: Na pesquisa de Fengnan *et al.*, 2020 obtém-se resultado com significado realista na forma tridimensional. A equação de Richards é um modelo unidimensional para a infiltração de água em um meio poroso sobre a influência da gravidade, como mostra a Figura 16, equivalente a Figura 14.

A equação de Richards demonstra-se útil para esse propósito por descrever o desenvolvimento do tempo de regiões subterrâneas onde o solo está saturado de água. O efeito da chuva é levado em consideração na forma das condições iniciais e de contorno.

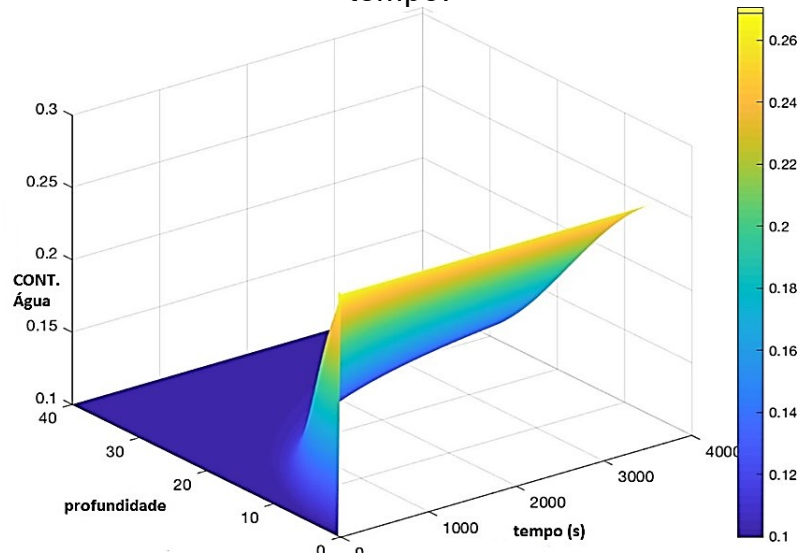
⁵ Definida aqui como a relação entre umidade do solo e quantidade de água existente. A quantidade de água não se limita apenas a umidade do solo, a umidade pode ter outras características também. A quantidade de água geralmente é usada apenas no contexto da umidade do solo, mas para outros usos há o teor de umidade, por exemplo. Essa proposta de fusão é para o contexto da definição da ciência do solo

Figura 15 - Dados observados e previstos para cinco locais de medição em profundidades de 10cm a 150cm do centro do domínio do modelo.



Fonte: Extraído de Cockett *et al.*, 2017.

Figura 16 - Tendência de variação do conteúdo de água em profundidade e tempo.



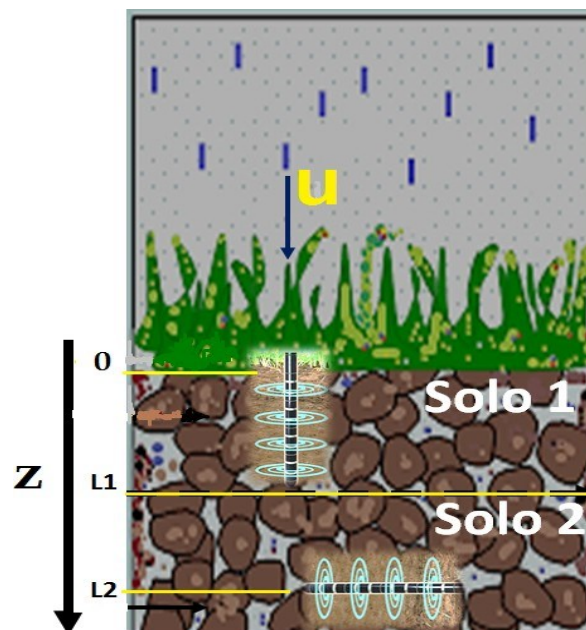
Fonte: Extraído de Fengnan *et al.*, 2020.

4. CONTROLE POR MODO DESLIZANTE DA MÉDIA DO CONTEÚDO DE ÁGUA NO SOLO

A chuva ou irrigação por aspersão pode umedecer o solo de forma uniforme, como podemos verificar na Figura 17, utilizando sensores colocados em $L_1 \in \mathbb{R}^+$ e $L_2 \in \mathbb{R}^+$. Neste capítulo a diferença em relação a (MOLINA & CUNHA, 2017) é que aqui considera-se o modelo não-linear para as variáveis K e D .

Neste caso, o problema pode ser reduzido a um PDE unidimensional (3.16), com fluxo de água vertical unidimensional do solo semi-infinito. Isso significa que, em geral, sabemos a profundidade, mas não importa a área do solo, por isso consideramos o solo como semi-infinito.

Figura 17 - Sensores no solo.



Fonte: Autor, 2021.

4.1 Controle de equações diferenciais parciais para irrigação

No geral, um sistema de controle é um sistema dinâmico no qual se pode atuar usando controles adequados. Neste trabalho, o modelo dinâmico é modelado por equações diferenciais parciais (EDPs) do seguinte tipo (J. CORON, 2009)

$$\dot{y} = f(y, u) \quad (4.1)$$

A variável y é o estado e pertence a algum espaço Y . A variável u é o controle e pertence a algum espaço U . Neste trabalho, o espaço Y é de dimensão infinita e a equação diferencial. Por outro lado, se os dois estados dados e o controle são restritos a estar próximos de um equilíbrio, fala-se de controlabilidade local neste equilíbrio. Um equilíbrio do sistema de controle é um ponto $(y_e, u_e) \in Y \times U$ de tal modo que $f(y_e, u_e) = 0$. Se, além disso, o tempo T é pequeno, fala-se de controlabilidade local de pequeno porte. Por tanto, ilustramos a equação de Richards (3.16) em particular,

$$\theta_t(z, t) = D(\theta(z, t))\theta_{zz}(z, t) + D_z(\theta(z, t))\theta_y(z, t) + K_z(\theta(z, t)) \quad (4.2)$$

Onde

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(z, t) = \theta_t(z, t) \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}(z, t) = \theta_z(z, t) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t) = \theta_{xx}(x, t) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}(z, t) = \theta_{zz}(z, t) \quad (4.3)$$

O controle da umidade do solo é realizado pela aspersão de água em sua superfície, dado pelo fluxo $u \in R^+$. Nesta também há perturbações ambientais, tais como chuva e evaporação de água, que resultam no fluxo $d_0 \in R$. A resultante desses fluxos de umidade é a densidade de fluxo de água na superfície do solo (m/s):

$$q(0, t) = u(t) + d_0(t) . \quad (4.4)$$

- $u(t)$ é o sinal de controle, velocidade o fluxo dá água de irrigação (m/s);
- $d_0(t)$ é a perturbação, chuva ou evaporação da água (m/s).

Neste caso, já desenvolvida em (3.28), Hayek (2016), obtém-se a condição de contorno tipo Robin na superfície do solo, que pode ser escrita como uma relação,

$$K(\theta(0, t)) - D(\theta(0, t)) \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(0, t) = u(t) + d(t) \quad (4.5)$$

(4.5) e (4.8) não podem ser necessariamente iguais, isso porque a densidade de fluxo será um resultado da variação de contorno de Robin na superfície.

4.2 Sistemas, estrutura variável e modo deslizante

Em sistemas reais é praticamente impossível o modo deslizante ocorrer em superfícies contínuas, pois todas as funções com controle chaveado tem imperfeições, tais como retardamento, histereses etc. Que fazem com que os deslizamentos ocorram em uma frequência finita e o ponto descritivo oscile em uma certa vizinhança finita da superfície de descontinuidade (UTKIN, 1978).

4.2.1 Regular o conteúdo médio de água no solo

Nesta seção, as equações apresentadas objetivam controlar a umidade média do solo θ próxima da superfície na faixa de profundidade $z \in [0, L_1]$ indicada na Figura 17⁶. Para realizar o controle em malha fechada, o sensor deverá medir a umidade média

$$\bar{\theta}(t) = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \theta(z, t) dz \quad (4.6)$$

Para regulá-la, define-se a superfície de deslizamento $\sigma(t)=0$ estabelecida pelo sinal de erro

$$\sigma(t) = \bar{\theta}_{ref}(t) - \bar{\theta}(t) \quad (4.7)$$

no qual $\bar{\theta}_{ref}$ é a umidade média desejada. A diferença de Nataly (2017), não é considerada integral porque precisamos apenas convergir o conteúdo médio de água para o conteúdo médio de água referencial na superfície do solo.

4.2.2 Lei de controle

O sistema de controle gerencia, comanda, dirige ou regula o comportamento de sistemas usando loops de controle. O controlador deve atuar no sistema descrito pela EDP não-linear (4.2), com a condição de contorno (4.5)

⁶ A medida de $\bar{\theta}(t)$ na equação (4.6) pode ser realizada por sensores de tamanho L_1 , os quais podem ser os apresentados em (SUN & YOUNG, 2001; KIZITO *et al.*, 2008).

por meio do sinal de controle em (4.4). Tal qual Molina & Cunha (2019), escolheram a lei de controle por estrutura variável

$$u(t) = \begin{cases} u^+ & \text{se } \sigma > 0 \\ u^- & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

onde $u^+(t)$ são sinais de modulação de controle possivelmente extremo, como “on” ou frente “forward”, tal como a aspersão de água ligada (EDWARDS, COLET, FRIDMAN, COLET, & FRIDMAN, 2006).

$$u^+ = \bar{d}(t) + \delta \quad (4.9)$$

$u^-(t)$ são sinais de modulação de controle possivelmente extremo, como “desligado” ou “reverso” tal como a aspersão de água desligada,

$$u^- = \underline{d}(t) - \delta \quad (4.10)$$

nas quais, $\delta > 0$ e uma constante arbitraria. O limite superior $\bar{d}(t) \in R$ e o limite inferior $\underline{d}(t) \in R$ são sinais contínuas (MOLINA & CUNHA, 2019, eq. (16)),

$$\underline{d}(t) \leq d(t) \leq \bar{d}(t) \quad \forall_t \geq 0 \quad (4.11)$$

na qual $d(t) \in R$ é o sinal de perturbação a ser rejeitado pelo controlador, ainda não definido e que será calculado mais adiante, vide equação (4.24).

Importante destacar que o **Teorema 4.2.2** enuncia a existência do modo deslizante na superfície $\sigma = 0$ e garante que a umidade média θ convergirá em tempo finito para a referência θ_{ref} , conforme desejado. Este, segundo o teorema 4.1 de Molina & Cunha (2019), se torna válido para uma EDP linear, para o controle da equação de Richards não-linear e corrige condições de contorno equivocadas que não consideraram a condutividade $K(\theta(0, t))$ em (4.5) e $K(\theta(L_1, t))$ em (4.20).

Teorema 4.2.2: Considere a EDP não-linear (4.2), a condição de contorno (4.4)-(4.5), a lei de controle (4.8), (4.9), (4.10), a umidade média (4.6) e o sinal $\sigma(t)$ dado pela equação (4.7). Se a perturbação verifica a desigualdade (4.11),

então a superfície de deslizamento, $\sigma(t) = 0$, e alcançadas em tempo finito, agregadas globalmente.

Prova: Substituindo a equação (4.6) na equação (4.7), a derivada temporal de $\sigma(t)$ é dada por

$$\dot{\sigma} = \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \int_0^{L_1} \theta_t(z, t) dz \quad (4.12)$$

Usando, $\theta_t(z, t)$ que é do modelo de Richards (4.2) na (4.12), então, esta pode ser escrita como

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \int_0^{L_1} \cdot [D(\theta(z, t))\theta_{zz}(z, t) + (D_z(\theta(z, t))\theta_z(z, t) - K'(\theta(z, t))\theta_z(z, t))] dz \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) = & \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} D(\theta(z, t))\theta_{zz}(z, t) dz - \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} D_z(\theta(z, t))\theta_z(z, t) dz \\ & + \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \frac{dK(\theta(z, t))}{d\theta} \theta_z(z, t) dz. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aplicando a integração por partes para EDPs fundamentada por (KRSTIC & SMYSHLYAEV, 2008b)

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = D(\theta(z, t)) \quad , \quad v = \theta_z(z, t)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) = & \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} \left[D(\theta(z, t))\theta_z(z, t) \Big|_0^{L_1} - \int_0^{L_1} D_z(\theta(z, t))\theta_z(z, t) dz \right] \\ & - \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} D_z(\theta(z, t))\theta_z(z, t) dz + \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \frac{dK(\theta(z, t))}{d\theta} \theta_z(z, t) dz \end{aligned} \quad (4.15)$$

absorve-se que se resume a

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} \left[D(\theta(z, t))\theta_z(z, t) \Big|_0^{L_1} - \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \frac{dK(\theta(z, t))}{d\theta} \theta_z(z, t) dz \right] \quad (4.16)$$

na qual usou-se a propriedade de Hillel (1998) eq. (8.24d) denotada como,

$$K'(\theta(z, t))\theta_z(z, t) = K_z(\theta(z, t)) = \frac{\partial K(\theta(z, t))}{\partial z} \quad (4.17)$$

Resolvendo a integral na equação (4.16) e usando a propriedade (4.17) pode-se obter

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L} [D(\theta(z, t))\theta_z(z, t) - K(\theta(z, t))] \Big|_0^{L_1} \quad (4.18)$$

desenvolvendo a equação (4.18)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) = & \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L} [D(\theta(L, t))\theta_z(L, t) - K(\theta(L, t))] \\ & + \frac{1}{L} [D(\theta(0, t))\theta_z(0, t) - K(\theta(0, t))] , \end{aligned} \quad (4.19)$$

que, utilizando-se as condições de contorno do tipo Robbin (4.5)

$$K(\theta(L_1, t)) - D(\theta(L_1, t)) \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=L_1} = q(L_1, t) \quad (4.20)$$

e então usando a condição (4.20) em (4.4) pode ser reescrita como

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) + \frac{1}{L_1} [q(L_1, t) - q(0, t)] \quad (4.21)$$

Assim sendo, expressa-se a condição de contorno (4.5) em função de sinal de controle em (4.4) e denomina-se a densidade de fluxo de água na profundidade L_1 como a perturbação $d_1(t) := -q(L_1, t)$ para obter

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) = & \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} [u(t) + d_0(t) + d_1(t)] \\ = & \frac{1}{L_1} [d(t) - u(t)] , \end{aligned} \quad (4.23)$$

na qual assume-se que o sinal de perturbação

$$d(t) := L_1 \dot{\bar{\theta}}_{ref}(t) - d_0(t) - d_1(t) \quad (4.24)$$

satisfaça a desigualdade (4.11).

Para garantir que o estado do sistema permaneça no modo deslizante, as seguintes condições de existência devem ser cumpridas (UTKIN, 1978, eq. (1.9)):

$$\lim_{\sigma(t) \rightarrow 0^+} \dot{\sigma}(t) < 0 \quad (4.25)$$

$$\lim_{\sigma(t) \rightarrow 0^-} \dot{\sigma}(t) > 0 \quad (4.26)$$

por definição de convergência monótona e adotada para $\sigma'(t)$, se cumpre

$$M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : 0 < \sigma(t) < \delta \implies |\dot{\sigma}(t)| = \left| \frac{1}{L} [d(t) - u(t)] \right| < M \quad (4.27)$$

seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ aberto, delimitado pelo contorno Γ de Lipschitz. Aplicando-se as equações (4.9) e (4.10) em (4.22), conclui-se que se $\sigma > 0$, então

$$u = u^+ = \bar{d}(t) + \delta \implies \dot{\sigma} \leq -\frac{\delta}{L_1} < 0 \quad (4.28)$$

se $\sigma < 0$, então

$$u = u^- = \underline{d}(t) - \delta \implies \dot{\sigma} \geq \frac{\delta}{L_1} > 0 \quad (4.29)$$

o que garante que as condições de existência do modo deslizante (4.24) e (4.25) sejam verificadas. Conclui-se que, a superfície de deslizamento $\sigma=0$ será atingida em algum tempo finito.

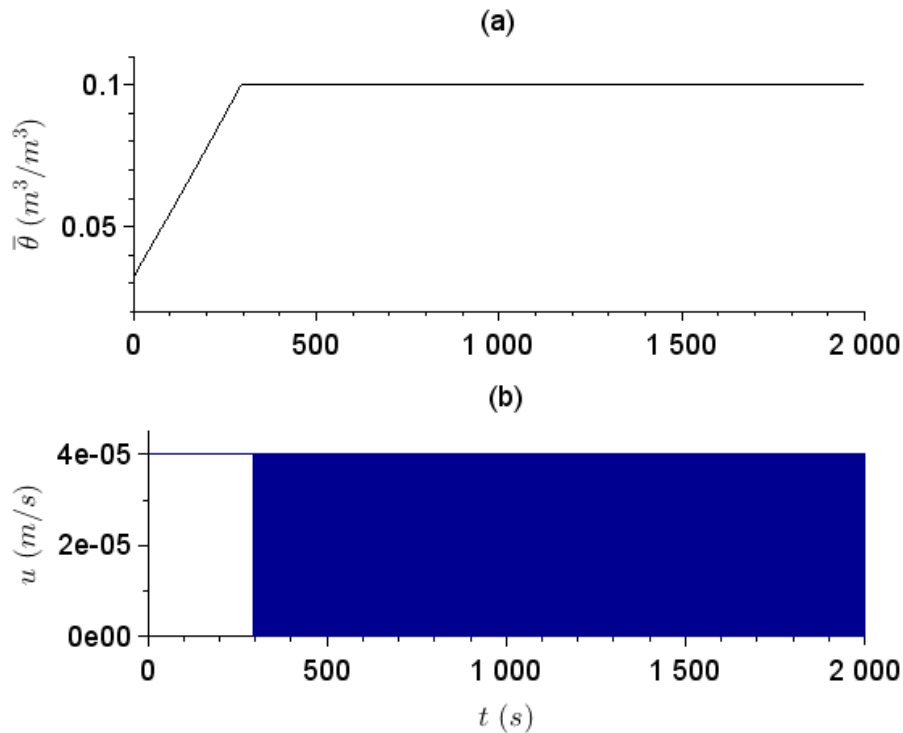
$$t_s \leq \frac{\delta}{L_1} |\sigma(0)| < +\infty \quad (4.30)$$

4.3 Simulação de controlador da média do conteúdo da água no solo

Os resultados da simulação são apresentados na Figura 18 e ilustram a regulação da umidade média numa camada de solo com espessura $L_1=0,1m$.

A Figura 18(a) e Figura 18(b), mostram uma excelente resposta transitória do controle da dinâmica não-linear. Visto que, a referência é $\bar{\theta}_{ref} = 0,4m^3/m^3$ é alcançada em $t \geq 5 \times 10^{+2}s$ sem ultrapassagem, seguindo o teorema 1.

Figura 18 - Controle da média do conteúdo da água $\bar{\theta}_{ref} = 0,1(m^3/m^3)$.



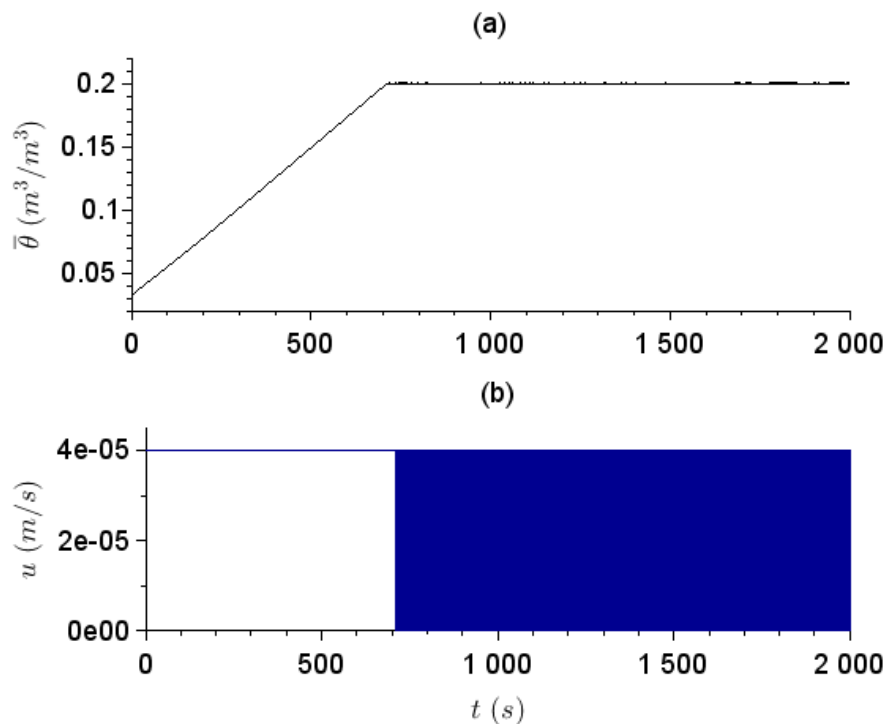
Fonte: Autor, 2021.

Observa-se também que nenhum efeito de perturbação é observado no sinal de saída da Figura 18(a) por causa do regulador de umidade que comuta a densidade do fluxo da água, ligado ($u^+(t)=4 \times 10^{-5}m/s$) ou desligado ($u^-(t)=0m/s$), conforme a lei de controle (4.8). com perturbação considerada $d_0(t)=+2 \times 10^{-7}m/s$, $\sigma(t) < 0$ (4.23), deste modo o controlador inicia funcionamento em $t \geq 7 \times 10^{+2}s$ aproximadamente. A Figura 18(a) indica ainda a ausência de vibrações na umidade média (*chattering*), embora o sinal de controle comute em alta frequência durante a ocorrência do modo deslizante, como é perceptível na Figura 18(b).

Podemos obter uma excelente resposta transitória do controle da dinâmica não-linear, como apresentado nas Figura 19(a) e Figura 19(b) para $L_1=0,1m$. Visto

que, a referência agora é $\bar{\theta}_{ref} = 0,3m^3/m^3$ e é alcançada em $t \geq 5 \times 10^{+2}s$ sem ultrapassagem. É possível perceber que não há nenhum efeito de perturbação igual na Figura 18, no sinal de saída da Figura 19(a), por causa do controlador que regula a média de umidade θ mediante comutação do fluxo da água ligando a $u^+(t)=4 \times 10^{-5} m/s$ e desligando a $u^-(t)=0 m/s$ com perturbação considerada $d\theta(t)=+2 \times 10^{-7}m/s, \sigma(t) < 0$ (4.23).

Figura 19 - Controle da média do conteúdo da água $\bar{\theta}_{ref} = 0,2(m^3/m^3)$.



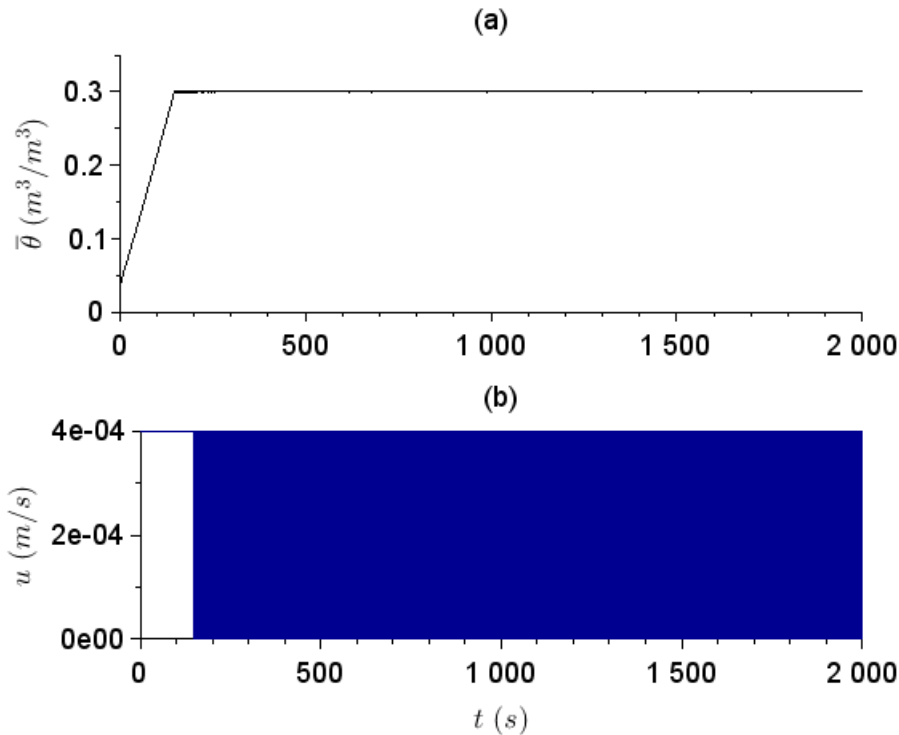
Fonte: Autor, 2021.

Deste modo, o controlador inicia seu funcionamento em $t \geq 5 \times 10^{+2}s$ aproximadamente. A Figura 19(a) em comparação com a Figura 18 indica ainda a ausência de vibrações na umidade média (*chattering*), embora o sinal de controle comute em alta frequência durante a ocorrência do modo deslizante, como é perceptível na Figura 19(b).

Em outra perspectiva a Figura 20(a) e Figura 20(b) para $L_1=0,1m$, mostram uma excelente resposta transitória do controle da dinâmica não-linear. Visto que, a referência $\theta_{ref} = 0,2m^3/m^3$ é alcançada em $t \geq 7 \times 10^2s$ sem ultrapassagem, seguindo o teorema 1. Observa-se também que nenhum efeito de perturbação é observado no sinal de saída da Figura 20(a). Atribui-se esse fato ao controlador

que regula a média de umidade θ mediante comutação do fluxo da água ligando a $u^+(t)=4\times 10^{-4}m/s$ e desligando a $u^-(t)=0m/s$ com perturbação considerada $do(t)=+2\times 10^{-7}m/s$, $\sigma(t) < 0$ (4.23).

Figura 20 – Controle da média do conteúdo da água $\bar{\theta}_{ref} = 0,3(m^3/m^3)$.

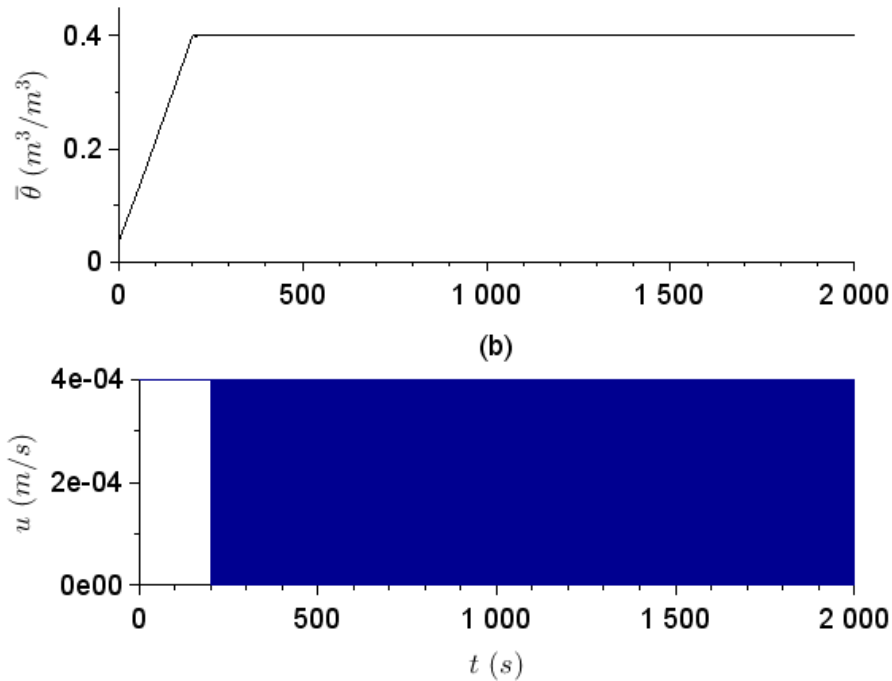


Fonte: Autor, 2021.

Deste modo, o controlador inicia seu funcionamento em $t \geq 7 \times 10^2 s$ aproximadamente. A Figura 20(a) em comparação com a Figura 18 e 19 indica ainda, a ausência de vibrações na umidade média (*chattering*), embora o sinal de controle comute em alta frequência durante a ocorrência do modo deslizante, como é perceptível na Figura 20(b).

Na Figura 21(a) e Figura 21(b) para $L_1=0,1m$, mostram uma excelente resposta transitória do controle da dinâmica não-linear. Visto que, a referência $\theta_{ref} = 0,1(m^3/m^3)$ é alcançada em $t \geq 6 \times 10^2 s$ sem ultrapassagem, seguindo o teorema 1. Observa-se também que não há nenhum efeito de perturbação no sinal de saída da Figura 21(a).

Figura 21 - Controle da média do conteúdo da água $\bar{\theta}_{ref} = 0,4(m^3/m^3)$.
(a)



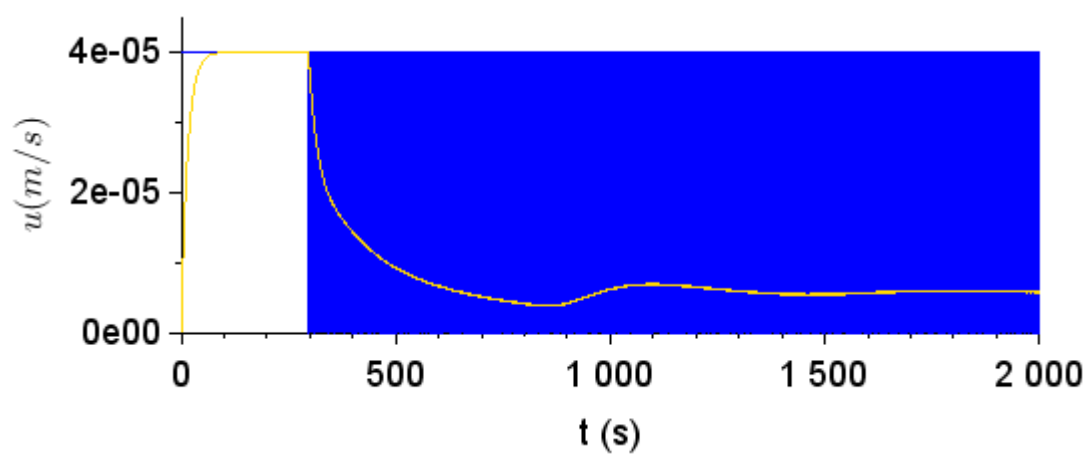
Fonte: Autor, 2021.

Esse fato se deve ao controlador que regula a média de umidade θ mediante comutação do fluxo da água ligando a $u^+(t) = 4 \times 10^{-4} m/s$ e desligando a $u^-(t) = 0 m/s$ com perturbação considerada $d_0(t) = +2 \times 10^{-7} m/s$, $\sigma(t) < 0$ (4.23).

Deste modo, o controlador inicia funcionamento em $t \geq 6 \times 10^2 s$ aproximadamente. A Figura 21(a) em comparação a Figura 20, Figura 19 e Figura 18 indica ainda a ausência de vibrações na umidade média (*chattering*), embora o sinal de controle comute em alta frequência durante a ocorrência do modo deslizante, como é perceptível na Figura 21(b).

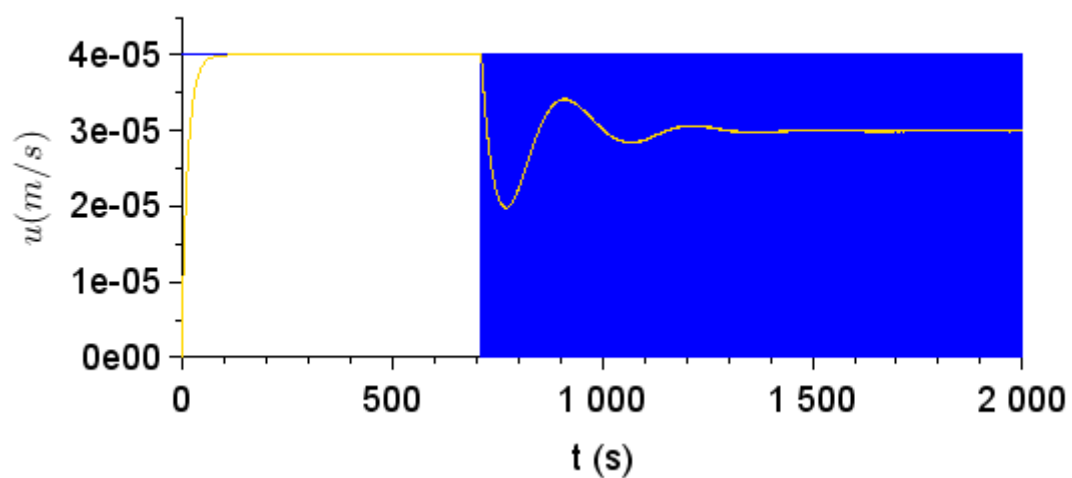
Nas Figuras 22 a 25 podemos destacar o sinal de controle (azul) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente para quatro valores da referência de umidade média. O controle médio foi obtido por um filtro passa-baixas com frequência de corte $0,067 \text{ rad/s}$ (UTKIN, 1978).

Figura 22 - O sinal de controle (azul) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente para $\bar{\theta}_{ref} = 0,1(m^3/m^3)$.



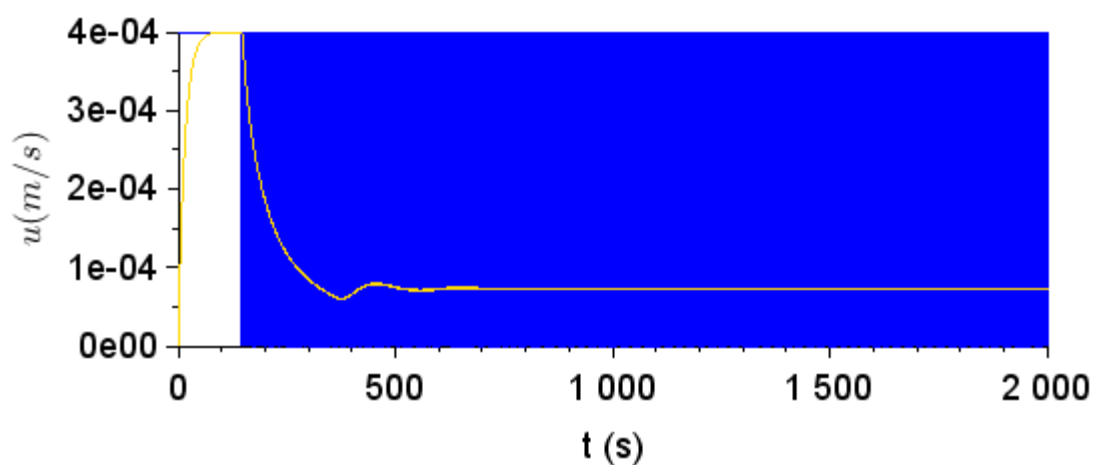
Fonte: Autor, 2021.

Figura 23 - o sinal de controle (azul) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente para $\bar{\theta}_{ref} = 0,2(m^3/m^3)$.



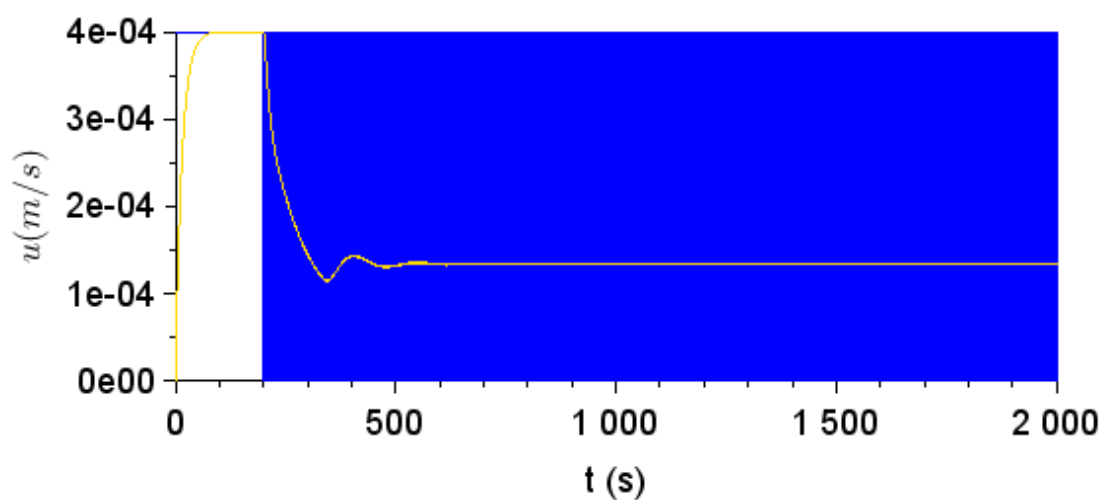
Fonte: Autor, 2021.

Figura 24 - o sinal de controle (azul) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente para $\bar{\theta}_{ref} = 0,3(m^3/m^3)$.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 25 - o sinal de controle (azul) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente para $\bar{\theta}_{ref} = 0,4(m^3/m^3)$.



Fonte: Autor, 2021.

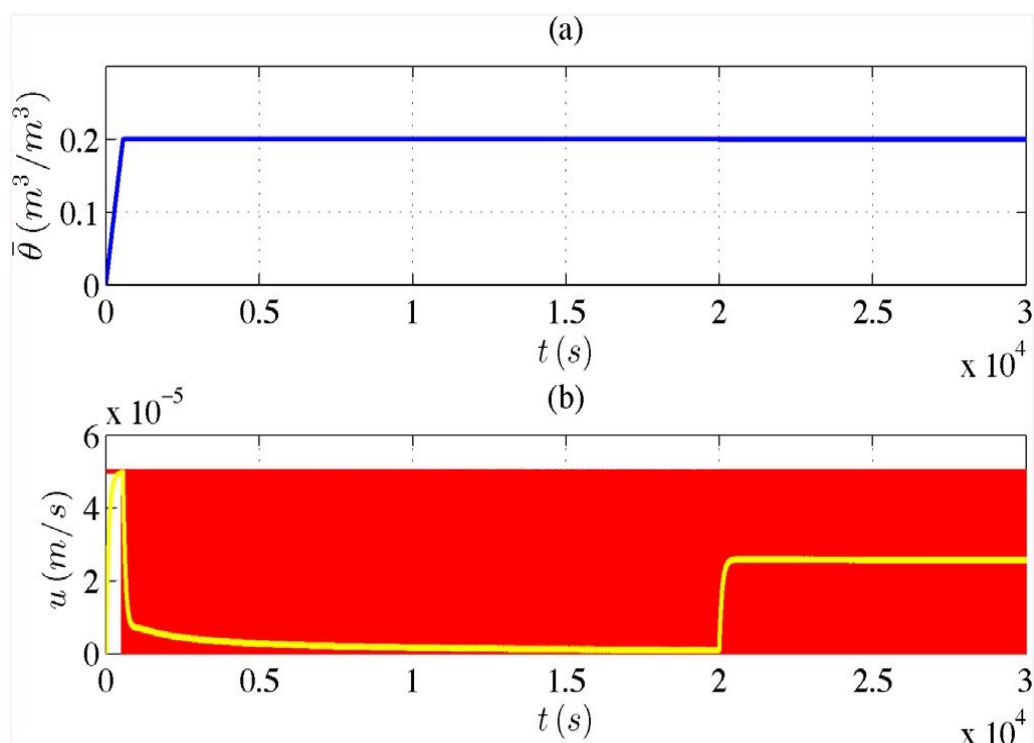
4.4 Comparação e validação de resultados com outras fontes

Nesta seção aponta-se, após análises e levantamentos bibliográficos e científicos na temática de controladores da média do conteúdo da água no solo, um breve resumo. Trazendo diferentes resultados de simulações relacionadas à nossa pesquisa.

Molina & Cunha (2017) obtiveram os resultados das simulações apresentadas na Figura 25, considerando o modelo linear de Richards.

Apresentando uma resposta para alcançar o estado estacionário sem *overshoot*⁷. Não se observaram efeitos causados pela perturbação inserida no sinal de saída na Figura 25(a).

Figura 26 - Simulação do controlador da média do conteúdo da água no solo. (a) o conteúdo médio de água no solo até uma profundidade $L=0,15m$, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.



Fonte: Extraído de Molina & Cunha, 2017.

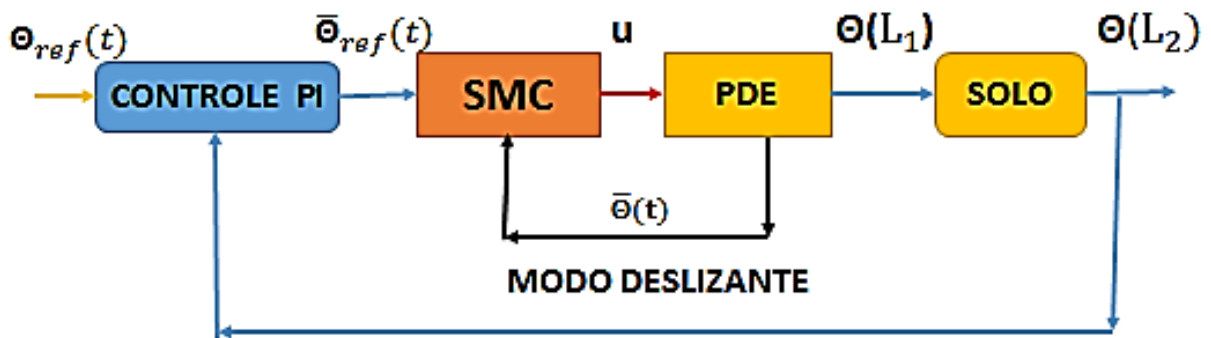
Contudo, o aumento do fluxo médio de água para compensar a evaporação é aparente na Figura 23(b) quando $t \geq 20 \times 10^3 s$. A alta frequência de chaveamento no sinal de controle indica a ausência do *chattering* em comparação ao sinal de controle médio não foram feitas para modelo não-linear. Os resultados nestes casos para controlar o solo areia, não apresenta muita variação, resultando a confiança ao momento da aplicação ou experimento no campo. Os resultados neste capítulo podem persuadir as variações no tempo de sinal de controle médio, isso devido a sua não-linearidade

⁷ *Overshoot* se refere aos valores transitórios de qualquer parâmetro que excede seu valor final (estado estacionário) durante sua transição de um valor para outro.

5. REGULADOR DO CONTEÚDO DE ÁGUA NO SOLO EM UMA PROFUNDIDADE ESPECÍFICA

Para regular o conteúdo de água no solo em uma profundidade específica (L_2), escolheu-se uma superfície de deslizamento alternativa proposta por Molina & Cunha (2017). Esta inclui um termo de erro integral para eliminar o erro entre o conteúdo da água no solo em uma profundidade especificada e uma referência desejada, para uma irrigação adequada. A Figura 24 mostra o diagrama de blocos do sistema a controlar e regular o conteúdo de água no solo em uma profundidade específica ($z = L_2 \in R^+$) considerando a dinâmica não-linear.

Figura 27 - Diagrama de controlador completo da umidade do solo.



Fonte: Autor, 2021.

Ademais neste trabalho é considerado o caso não colocado o que significa que a medida feita por um sensor, por exemplo, e o operador encontram-se em posições diferentes, no entanto define-se o sinal do erro:

$$e(t) = \theta_{ref}(t) - \theta(L_2, t) \quad (5.1)$$

Seguidamente visto na equação (5.1), $\theta_{ref}(t)$ é a umidade desejada e $\theta(L_2, t)$ é a umidade ou conteúdo de água medida por um sensor localizado como na Figura 17.

5.1. Controle proporcional e integral

Controladores proporcional e integral, comumente chamados de PI e proporcional, integral e derivativo, ou simplesmente PID, são os mais conhecidos

tipos de controle de realimentação (*feedback*). Estão presentes em mais da metade dos controladores industriais em uso atualmente, empregando, configurações para controle de variáveis como pressão, condutividade hidráulica, difusividade hidráulica, ou vazão (Vasconcellos, 2017; Aström & Hägglund, 1995). Neste trabalho o funcionamento de controladores se baseia no cálculo entre a variável controlada (medida ao longo do processo da planta EDP e SMC ou VSC) e seu valor desejado (umidade no solo). Neste capítulo será abordado a identificação de sistemas, mediante alguns métodos, como método de Basilio & Matos (2002), e parâmetros de Cohen (1953) ou Ziegler, Nichols, *et al.*, (1942).

5.1.1 Equação de controle proporcional

A parte proporcional é um feedback simples (Aström & Hägglund, 1995).

$$u_p(t) = K_p(t)e(t) \quad (5.2)$$

onde e é o erro de controle e K_p é o ganho do controlador. O erro é definido como a diferença entre o ponto de ajuste θ_{ref} e a saída do processo y , ou seja, a equação (5.1). A forma modificada

$$e(t) = K_p(b\theta_{ref}(t) - \theta(L_2, t)) \quad (5.3)$$

onde b é chamado de ponderação do ponto de ajuste, admitindo o ajuste independente da resposta do ponto de ajuste e da carga resposta à perturbação. A resposta do ponto de ajuste também pode ser influenciada por um pré-filtro (Aström & Hägglund, 1995).

5.1.2 Equação de controle integral

O controle proporcional (P) normalmente fornece um sistema que apresenta um erro de estado estacionário. A ação integral (I) é introduzida para remover isso e tem essa forma

$$u_i(t) = K_i \int_0^t e(t)dt = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t)dt \quad (5.4)$$

A ideia é simplesmente que a ação de controle seja realizada mesmo se o erro for muito pequeno, desde que a média do erro tenha o mesmo sinal por um longo período.

5.2. Equação de controle PI para irrigação

Utiliza-se o esquema de controle em cascata, descrito na Figura 23, no qual o controlador da umidade $\theta(L_2)$ gera o sinal de referência $\bar{\theta}$ para o controlador por modo deslizante da umidade média. O controlador da malha interna é capaz de rejeitar perturbações ambientais na superfície do solo durante o modo deslizante. A partir das aproximações nas equações (5.2), (5.4) e (5.1) como controlador PI para irrigação tem-se

$$\bar{\theta}_{ref}(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t)dt \right] \quad (5.5)$$

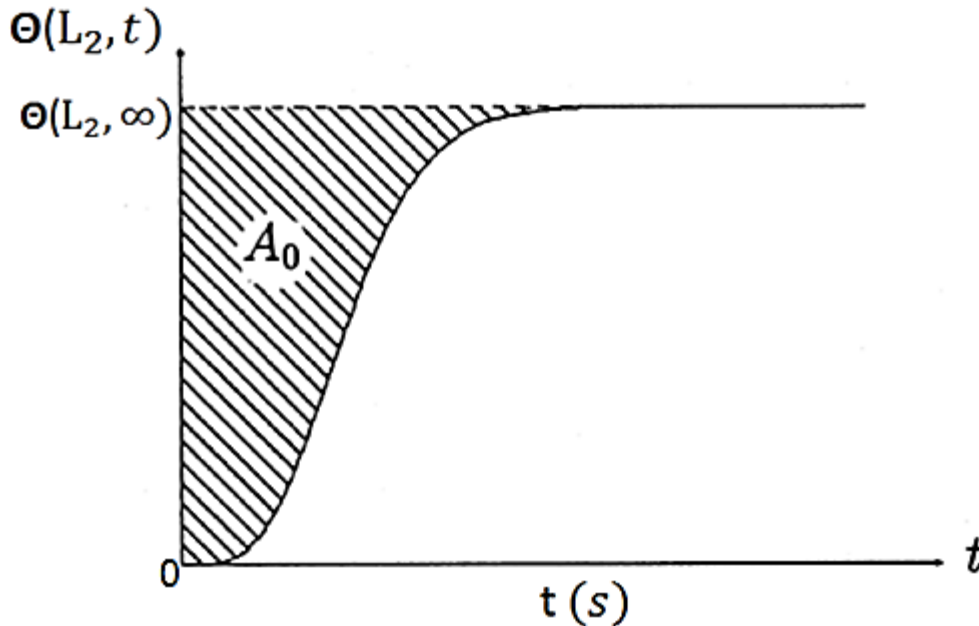
na qual $K_p > 0$ é o ganho proporcional e $T_i > 0$ é o tempo integral. Por outro lado, o controlador da malha externa deve ser robusto à grandes variações paramétricas dos coeficientes de condutividade e difusividade hidráulica do solo causadas pela dependência da umidade. Este fenómeno causa grande variação no atraso de propagação da umidade. Por tanto, escolheu-se um controlador com ações proporcional e integral (PI) (Aström & Hägglund, 1995), pois pode ser ajustado para ser robusto a atrasos incertos e elimina erros residuais desde que sua referência seja mantida constante.

5.3. Métodos de identificação de sistemas e parâmetros de controle PI

O modelo que descreve o conteúdo de água no solo e relativamente complexo devido ao modelo não-linear, o que tornaria o projeto dos controladores trabalhoso e exigiria métodos que fogem ao escopo deste trabalho. Desta forma,

faz-se necessário o uso de aproximações de métodos de ajuste de parâmetros de PI que permitiria a implementação de melhores controladores PI para um excelente funcionamento de sistema irrigação para solos.

Figura 28 - Resposta ao degrau da planta a ser identificada.



Fonte: Adaptado de Basilio & Matos, (2002).

5.3.1 Método de Basilio-Matos

Neste trabalho, em particular, controladores PI são implementados por Basilio & Matos (2002), que utilizam parâmetros que podem ser medidos na resposta ao degrau do sistema a ser controlado como na Figura 28 para sistema. No caso, a malha de controle da umidade média com sinal de entrada $\bar{\theta}_{ref}(t)$ e sinal de saída $\theta(L_2, t)$. Esses parâmetros são $A_0 > 0$ que consiste em uma integral obtida do sinal de saída e $A = \theta(L_2, +\infty) > 0$ que consiste no valor final do sinal de saída. Então, os parâmetros do controlador PI são dados pelo seguinte algoritmo.

Algoritmo 5.3 - Algoritmo para ajuste dos ganhos K_p e T_i do controlador PI.

- Aplique-se à planta um passo de amplitude A e registre a saída $\theta(L_2, t)$;
- Calcular $\bar{\theta}_{ref}$, e a área A_0 da Figura 24;

- Defina-se o tempo integral $T_i = A_0 \bar{\theta}_{ref} / 2$;
- Defina-se inicialmente o ganho proporcional $K_p = A / (4\bar{\theta}_{ref})$ para a resposta ao degrau criticamente amortecida;
- Com o controlador incorporado ao sistema real, aumente ou reduza o valor de K_p a fim de alterar a resposta transitória do sistema compensado, com a visão para atender às especificações de desempenho temporário.

A partir da solução (3.18) cuja resposta ao degrau de amplitude A é dada pela equação:

$$\theta(L_2, t) = \theta_r + (KA - \theta_r) \left[1 - e^{\frac{a(n-1)(L_2 - z_f(t))}{n}} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (5.6)$$

K representa o ganho DC , onde, precisamos encontrar o parâmetro a A_0

$$A_0 = \int_0^{\infty} [KA - \theta(L_2, t)] dt \quad (5.7)$$

Separando em duas integrais e substituindo o valor de $\theta(L_2, t)$ de acordo com a equação (5.6)

$$A_0 = \int_0^{\infty} [KA - [\theta_r + (KA - \theta_r) \left[1 - e^{\frac{a(n-1)(L_2 - z_f(t))}{n}} \right]^{\frac{1}{n-1}}] dt, \quad (5.8)$$

$$A_0 = \int_0^{\infty} [KA - \theta_r] dt - \int_0^{\infty} (KA - \theta_r) \left[1 - e^{\frac{a(n-1)(L_2 - z_f(t))}{n}} \right]^{\frac{1}{n-1}} dt, \quad (5.9)$$

note-se que o tamanho de poros apenas para a área $n=2$,

$$A_0 = \int_0^{\infty} [KA - \theta_r] dt - \int_0^{\infty} (KA - \theta_r) dt + (KA - \theta_r) \int_0^{\infty} e^{\frac{a(L_2 - z_f(t))}{2}} dt, \quad (5.10)$$

Dreescrevendo a equação (5.10), obtém-se:

$$A_0 = (KA - \theta_r) \int_0^{\infty} e^{\frac{a(L_2 - z_f(t))}{2}} dt \quad (5.11)$$

para $z_f(t) = \epsilon + Vt$, (HAYEK, 2016), tem-se

$$A_0 = (KA - \theta_r) \int_0^{\infty} e^{\frac{a(L_2 - \epsilon - Vt)}{2}} dt, \quad (5.12)$$

V velocidade de onda viajante, ϵ movimento limite de umidade (HAYEK, 2016).

Fazendo as substituições da integração (5.12), dessa forma

$$x = \frac{a(L_2 - \epsilon - Vt)}{2} \implies dx = -V dt/2, \quad (5.13)$$

substituindo-se equação (5.13) em (5.12), logo integrando obtém-se

$$A_0 = -(2/V)(KA - \theta_r) \int_0^{\infty} e^x dx = -(2/V)(KA - \theta_r) e^{\frac{a(L_2 - \epsilon - Vt)}{2}} \Big|_0^{\infty}, \quad (5.14)$$

para ϵ contínuo e com valor zero então $V = (L_2)/t$, portanto

$$A_0 = (2t/L_2)(KA - \theta_r) e^{\frac{aL_2}{2}} \quad (5.15)$$

Em particular para $t \equiv 2000$ s tempo de acomodação ou estado transitório, $L_2=0,50$ m, $KA \equiv 0,10(m^3/m^3)$ estado estacionário, $\theta_r=0,02(m^3/m^3)$ para apenas uma área $e^{\frac{aL_2}{2}} = 7$, substituindo os valores em (5.15), tem-se

$$A_0 \equiv 4000. \quad (5.16)$$

5.3.2 Parâmetros de Cohen-Coon

Neste método (Vasconcellos, 2017), os parâmetros dos controladores **P**, **PI** e **PID** podem ser obtidos diretamente, conforme indicado na Tabela 5.

Tabela 5 - Ajustes para o método de Cohen-Coon.

Tipo de Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a} \left(\frac{1+L}{3\tau} \right)$	-	-
PI	$\frac{1}{a} \left(\frac{0,9+L}{12\tau} \right)$	$\frac{L(30\tau+3L)}{9\tau+20L}$	-
PID	$\frac{1}{a} \left(\frac{4}{3} + \frac{L}{4\tau} \right)$	$\frac{L(32\tau+6L)}{13\tau+8L}$	$\frac{4TL}{11\tau+2L}$

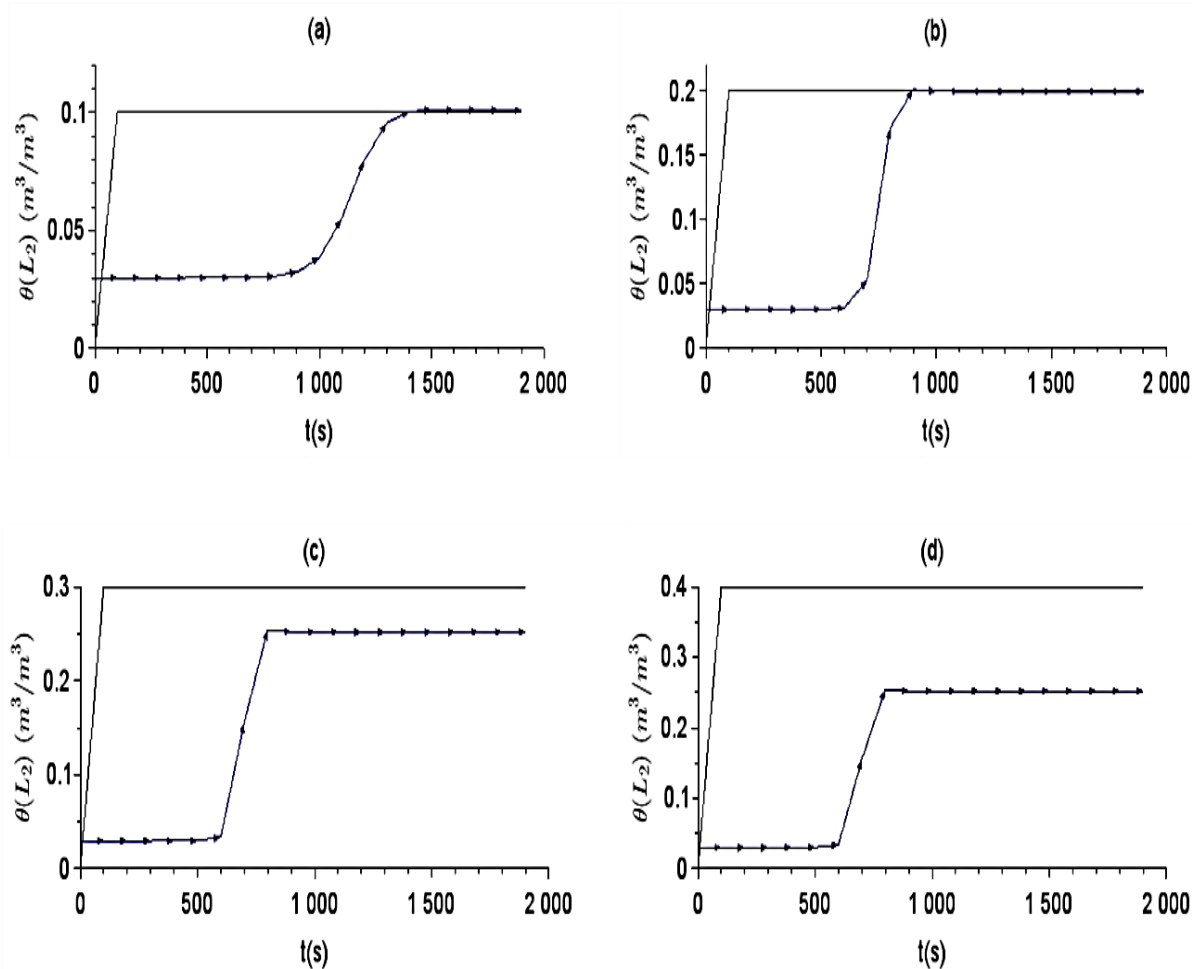
Fonte: Vasconcellos, 2017.

em que K representa o ganho, DC , L o atraso e τ é a constante de tempo do sistema. Vale ressaltar que o método de Cohen-Coon apresenta melhores desempenhos para valores do fator de incontrolabilidade do processo no intervalo $0,4 < L < 4,5$. Todavia, a robustez é relativamente ruim para valores $L \leq 2$, o que reforça o objetivo do método de Cohen-Coon de obter sintonia para processos com tempos mortos maiores que os estudados por Ziegler-Nichols.

5.3.3 Respostas ao degrau do sistema

Observe-se que nas simulações da Figura 29 há diferentes respostas ao degrau do sistema a ser controlado, o que leva diferentes tempos de acomodação ou estado transitórios para atingir o estado estacionário. A não-linearidade mostra a importância de perceber o atraso da infiltração da água no solo, que retarda a convergência da umidade para o valor de referência $\bar{\theta}_{ref}$. Com base nestas simulações são construídos os parâmetros de ajuste para um bom desempenho dos controladores para irrigação.

Figura 29 - Simulações das respostas ao degrau do sistema com SMC, (a) $\bar{\theta}_{ref} \equiv 0,1 \text{ m}^3/\text{m}^3$, (b) $\bar{\theta}_{ref} \equiv 0,2 \text{ m}^3/\text{m}^3$, (c) $\bar{\theta}_{ref} \equiv 0,3 \text{ m}^3/\text{m}^3$ e (d) $\bar{\theta}_{ref} \equiv 0,4 \text{ m}^3/\text{m}^3$.

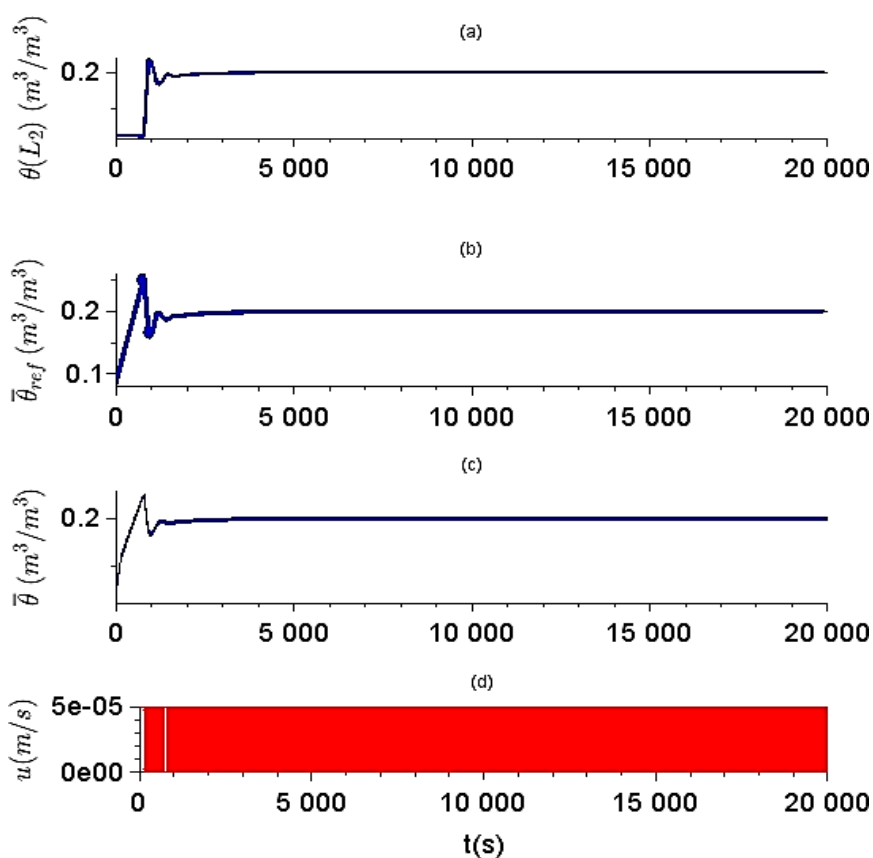


Fonte: Autor, 2021.

5.4 Simulação controle do conteúdo da água em uma profundidade especificada

Os resultados da simulação do controle de umidade são apresentados na Figura 30 para $L_2=0,50m$. Foram usados os seguintes parâmetros no controlador PI: $K_p=0,50m$ e $T_i=10^4s$, que foram obtidos a partir da área $A_0=4 \times 10^3s$, $A=0,40\text{m}^3/\text{m}^3$ da resposta ao degrau com amplitude $\bar{\theta}_{ref} = 0,20\text{m}^3/\text{m}^3$. Esses parâmetros foram ajustados para obter uma resposta transitória não muito lenta e livre da ultrapassagem da umidade pela referência desejada $\theta_{ref}=0,20\text{m}^3/\text{m}^3$, como pode ser visto na Figura 30(a).

Figura 30 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,50m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.



Fonte: Autor, 2021.

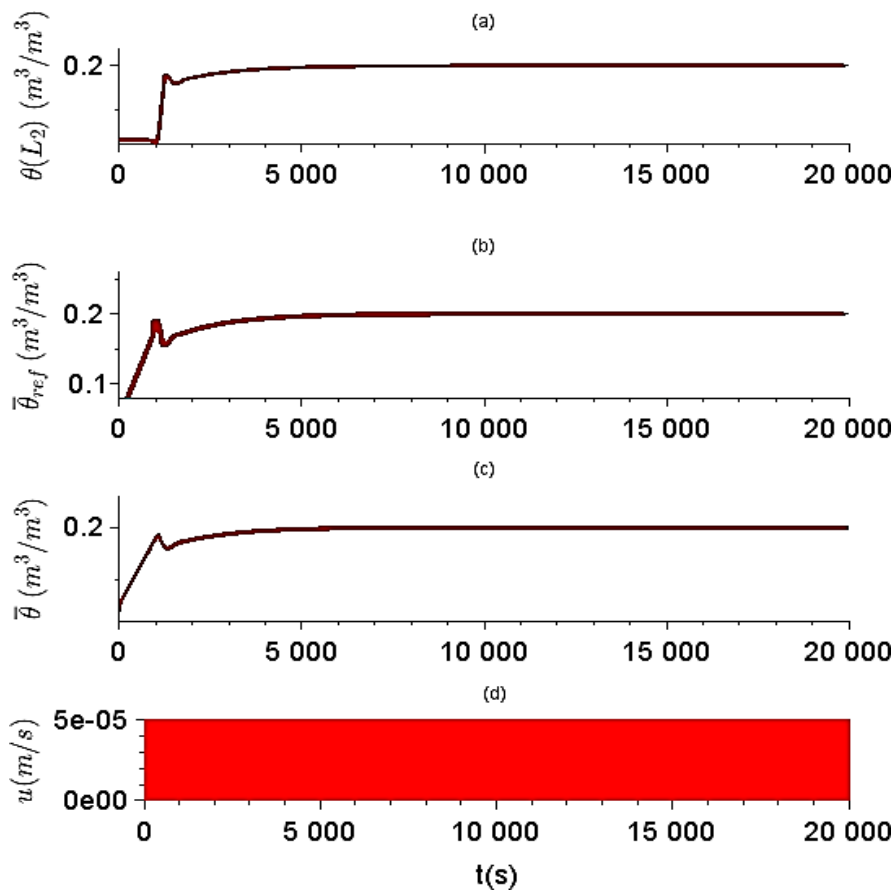
No sinal de controle apresentado na Figura 30(d) percebe-se que o chaveamento em alta frequência ocorre desde o início, o que indica a ocorrência do modo deslizante. Nota-se que a umidade média na Figura 30(c) segue a sua referência, Figura 30(b), que é gerada pelo controlador PI. Na Figura 30(a) percebe-se o atraso da infiltração da água no solo, que retarda a convergência da umidade para o valor de referência $\theta_{ref}=0,2m^3/m^3$. O atraso em uma determinada profundidade dos substratos em solos muito úmidos seriam prejudiciais para o crescimento das raízes das plantas. As raízes precisam respirar e demandam oxigênio, o excesso de água literalmente as afogaria (TESTA, 2019).

Por conseguinte, é importante regular o conteúdo de água no solo em uma profundidade especificada $\theta_{L_2} \in R^+$. A estabilidade do sistema de controle foi verificada também para as seguintes simulações, embora os transitórios sejam diferentes por causa da não-linearidade do sistema. É importante levar em

consideração, que o *overshoot* em umidade do solo seria uma condição ruim ou parte da não-linearidade que deveria ser melhorado sem perda de informação para um controle adequado em irrigação. Nas simulações pode-se perceber, na parte inicial do sinal de controle, um pequeno tempo dessa duração que influi em um resultado que pode prejudicar a irrigação, seja no consumo de água, energia elétrica, aspectos econômicos ou em algum aspecto de crescimento do cultivo.

Observa-se na simulação do controle de umidade, apresentada na Figura 31 para $L_2=0,50m$ que foram usados os seguintes parâmetros no controlador PI: $K_p=0,30m$ e $T_i=10^4s$, que foram obtidos a partir da área $A_0=4\times 10^3s$, $A=0,20m^3/m^3$ da resposta ao degrau com amplitude $\bar{\theta}_{ref}=0,20m^3/m^3$.

Figura 31 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,30m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.



Fonte: Autor, 2021.

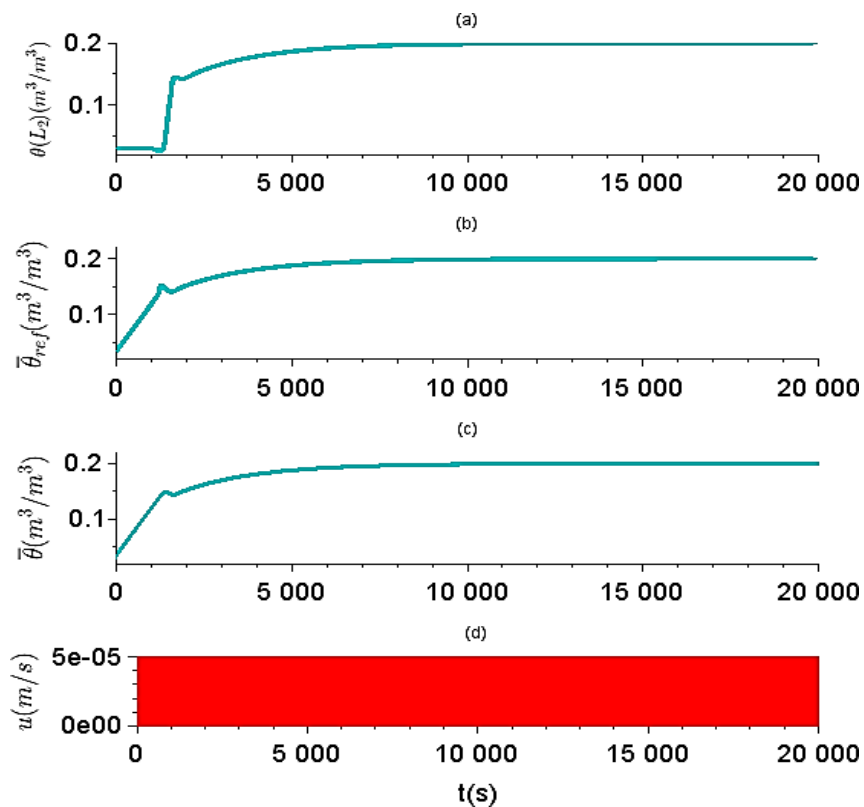
Esses parâmetros foram ajustados para obter uma resposta transitória não muito lenta e livre da ultrapassagem da umidade pela referência desejada $\theta_{ref}=0,20m^3/m^3$, como pode ser visto na 31(a), no sinal de controle apresentado

na Figura 31(b). E, por conseguinte, observa-se que a umidade média na Figura 30(c) segue a sua referência, Figura 31(b), que é gerada pelo controlador PI.

Na Figura 32(a) percebe-se o atraso da infiltração da água no solo, que retarda a convergência da umidade para o valor de referência $\theta_{ref}=0,20m^3/m^3$. A estabilidade do sistema de controle é verificada no transitório da Figura 30, sendo diferente por causa do atraso.

Na mesma maneira, as simulações do controle de umidade são apresentadas na Figura 32 para $L_2=0,50m$.

Figura 32 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,20m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.



Fonte: Autor, 2021.

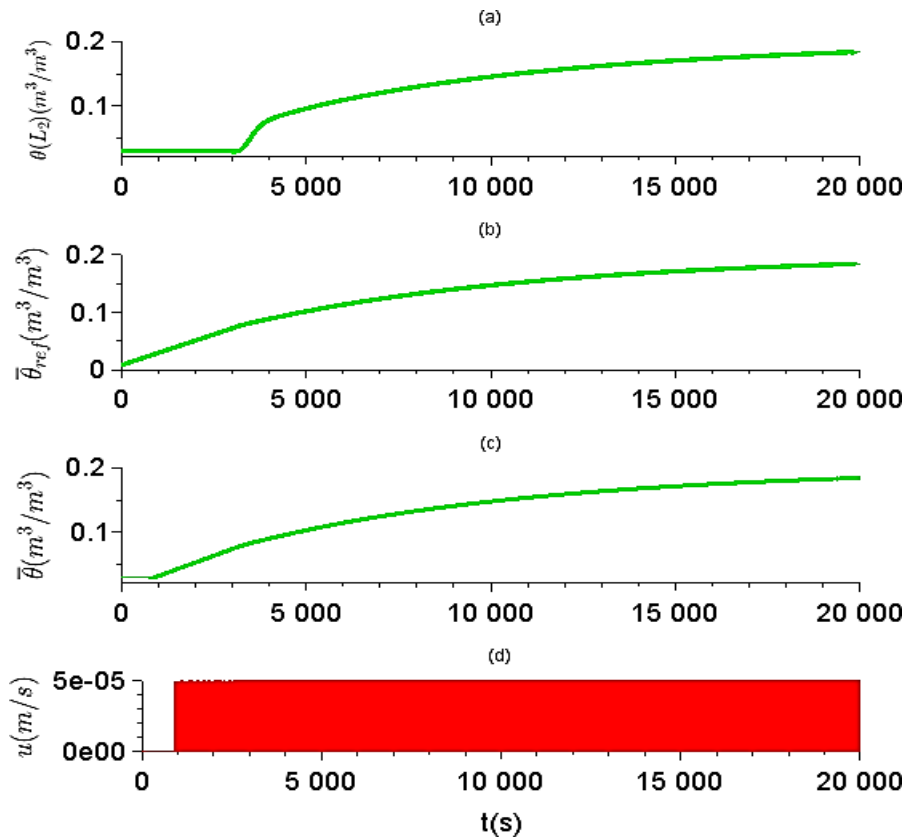
Foram usados os seguintes parâmetros no controlador PI: $K_p=0,20m$ e $T_i=10^4s$, que foram obtidos a partir da área $A_0=4 \times 10^3s$, $A=0,16m^3/m^3$ da resposta ao degrau com amplitude $\bar{\theta}_{ref}=0,20m^3/m^3$. Mesmo assim parâmetros foram ajustados para obter uma resposta transitória não muito lenta e livre da ultrapassagem da umidade pela referência desejada $\theta_{ref}=0,20m^3/m^3$, como pode ser visto na Figura 32(a) e no sinal de controle apresentado na Figura 32(d).

Nota-se que a umidade média na Figura 32(c) segue a sua referência, Figura 32(b), que é gerada pelo controlador PI. Na Figura 32(a) percebe-se o atraso da infiltração da água no solo, que retarda a convergência da umidade para o valor de referência $\theta_{ref}=0,20m^3/m^3$. Finalmente a Figura 32.(d) apresenta o comportamento de sinal de controle e a variação é mínima entre a diferença e a simulação da Figura 31. Os transitórios de Figura 30 e Figura 31 são diferentes por causa da não-linearidade do sistema que apresenta *overshoot* em alguns casos.

Na Figura 33 como resultado da simulação para $L_2=0,50m$ foram usados os seguintes parâmetros no controlador PI: $K_p=0,05 m$ e $T_i=10^4s$, que foram obtidos a partir da área $A_0=4\times 10^3s$, $A=0,04 m^3/m^3$ da resposta ao degrau com amplitude $\bar{\theta}_{ref}=0,20 m^3/m^3$. Parâmetros foram ajustados para obter uma resposta transitória não muito lenta e livre da ultrapassagem da umidade pela referência desejada $\theta_{ref}=0,20 m^3/m^3$, como pode ser visto na Figura 33(a) e no sinal de controle apresentado na Figura 33(d). Percebe-se que a umidade média na Figura 33(c) segue a sua referência, Figura 33(b), que é gerada pelo controlador PI.

Na Figura 33(a) percebe-se o atraso da infiltração da água no solo, que retarda a convergência da umidade para o valor de referência $\theta_{ref}=0,20 m^3/m^3$. Finalmente a Figura 33(d) traz o comportamento de sinal de controle com a variação e mínima da diferença em comparação das simulações nas Figuras 32, 31 e 30.

Figura 33 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,05m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.

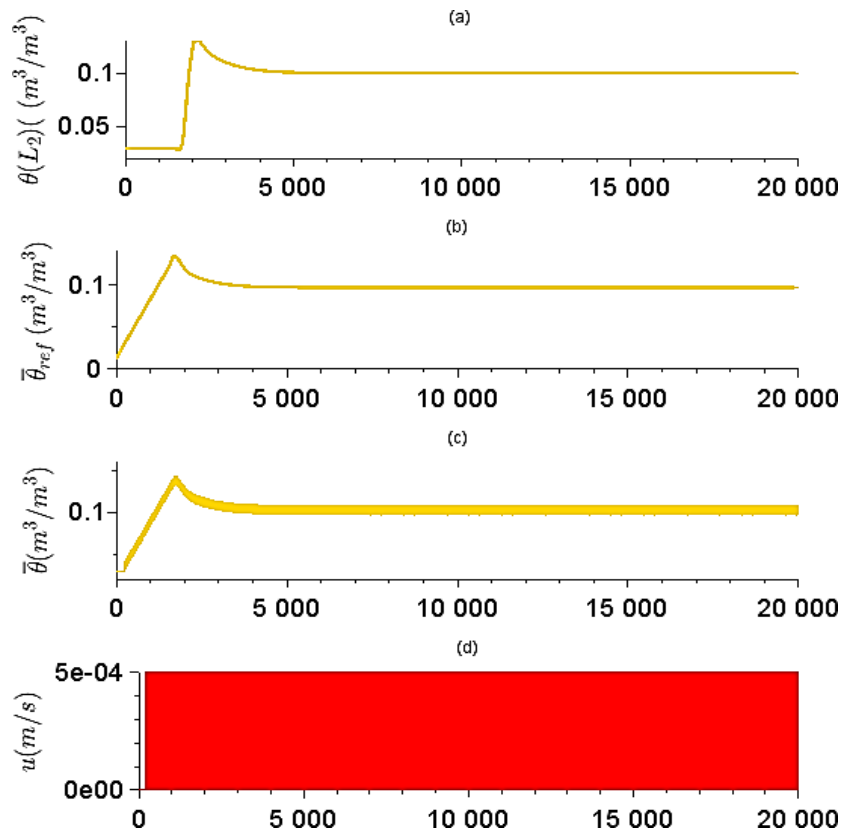


Fonte: Autor, 2021.

Em relação aos resultados da simulação na Figura 34, Figura 35 e Figura 36 foram simulados com os mesmos parâmetros da Figura 32 para diferentes referências desejadas: $\theta_{ref}=0,10 m^3/m^3$, $\theta_{ref}=0,30 m^3/m^3$ e $\theta_{ref}=0,40 m^3/m^3$ respectivamente. Percebe-se que o chaveamento em alta frequência ocorre desde o início e demora na Figura 34, o que indica a ocorrência do modo deslizante.

Nota-se que, a umidade média na Figura 34(c) segue a sua referência, Figura 34(b), que é gerada pelo controlador PI sempre para diferentes referências. Na Figura 34(a) percebe-se o atraso da infiltração da água no solo, e a presença de *overshoot* para convergir ao valor de referência $\theta_{ref}=0,10 m^3/m^3$.

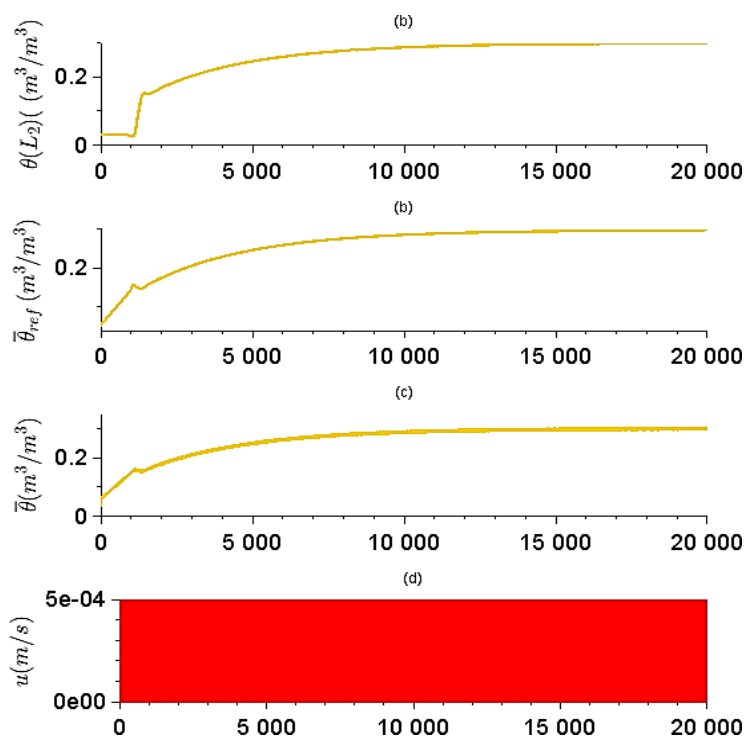
Figura 34 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, $\theta_{ref}=0,10m^3/m^3$ (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,20m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.



Fonte: Autor, 2021.

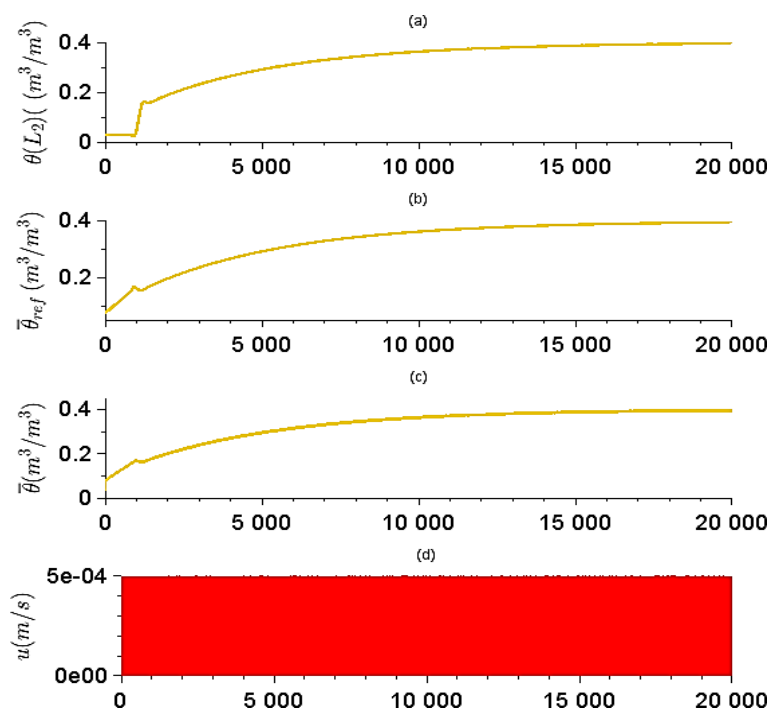
Finalmente a Figura 35 e Figura 36 o comportamento de sinal de controle a variação é pequena em comparação com a simulação da Figura 34. Nota-se que a vazão de entrada é ajustada na Figura 34(d), Figura 35(d) e Figura 36(d).

Figura 35 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, $\theta_{ref}=0,30m^3/m^3$ (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,05m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 36 - Controle de (a) umidade na profundidade especificada $L_2=0,50m$, $\theta_{ref}=0,40m^3/m^3$ (b) sinal de saída do controlador PI, $K_p=0,20m$ e $T_i=10^4s$ (c) umidade média próxima da superfície e o (d) sinal de controle.



Fonte: Autor, 2021.

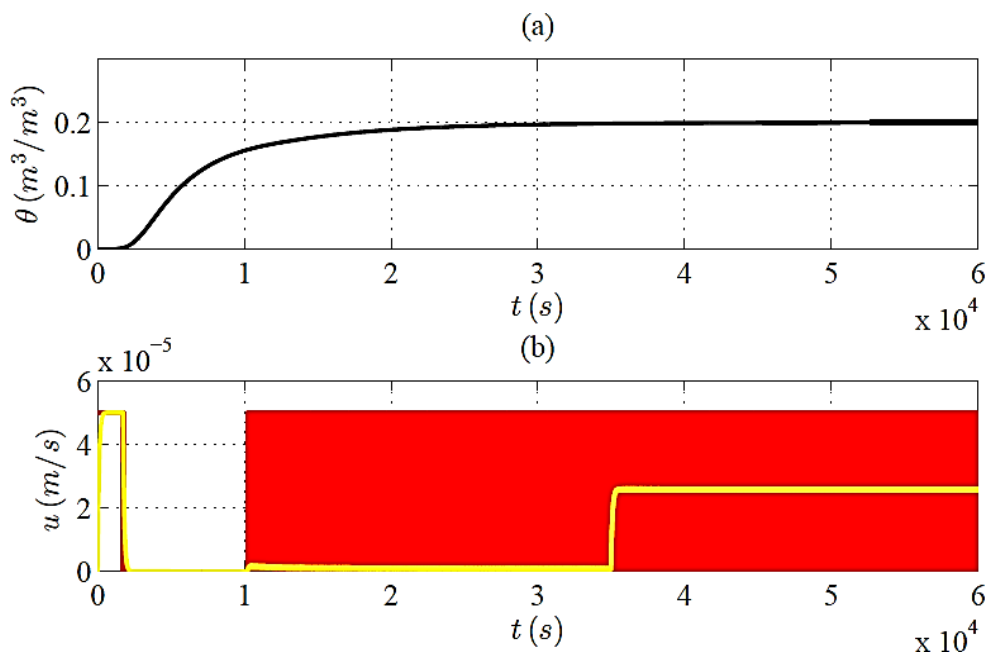
5.5 Comparação e validação de resultados com outras fontes

As comparações e observações realizadas se debruçaram sobre extensas pesquisas e estudos científicos, dessa forma apresenta-se resumidamente uma comparação e validação dos resultados perante outras fontes.

Resultado de Nataly Ines: Nesta pesquisa encontrou-se resultados das simulações apresentadas na Figura 37, considerando o modelo linear de Richards, indicam uma resposta transitória em malha fechada e rejeição da perturbação (MOLINA & CUNHA, 2017).

O ganho integral $K_i=0,635$, na qual a estabilidade é garantida, esta foi ajustada para obter uma resposta rápida e livre de *overshoot* observada na Figura 37(a). Já na Figura 37(b) visualiza-se o comportamento do sistema de controle para uma profundidade $L=0,50m$. Na Figura 36(a) pode-se observar uma espécie de atraso no início da resposta do conteúdo da água no solo. Aplica-se a perturbação d_0 no tempo $t \geq 35 \times 10^3 s$ na Figura 37(b), na qual observa-se a reação do sinal de controle à perturbação.

Figura 37 - Simulação do controlador do conteúdo de água em malha fechada na profundidade $L=0,15m$, (a) conteúdo da água no solo, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.



Fonte: Extraído de Molina & Cunha, 2017.

Em comparação com resultados feitos para o modelo não-linear, demonstram uma variação em sinal de controle atuando constantemente. Os picos

são mais visíveis devido a sua complexidade e variação de condutividade e difusividade hidráulica, as condições de contorno permitem estabelecer um sistema de retorno. Alcançando o ponto do conteúdo de água desejado para permanência do solo úmido.

CONCLUSÃO

Foi proposta a conexão de um controlador PI em cascata com o SMC, a fim de se obter o bom desempenho da irrigação automática no caso em que o sensor e o atuador são não colocados, ou seja, o sensor de umidade é enterrado na profundidade onde se deseja regular a umidade, longe da superfície na qual a água é aspergida.

Os resultados de simulações indicam o bom desempenho dos controladores e a rejeição de distúrbios de entrada, tais como a chuva ou evaporação da água, graças ao modo deslizante.

A EDP não-linear de Richards é o modelo dinâmico adotado para o movimento da água em meios porosos saturados e não saturados. A não-linearidade devida às funções de condutividade e difusividade hidráulica desempenha papel importante na determinação do desempenho do controle. Cumpre ressaltar que o uso de EDPs não-lineares é a principal contribuição em relação a (Molina & Cunha, 2019), que considerava apenas EDPs lineares incapazes de representar fielmente a dinâmica da água no solo com variações de umidade extremas.

As estratégias SMC propostas também poderiam ser aplicadas a outras EDPs parabólicas lineares ou não-lineares.

Como recomendação indica-se pesquisar e projetar algoritmos de programação para EDPs mais eficientes, para que muitas instruções sejam executadas ao mesmo tempo, minimizando assim o erro. Em conclusão aplicar outros métodos de controle como MPC, redes neurais etc.

Trabalhos futuros

Propõem-se os seguintes tópicos para dar continuidade a este trabalho:

- I. **Experimento** - Um tema importante consiste na verificação das simulações mediante experimento. Neste trabalho não foi realizada a parte experimental devido a Pandemia COVID-19.
- II. **Controle preditor mediante *Backstepping* para irrigação** - Se recomenda a abordagem de Projeto de Controle *Backstepping* para sistemas não- Lineares

revisando fontes como (KRSTIC, 1995; KRSTIC & SMYSHLYAEV, 2008b; KRSTIC & SMYSHLYAEV, 2008a E SMYSHLYAEV & KRSTIC, 2005).

III. Controle por modelo preditivo para irrigação - Recomenda-se a utilização do controle preditivo para o modelo de Richards não-linear (4.2) que representa o movimento de água no solo em PDEs parabólicas com restrições no estado e no sinal de controle. Cabe destacar a importância de revisar e aprofundar a referência (DUBLJEVIC et al, 2006). O controle por modelo preditivo (MPC) usa um modelo dinâmico explícito da planta para prever o efeito de ações futuras das variáveis manipuladas na saída para gerar um sinal de controle sub-ótimo respeitando restrições (KAISER & BRUNTON, 2018; GARCIA & MORARI, 1989).

REFERÊNCIAS

- ACHESON, D. J. **Elementary fluid dynamics**: Oxford University Press. 1990.
- AKIN, J. E. Finite element analysis with error estimators: An introduction to the FEM and adaptive error analysis for engineering students. **Elsevier**, 2005.
- ANTONELLI, D. Quase metade da água usada na agricultura é desperdiçada. **São Paulo**, v. 21, 2015.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical methods for physicists**. 1999.
- ARKERYD, L. On the Boltzmann equation part II: The full initial value problem. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 45, n. 1, p. 17-34, 1972.
- ARRAES, Francisco Dirceu Duarte. **Modelagem bidimensional do movimento da água em condições de solo não saturado**. 2014. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- ASTRÖM, K. J., & HÄGGLUND, T. Pid Controllers: theory, design, and tuning. **Instrument Society of America Research Triangle Park, NC**, v. 2, 1995.
- BARKUNAN, S. R.; BHANUMATHI, V.; SETHURAM, J. Smart sensor for automatic drip irrigation system for paddy cultivation. **Computers & Electrical Engineering**, v. 73, p. 180-193, 2019.
- BASILIO, J. C.; MATOS, S. R. Design of PI and PID controllers with transient performance specification. **IEEE Transactions on education**, v. 45, n. 4, p. 364-370, 2002.
- BEAR, J. Dynamics of fluids in porous media. Courier Corporation. BETTINI, A. **A Course in Classical Physics 1--Mechanics**. Switzerland: Springer, 2013.
- BROADBRIDGE, P.; WHITE, I. Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model: 1. Analytic solution. **Water Resources Research**, v. 24, n. 1, p. 145-154, 1988.
- BROOKS, R. H. **Hydraulic properties of porous media**. Colorado State University, 1964.
- BROUWER, C. *et al.* Irrigation water management: irrigation methods. **Training manual**, v. 9, n. 5, p. 5-7, 1988.
- BROWN, G. O. Henry Darcy and the making of a law. **Water Resources Research**, v. 38, n. 7, p. 11-1-11-12, 2002.
- BUCKINGHAM, E. **Studies on the movement of soil moisture**. 1907.
- BURGERS, J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. In: **Advances in applied mechanics**. Elsevier, 1948. p. 171-199.

CALBO, A. G.; SILVA, W. LC. **Sistema Irrigas para manejo de irrigação: fundamentos, aplicações e desenvolvimentos**. Adonai Gimenez Calbo, 2005.

CAMPBELL, G. S. Soil physics with BASIC: transport models for soil-plant systems. **Elsevier**, 1985.

CARSEL, R. F.; PARRISH, R. S. Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. **Water resources research**, v. 24, n. 5, p. 755-769, 1988.

CARVALHO, E. S.; ARAUJO, L. A. O. Irrigação inteligente. **[Anais..]** Anuário da Produção de Iniciação Científica Discente, v. 13, n. 17, p. 323-336, 2011.

CHENG, A. H.-D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 29, n. 3, p. 268-302, 2005.

COCKETT, R.; HEAGY, L. J.; HABER, E. Efficient 3D inversions using the Richards equation. **Computers & Geosciences**, v. 116, p. 91-102, 2018.

COELHO, E. F.; COELHO FILHO, M. A.; OLIVEIRA, S. L. Agricultura irrigada: eficiência de irrigação e de uso de água. **Bahia Agrícola**, v. 7, n. 1, p. 57-60, 2005.

COHEN, G. H. Theoretical consideration of retarded control. **Trans. Asme**, v. 75, p. 827-834, 1953.

COLET, E. F.; FRIDMAN, L. M. Advances in variable structure and sliding mode control. Berlin: **Springer**, 2006.

CORON, J. M. Control and nonlinearity. **American Mathematical Soc.**, 2007.

CORON, Jean-Michel. Control of partial differential equations. **Scholarpedia**, v. 4, n. 11, p. 6451, 2009.

COSTA, R. N. T.; SOUZA, F. Irrigação por superfície. Gestão Sustentável no Baixo Jaguaribe, Ceará. Fortaleza: **Embrapa Agroindústria Tropical**, p. 261-288, 2006.

Danoff-Burg, J. A. **The terrestrial influence: Geology and soils**. Earth Institute Centre for Environmental Sustainability. Columbia University, 2014

DARCY, H. **Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application**. Victor Dalmont, 1856

DE MELO SOUZA, R. O. R.; PÉREZ, G. F. E.; BOTREL, T. A. Irrigação localizada por gravidade com microtubos. **Irriga**, v. 11, n. 2, p. 266-279, 2006.

DE VASCONCELLOS, A. P. M. **Projeto de Controladores PI e PID para um Forno Aquecedor de Óleo de Uma Planta de Tratamento de Hidrocarbonetos**. (Trabalho de Conclusão de Curso). Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2017.

DENMEAD, O. T.; SHAW, ROBERT H. Availability of soil water to plants as affected by soil moisture content and meteorological conditions 1. **Agronomy journal**, v. 54, n. 5, p. 385-390, 1962.

DIAZ, J. I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries. **Research Notes in Mathematic**, v 1, p. 106. Pitman, 1985.

DIRICHLET, P. G. L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. **Dieterichschen Buchhandlung**, vol. 8, 1860.

DRÁBEK, P.; HOLUBOVÁ, G. Elements of partial differential equations. **De Gruyter**, 2014.

DUBLJEVIC, S. *et al.* Predictive control of parabolic PDEs with state and control constraints. **International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal**, v. 16, n. 16, p. 749-772, 2006.

DYSTHE, K. B. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 369, n. 1736, p. 105-114, 1979.

EINSTEIN, A. **Author's Summary of The Foundation of the General Theory of Relativity**, 11 Aug 1916.

FARTHING, M. atthew W.; OGDEN, F. L. Numerical solution of Richards' equation: A review of advances and challenges. **Soil Science Society of America Journal**, v. 81, n. 6, p. 1257-1269, 2017.

FENGNAN, L.; FUKUMOTO, Y.; ZHAO, X. A linearized finite difference scheme for the Richards equation under variable-flux boundary conditions. **Journal of Scientific Computing**, v. 83, n. 1, p. 1-21, 2020.

FERRAZ, A. S. *et al.* Água: A pegada hídrica no setor alimentar e as potenciais consequências futuras. **Acta Portuguesa de Nutrição**, n. 22, p. 42-47, 2020.

FÖPPL, A. Vorlesungen über technische Mechanik **B. G. Teubner**, Leipzig, Germany, 1906

GARCIA, C. E.; PRETT, D. M.; MORARI, M. Model Predictive control: Theory and Practice - A survey. **Automatica**, v. 25, n. 3, p. 335-348, 1989.

GARDNER, W. R. Dynamic aspects of water availability to plants. **Soil science**, v. 89, n. 2, p. 63-73, 1960

GOYAL, M. R. Principles of drip/trickle or micro irrigation. In: **Management of drip/trickle or micro irrigation**. Apple Academic Press, 2012. p. 121-150.

GUSTAFSON, K.; ABE, T. G. R. (Victor) Gustave Robin: 1855–1897. **The Mathematical Intelligencer**, v. 20, n. 2, p. 47-53, 1998.

GUSTAFSON, K.; ABE, T. The third boundary condition - was it Robin's?. **The Mathematical Intelligencer**, v. 20, n. 1, p. 63-71, 1998.

HAMBLIN, A. P. The influence of soil structure on water movement, crop root growth, and water uptake. **Advances in Agronomy**, v. 38, p. 95-158, 1986.

HAYEK, M. An exact explicit solution for one-dimensional, transient, nonlinear Richards' equation for modeling infiltration with special hydraulic functions. **Journal of Hydrology**, v. 535, p. 662-670, 2016

HEFTER, E. F. Application of the nonlinear Schrödinger equation with a logarithmic inhomogeneous term to nuclear physics. **Physical Review A**, v. 32, n. 2, p. 1201, 1985.

HILBERT, D. Mathematische probleme. **Ges. Abh.**, v. 3, p. 290-329, 1901.

HILLEL, D. Environmental soil physics: Fundamentals, applications, and environmental considerations. **Elsevier**, 1998.

Johnson, C. **Mathematics. numerical solution of partial differential equations by the finite element method**. Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2009.

Jones, H. G. **Plants and Microclimate: A Quantitative Approach to Environmental Plant Physiology**. 3 ed., Cambridge University Press, 2013.

KAISER, E.; KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L. Sparse identification of nonlinear dynamics for model predictive control in the low-data limit. **Proceedings of the Royal Society A**, v. 474, n. 2219, , 2018.

KHAN, A. S. *et al.* Tecnologias de reaproveitamento de água. **Revibec: revista iberoamericana de economía ecológica**, v. 34, p. 25-42, 2021.

KIZITO, Fred *et al.* Frequency, electrical conductivity and temperature analysis of a low-cost capacitance soil moisture sensor. **Journal of Hydrology**, v. 352, n. 3-4, p. 367-378, 2008.

KLUTE, A. Laboratory Measurement of Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soil. In **Methods of Soil Analysis**, C.A. Black (Ed.), p. 210-221, 1965.

KRSTIC, M.; KOKOTOVIC, P. V.; KANELLAKOPOULOS, L. **Nonlinear and adaptive control design**. John Wiley & Sons, Inc., 1995.

KRSTIC, M.; SMYSHLYAEV, A. Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs - Part I: Lyapunov design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 53, n. 7, p. 1575-1591, 2008a.

KRSTIC, M.; SMYSHLYAEV, A. Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, 2008b.

LAMM, F. R.; AYARS, J. E.; NAKAYAMA, F. S. Microirrigation for crop production: design, operation, and management. **Elsevier**, 2006.

LEVIEN, S. L. A. Irrigação por superfície: Sistemas de irrigação por superfície. **Mossoró: ESAM**, 2003.

LI, N. *et al.* Parallel double-plate capacitive proximity sensor modelling based on effective theory. **Aip Advances**, v. 4, n. 2, p. 027119, 2014.

LIBARDI, Paulo Leonel. **Dinâmica da Água no Solo Vol. 61**. Edusp, 2005.

LIOUVILLE, J. Liouville 1809–1882: master of pure and applied mathematics. New York: **Springer**, 1990.

LORD, S. **A ética do uso da água doce: um levantamento**. UNESCO, 2001.

LOZOYA, C.; AGUILAR, A.; MENDOZA, C. Service oriented design approach for a precision agriculture datalogger. **IEEE Latin America Transactions**, v. 14, n. 4, p. 1683-1688, 2016.

MAIA NETO, R. F. Água para o desenvolvimento sustentável. **A Água em Revista, Belo Horizonte**, v. 9, p. 21-32, 1997.

MARION, J. B. Classical dynamics of particles and systems. **Academic Press**, 2013.

MARQUELLI, W. A.; SILVA, W. L. C. Seleção de sistemas de irrigação para hortaliças. **Embrapa Hortaliças-Circular Técnica (INFOTECA-E)**, 1998.

MECHAM, B. Q. A practical guide to using soil moisture sensors to control landscape irrigation. **Retrieved April**, v. 25, 2006.

MILLAR, A. A. Manejo de agua y producción agrícola. **IICA**, Santiago/Chile, 1993.

MIYAZAKI, T. Water flow in soils. **CRC Press**, 2005.

MOLINA, N. I. C.; CUNHA, J. P. VS. A distributed parameter approach for sliding mode control of soil irrigation. **IFAC-PapersOnLine**, v. 50, n. 1, p. 2714-2719, 2017.

MOLINA, N. I. C.; CUNHA, J. P. VS. Non-collocated sliding mode control of partial differential equations for soil irrigation. **Journal of Process Control**, v. 73, p. 1-8, 2019.

MOREIRA, C. Osmose. **Revista de Ciência Elementar**, v. 2, n. 4, 2014.

MORGAN, R. M. **Water and the land: a history of American irrigation**. The Irrigation Association, 1993.

MUALEM, Y. Hydraulic conductivity of unsaturated porous media: generalized macroscopic approach. **Water Resources Research**, v. 14, n. 2, p. 325-334, 1978.

MUÑOZ-CARPENA, R.; DUKES, M. D. Automatic irrigation based on soil moisture for vegetable crops. **EDIS**, v. 2005, n. 8, 2005.

NEUMANN, C. Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen. **BG Teubner**, 1865.

OLIVEIRA, L. K. **Contribuições do ensino por projetos na disciplina de controle e proteção ambiental no curso Técnico em Edificações**. (Dissertação de Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Paraná, 2015.

OZCEP, F. *et al.* Relationships between electrical properties (in situ) and water content (in the laboratory) of some soils in Turkey. **European Geosciences Union General Assembly**, 2005.

PAZ, V. P. S.; TEODORO, R. E. F.; MENDONÇA, F. C. Recursos hídricos, agricultura irrigada e meio ambiente. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 4, p. 465-473, 2000.

PHILIP, J. R. Theory of infiltration. In: **Advances in hydroscience**. Elsevier, 1969. p. 215-296.

PINEDA FRIAS, R. T. **Resolución de la ecuación de Richards unidimensional por el método de volúmenes finitos**. (Trabalho de Conclusão de Curso). Universidad Central del Ecuador, Quito: 2018.

POP, L. S. Error estimates for a time discretization method for the Richards' equation. **Computational Geosciences**, v. 6, n. 2, p. 141-160, 2002.

PREVEDELLO, C. L. **Teoria do fluxo da água em solos não saturados: novos conceitos e aplicações**. (Tese de Doutorado). Universidade de São Paulo, 1987.

PREVIATO, E. Featured Review: **CRC Concise Encyclopedia of Mathematic**, 2004.

RAISSI, M. Deep hidden physics models: Deep learning of nonlinear partial differential equations. **The Journal of Machine Learning Research**, v. 19, n. 1, p. 932-955, 2018.

RANI, M. U.; KAMALESH, S. Web based service to monitor automatic irrigation system for the agriculture field using sensors. In: **International conference on advances in electrical engineering (ICAEE)**. IEEE, p. 1-5, 2014.

RIBEIRO, L. El agua en las civilizaciones inca e pré-incas mito, ciência y tecnologia. In: **8.º Congresso Ibérico de Gestão e Planeamento da Água**, p. 530-539, 2013.

RICHARDS, L. A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. **Physics**, v. 1, n. 5, p. 318-333, 1931.

RICHESON, D. S. **Euler's Gem - The Polyhedron Formula and the Birth of Topology**. Princeton, Princeton University Press, 2009.

Risken, H., & Frank, T. The fokker-planck equation: Methods of solution and applications, **Springer Science & Business Media**, v. 18, 2012.

ROZHDESTVENSKY, B. L.; SIMAKIN, I. N. Secondary flows in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 147, p. 261-289, 1984.

SHARP, D. H. Overview of rayleigh-taylor instability (Tech. Rep.). **Los Alamos National Lab.**, NM. USA, 1983.

SIERRA, E. A.; DÍAZ, L. A.; GONZÁLEZ, M. T. A. Una nueva alternativa numérica para la solución de la ecuación unidimensional de Richards: Estudio de drenaje e infiltración de fluidos en la zona no saturada. **Investigación & Desarrollo**, v. 6, p. 133-143, 2006.

SILVA, A. L.; FARIA, M. A.; REIS, R. P. Viabilidade técnico-econômica do uso do sistema de irrigação por gotejamento na cultura do cafeeiro. **Revista brasileira de engenharia agrícola e ambiental**, v. 7, p. 37-44, 2003.

SMYSHLYAEV, A.; KRSTIC, M. Backstepping observers for a class of parabolic PDEs. **Systems & Control Letters**, v. 54, n. 7, p. 613-625, 2005.

SUN, Z. J.; YOUNG, G. D. A cost effective soil moisture instrument based on time-domain transmission measurement. In: **Int. Symp. and Worksh. on Time Domain Reflectometry for Innovative Geotechnical Applications**, Evanston, IL, 2ed p. 5-7, 2001

SUNDQUIST, B. Chapter 1 - Irrigation Overview. In: **The Earth's Carrying Capacity**. Some Related Review's and Analysis, 2007.

TAIZ, L.; ZEIGER, E. Plant Physiology. Sunderland, MA. **Sinauer Associates, Inc., Publishers**, v. 3, p. 484, 2002.

THOMAS, J. M. *et al.* Your garden hose: a potential health risk due to Legionella spp. growth facilitated by free-living amoebae. **Environmental science & technology**, v. 48, n. 17, p. 10456-10464, 2014.

UTKIN, V. I. Sliding modes and their applications in variable structure systems. **Mir, Moscow**, 1978.

VAN GENUCHTEN, M. Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. **Soil science society of America journal**, v. 44, n. 5, p. 892-898, 1980.

VILLAR, J. L. H.; GARCÍA, J. O.; HIYO, S. Y. M. Diseño y construcción de un sistema automatizado de control de bombas de agua en un cultivo hidropónico en el entorno Arduino, UNSCH–Ayacucho. **Revista ECIPerú**, v. 15, n. 1, 2020.

VITÓN, R. *et al.* AgroTech: Innovaciones que no sabías que eran de América Latina y el Caribe. **Banco Interamericano de Desarrollo**, 2017.

VORONEY, R. P. The soil habitat. In: **Soil microbiology, ecology and biochemistry**. Academic Press, 2007. p. 25-49.

WADDOO, S. A. Sliding mode control of crowd dynamics. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 21, n. 3, p. 1008-1015, 2012.

WALLER, P.; YITAYEW, M. Irrigation and drainage engineering. **Springer**, 2015.

WILLIAM, T. L.; WHITMAN. R.V. **Description of an Assemblage of Particles. Soil Mechanics**, 1 ed., John Wiley & Sons, Inc, 1969

ZHANG, S. *et al.* The impact of epidemics on agricultural production and forecast of COVID-19. **China Agricultural Economic Review**, 2020.

ZIEGLER, J. G. *et al.* Optimum settings for automatic controllers. **ASME**, v. 64, n. 11, 1942.

ZIENKIEWICZ, O. C. *et al.* **The finite element method: solid mechanics**. Butterworth-heinemann, v. 2, 2000.

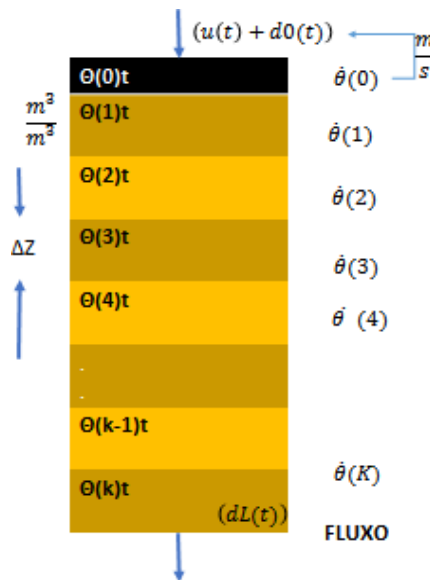
Zimmermann, R.W. **Flow in Porous Media**. Department of Earth Science and Engineering, Imperial College London. (MSc in Petroleum Engineering), 2002.

ZREDA, M. *et al.* Cosmos: The cosmic-ray soil moisture observing system. **Hydrology and Earth System Sciences**, v. 16, n. 11, p. 4079-4099, 2012.

APÊNDICE A - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DE RICHARDS

A equação diferencial amplamente utilizada para descrever infiltração vertical é do tipo Fokker-Planck não-linear, Figura A.1.

Figura A.1 - Discretização de fluxo e conteúdo de água em um meio sólido.



Fonte: Autor, 2021.

considerando um tamanho de passo constante Δz onde $z_i := i \Delta z$, $\theta_i := \theta(z_i, t)$, $D_i := D(\theta_i)$ e $K_i := K(\theta_i)$. Tem-se como discretização da equação 4.2 a seguinte expressão, se discretiza a variável espacial, considerando o passo constante Δz , ou seja,

$$D(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial D(\theta)}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \left[\frac{1}{2} (D_{1+i} + D_i) \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\Delta z} - \frac{1}{2} (D_{i-1} + D_i) \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})}{\Delta z} \right] \frac{1}{\Delta z} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial K(\theta)}{\partial z} = \frac{K_i - K_{i-1}}{\Delta z}, i = 2, 3, 4 \dots k \quad (\text{A.2})$$

onde $z_i := i \Delta z$, $\theta_i := \theta(z, t)$, $D_i := D(\theta)$ e $K_i := K(\theta)$ com as condições de contorno como restrições algébricas para o fluxo da água

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta z} = -D_1^{-1} [u(t) - K(\theta)] \quad (\text{A.3})$$

em $z=L, i=k+1$

$$\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{\Delta z} = -D_{k+1}^{-1}[K(\theta)] \quad (\text{A.4})$$

Então, o método é desenvolvido onde apenas as derivadas espaciais z são discretizadas, convertendo o problema da derivada parcial da equação (4.2) em

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}(D_{1+i} + D_i) \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\Delta z^2} - \frac{1}{2}(D_{i-1} + D_i) \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})}{\Delta z^2} + \frac{(K_i - K_{i-1})}{\Delta z}, i = 2, 3, 4 \dots k \quad (\text{A.5})$$

APÊNDICE B – ALGORITMOS DE SIMULAÇÕES EM SCILAB 6.1.0

B.1. Simulação da dinâmica linear

```

global nn i ip1 im1 dz dzz z

depth = 1.0;
nn = 99;
theta_0 = zeros(nn,1);
dz = (nn+1)/(2 * depth);
dzz = ((nn+1)/depth)^2;
i = 2:(nn+1);
ip1 = i+1;
im1 = i-1;

z = im1 * (depth/(nn+1));
C = zeros(9,nn);

for j=0:8 do
    C(j+1,fix(j*(nn-1)/9+1))=1;
end

function d=D(theta)
    d = 7.46e-6 * ones(nn,1);
endfunction

function k0=K0(theta)
    k0 = 4.69e-6 * ones(nn,1);
endfunction

function [theta_t]=Richards(theta, Dirichlet_0, Dirichlet_f)

    theta_a = [Dirichlet_0; theta ; Dirichlet_f];
    theta_z = (theta_a(ip1)-theta_a(im1)) * dz;
    theta_zz = (theta_a(ip1)-2*theta_a(i)+theta_a(im1)) * dzz;

    theta_t = D(theta).* theta_zz - K0(theta).* theta_z;

endfunction

```

B.2. Simulações da dinâmica não-linear

```

global nn i ip1 im1 dz dzz z

depth = 1.0;
nn = 499;
theta_0 = ones(nn,1)*0.150;
dz = (nn+1)/(2 * depth);
dzz = ((nn+1)/depth)^2;
i = 2:(nn+1);
ip1 = i+1;
im1 = i-1;
z = im1 * (depth/(nn+1));

C = zeros(9,nn); /
for j=0:8 do
    C(j+1,fix(j*(nn-1)/9+1))=1;
end
//Parâmetros do solo no modelo GARDNER (1958) ,Brooks-Corey (1964) , Van Genuchten (1980) ó Clapp-Hornberger (1978).m ≥
0,k > 1,()
//referencia :Chow y otros, 1994; Candela y Varela, 1993; Mijares, 1986; Anguita y otros, 1991
//m, k são constantes que representam as propriedades do solo,
//efeito da irrigacao com efluente de eswgoto tratado nas propriedades fisico-hidricas(alessandra bruschi)
//proceso de intercambio de vapor y agua con la atmósfera y el acuífero freático, basado en la ecuación de Richards(//Erik Daniel
Zimmermann)).
function d=D(theta) // Diffusividade funcao.
    //solo SEI INFINITO(drying) REFERENCA MOHAMED HAYECK 2016

```

```

n=1.48; //parametro constantes (obtidos Chow y otros, 1994; Candela y Varela, 1993; Mijares, 1986; Anguita y otros, 1991)
k_s=0.0000033; //conductividade idraulica do solo nas parcelas TAE, media, profundida 1(m/day)
a=5.9;
theta_s=0.39; //conteudo de agua saturada (m3/m3)
theta_r=0.100; //conteudo de agua residual (m3/m3)
d0 = n*k_s/a*(theta_s-theta_r);
d = d0*((theta-theta_r)/(theta_s-theta_r)^(n-1));
endfunction

function k=K(theta) // conductividade funcao.
n=1.48; //parametro constantes (obtidos Chow y otros, 1994; Candela y Varela, 1993; Mijares, 1986; Anguita y otros, 1991:)
k_s=0.0000033; //conductividade hidraulica do solo nas parcelas TAE, media, profundida 1(m/s)
theta_s=0.39; //conteudo de agua saturada (m3/m3)
theta_r=0.100; //conteudo de agua residual(m3/m3)
k1 = k_s/(theta_s-theta_r);
k = k1*((theta-theta_r)/(theta_s-theta_r))^n;
endfunction

function k0=K0(theta) // Derivative of the conductividade funcao.
n=1.48; //parametro constantes (obtidos Chow y otros, 1994; Candela y Varela, 1993; Mijares, 1986; Anguita y otros, 1991:)
k_s=0.0000033; //conductividade hidraulica do solo nas parcelas TAE, media, profundida 1(m/day)
theta_s=0.39; //conteudo de agua saturada (m3/m3)
theta_r=0.100; //conteudo de agua residual(m3/m3)
k2 = k_s*n/(theta_s-theta_r)^2;
k0 = k2*((theta-theta_r)/(theta_s-theta_r)^(n-1)); //ko= dk/dtheta
endfunction

function [theta_t]=Richards(theta, Neumann_0, Dirichlet_f)
d = D(theta);
Dirichlet_0 = (Neumann_0-K(theta))/(d(1)*dz)+theta(1); //condicao de contorno NEUMANN E DIRICHLET
theta_a = [Dirichlet_0; theta ; Dirichlet_f]; // Augmented theta vector with boundary conditions.
//theta_a = [Neumann_0; theta ; Neumann_f];

theta_z = (theta_a(ip1)-theta_a(im1)) * dz;
theta_zz = (theta_a(ip1)-2*theta_a(i)+theta_a(im1)) * dzz;

theta_t = d.* theta_zz - K0(theta).* theta_z; // Richards equacao.
endfunction

```

B.3. Algoritmo de programação de controle completo

```

global nn i ip1 im1 dz dzz z L S1 S2 Q P Kp Ki L

depth = 1.0;
depth2 = 0.5;
nn = 499;
A0=4000; // area aproximada
tetaref=0.2; // umidade referencial, estado permanente
Kp = 0.20;
Ti=A0/2*tetaref; // tempo integral Basilio-Matos
Ki = Kp/Ti;

theta_0 = ones(nn,1)*0.03;
dz = (nn+1)/(2 * depth);
dzz = ((nn+1)/depth)^2;

i = 2:(nn+1);
ip1 = i+1;
im1 = i-1;
z = im1 * (depth/(nn+1));

C = zeros(9,nn);
for j=0:8 do
C(j+1,fix(j*(nn-1)/9+1))=1;
// C1(j+1,fix(j*(nn-1)/7+1))=1;
end
//PARA SENSOR 1

```

```

Q=(nn+1)/10*depth2;//
S1=[ones(1,Q),zeros(1,nn-Q)]/Q;
//SENSOR 2 EM PROFUNDIDADE ESPECIFICA
P=(nn+1)/10*depth;
S2=[zeros(1,P-1),ones(1,1),zeros(1,nn-P)];
//Parâmetros do solo no modelo GARDNER (1958) ,Brooks-Corey (1964), Van Genuchten (1980) ó Clapp-Hornberger (1978).m ≥
0,k > 1,()
//referencia :Chow y otros, 1994; Candela y Varela, 1993; Mijares, 1986; Anguita y otros, 1991
//m, k são constantes que representam as propriedades do solo,
//efeito da irrigação com efluente de esgoto tratado nas propriedades físico-hídricas(alessandra bruschi)
//procesos de intercambio de vapor y agua con la atmósfera y el acuífero freático, basado en la ecuación de Richards(//Erik Daniel
Zimmermann)).
function d=D(theta)
    //solo SEI INFINITO(drying) REFERENCA MOHAMED HAYECK 2016
    m=2; //parametro constantes(obtidos Chow y otros, 1994; Candela y Varela, 1993; Mijares, 1986; Anguita y otros, 11 991)
    k_s=0.0000583; //conductividade idraulica do solo nas parcelas TAE,media,profundida 1(m/day)
    a=13.8;
    theta_s=0.417; //conteudo de agua saturada (m3/m3)
    theta_r=0.02; //conteudo de agua residual (m3/m3)
    d0 = m*k_s/a*(theta_s-theta_r);
    d = d0*((theta-theta_r)/(theta_s-theta_r)^(m-1));
endfunction

function k=K(theta) // conductividade funcao.
m=2; //parametro constantes (obtidos Chow y otros, 1994; Candela y Varela, 1993; Mijares, 1986; Anguita y otros, 1991):)
k_s=0.0000583; //conductividade hidraulica do solo nas parcelas TAE,media,profundida 1(m/s)
theta_s=0.417; //conteudo de agua saturada (m3/m3)
theta_r=0.02; //conteudo de agua residual(m3/m3)
k1 = k_s/(theta_s-theta_r);
k = k1*((theta-theta_r)/(theta_s-theta_r))^m;
endfunction

function k0=K0(theta)
m=2; //parametro constantes (obtidos Chow y otros, 1994; Candela y Varela, 1993; Mijares, 1986; Anguita y otros, 1991):)
k_s=0.0000583; //conductividade hidraulica do solo nas parcelas TAE,media,profundida 1(m/day)
theta_s=0.417; //conteudo de agua saturada (m3/m3)
theta_r=0.02; //conteudo de agua residual(m3/m3)
k2 = k_s*m/(theta_s-theta_r)^2;
k0 = k2*((theta-theta_r)/(theta_s-theta_r)^(m-1)); //ko= dk/dtheta
endfunction

function [theta_f]=Richards(theta, Neumann_0, Dirichlet_f)
d = D(theta);
Dirichlet_0 = (Neumann_0-K(theta(1)))/(d(1)*dz)+theta(1); //condicao de contorno NEUMANN E DIRICHLET
theta_a = [Dirichlet_0; theta ; Dirichlet_f];

theta_z = (theta_a(ip1)-theta_a(im1)) * dz
theta_zz = (theta_a(ip1)-2*theta_a(i)+theta_a(im1)) * dzz;
theta_t = d.* theta_zz - K0(theta).* theta_z; // Richards equacao

endfunction

```