



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Camila Lobo Coutinho

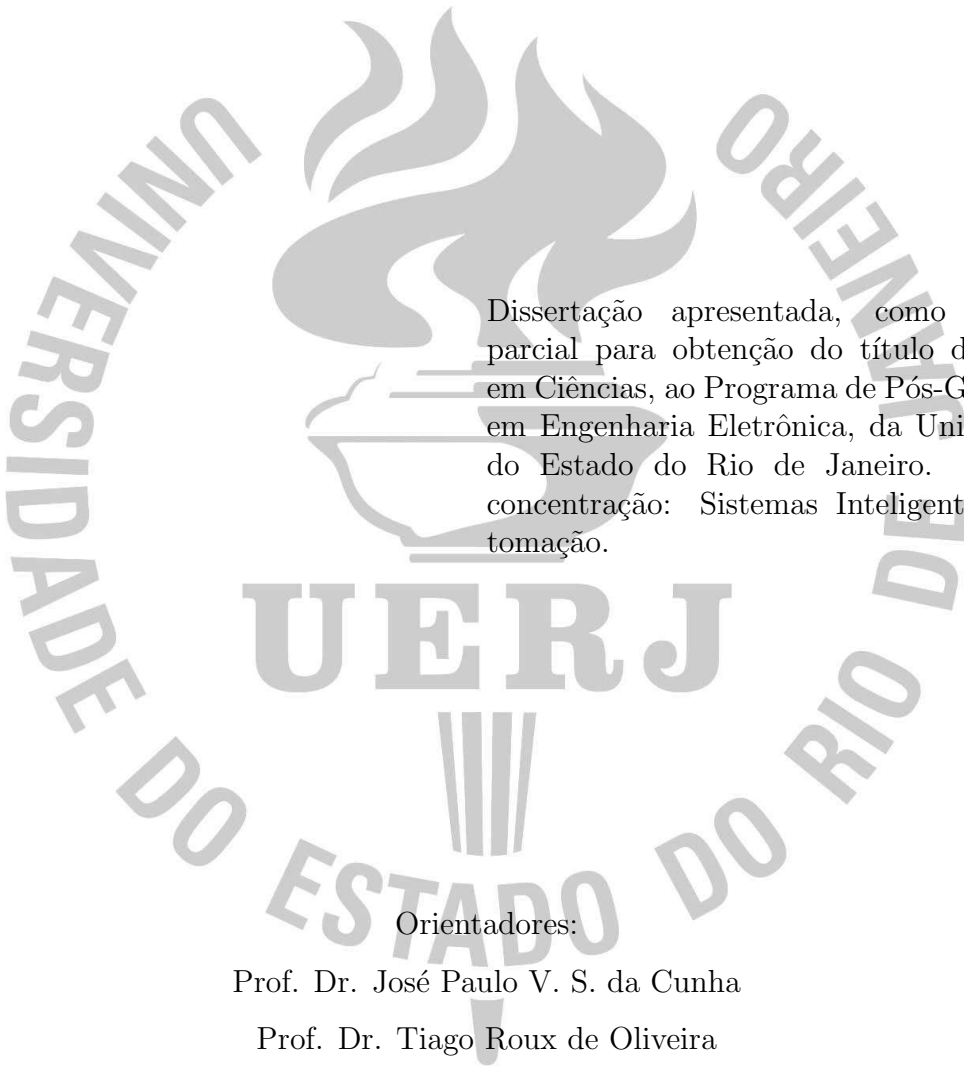
**Controle por modo deslizante para sistemas não-lineares  
com atraso**

Rio de Janeiro

2012

Camila Lobo Coutinho

**Controle por modo deslizante para sistemas não-lineares com atraso**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientadores:

Prof. Dr. José Paulo V. S. da Cunha

Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2012

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

C871 Coutinho, Camila Lobo.  
Controle por modo deslizante para sistemas não-lineares  
com atraso / Camila Lobo Coutinho. - 2012.  
102 f.

Orientadores: José Paulo Vilela Soares da Cunha; Tiago  
Roux de Oliveira.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio  
de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Eletrônica - Dissertação. 2. Controle por  
modo deslizante - Dissertação. 3. Sistemas não-lineares -  
Dissertação. I. Cunha, José Paulo Vilela Soares da. II. Oliveira,  
Tiago Roux de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.  
IV. Título.

CDU 681.511.4

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Camila Lobo Coutinho

**Controle por modo deslizante para sistemas não-lineares com atraso**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 04 de maio de 2012.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. José Paulo Vilela Soares da Cunha (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

---

Dr. Mario Cesar Mello Massa de Campos

Petróleo Brasileiro - PETROBRAS

---

Prof. Dr. Fernando Cesar Lizarralde

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ/COPPE

Rio de Janeiro

2012

*“O impossível só se torna possível quando lutamos por ele.”*

Camila Lobo Coutinho

*A Deus, por me amar incondicionalmente e me ajudar a ser uma pessoa melhor a cada dia.*

## **OFEREÇO**

*Aos meus pais e ao meu noivo, pessoas que tanto amo. À memória de Vera Soares Lobo, minha avó e madrinha, que sempre estará em meu coração.*

## **DEDICO**

## AGRADECIMENTOS

A Deus, fortaleza do meu ser, luz no meu caminhar e razão do meu viver. Só Ele sabe o tamanho do obstáculo que tive que enfrentar para realizar este Mestrado. Graças a Ele eu venci. Obrigada Deus!

Aos meus pais, Silvana Lobo e Márcio Christiano Coutinho, por me ensinarem os verdadeiros valores desta vida. Pela educação que me proporcionaram, além do amor e carinho que sempre me disponibilizaram. Amo muito vocês!

Ao meu noivo e futuro esposo, Jediael Pinto Júnior, por estar sempre ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis, me amando, apoiando e incentivando. Pela compreensão e paciência ao longo deste Mestrado, e pelo grande companheirismo demonstrado. Você é o amor da minha vida!

Aos meus orientadores do Mestrado, Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha e Prof. Tiago Roux de Oliveira, pelos vários ensinamentos que me foram ministrados e pela brilhante orientação no desenvolvimento desta Dissertação. Obrigada por tudo!

Ao Prof. João Manoel Gomes da Silva Jr., Dr. Mario Cesar Mello Massa de Campos e Prof. Fernando Cesar Lizarralde, por participarem da minha Banca de Mestrado. Pela disponibilidade em assistir a minha defesa e pela dedicação em ler meu trabalho, contribuindo com sugestões para torná-lo melhor. A vocês a minha gratidão pela sua atenção!

A todas as pessoas que, de perto ou distante, contribuíram para a realização deste sonho por um instante.

Rio de Janeiro, 04 de maio de 2012.

Camila Lobo Coutinho

## RESUMO

**COUTINHO**, Camila Lobo. *Controle por modo deslizante para sistemas não-lineares com atraso*. 102 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) — Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2012.

Nesta Dissertação são propostos dois esquemas de controle para sistemas não-lineares com atraso. No primeiro, o objetivo é controlar uma classe de sistemas incertos multivariáveis, de grau relativo unitário, com perturbações não-lineares descasadas dependentes do estado, e com atraso incerto e variante no tempo em relação ao estado. No segundo, deseja-se controlar uma classe de sistemas monovariáveis, com parâmetros conhecidos, grau relativo arbitrário, atraso arbitrário conhecido e constante na saída. Admitindo-se que o atraso na entrada pode ser deslocado para a saída, então, o segundo esquema de controle pode ser aplicado a sistemas com atraso na entrada. Os controladores desenvolvidos são baseados no controle por modo deslizante e realimentação de saída, com função de modulação para a amplitude do sinal de controle. Além disso, observadores estimam as variáveis de estado não-medidas. Em ambos os esquemas de controle propostos, garante-se propriedades de estabilidade globais do sistema em malha fechada. Simulações ilustram a eficácia dos controladores desenvolvidos.

Palavras-chave: Sistemas com atraso. Sistemas não-lineares. Controle por modo deslizante. Controle vetorial unitário. Realimentação de saída. Observadores de estado. Estabilização global.



## ABSTRACT

Two control schemes for nonlinear time-delay systems are proposed in this thesis. The purpose of the first scheme is to control a class of uncertain multivariable systems, with relative degree one, nonlinear unmatched state dependent disturbances, and uncertain time-varying state delay. The purpose of the second scheme is to control a class of single-input-single-output systems, with known parameters, arbitrary relative degree, with constant and known arbitrary output delay. Assuming that input delays can be transferred to the output, so the second scheme can be applied to systems with input time-delay. The developed controllers are based on sliding mode control and output feedback, with modulation function to the control signal amplitude. Furthermore, observers estimate unmeasured state variables. In both schemes, global stability properties of the closed loop system are guaranteed. Simulations illustrate the effectiveness of the proposed approaches.

Keywords: Time-delay systems. Nonlinear systems. Sliding mode control. Unit vector control. Output feedback. State observers. Global stabilization.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Formação da superfície de deslizamento pela intersecção das $i$ -ésimas superfícies existentes (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988). . . . .	30
Figura 2 - Ilustração do domínio de existência de um modo deslizante (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988). . . . .	31
Figura 3 - Campos vetoriais no modo deslizante, pelo método de Filippov (OLIVEIRA, 2007). . . . .	33
Figura 4 - Modo deslizante: (a) ideal e (b) com <i>chattering</i> (SLOTINE; LI, 1991). . . . .	37
Figura 5 - Estado ( $x_1$ e $x_2$ ) e sinal de controle ( $u$ ) do sistema de controle a estrutura variável (2.25)–(2.28), sem atraso. . . . .	39
Figura 6 - Plano de fase do sistema (2.25)–(2.28) com diferentes condições iniciais, sem atraso. . . . .	40
Figura 7 - Estado ( $x_1$ e $x_2$ ) e sinal de controle ( $u$ ) do sistema de controle a estrutura variável (2.25)–(2.27) e (2.29), com atraso $d = 0,1$ s. . . . .	41
Figura 8 - Estado ( $x_1$ e $x_2$ ) e sinal de controle ( $u$ ) do sistema de controle a estrutura variável (2.25)–(2.27) e (2.29), com atraso $d = 1$ s. . . . .	41
Figura 9 - Diagrama em blocos do esquema de controle proposto. . . . .	53
Figura 10- Saída do sistema $y_1(t)$ e saída do modelo de referência $y_{m1}(t)$ . . . . .	56
Figura 11- Saída do sistema $y_1(t)$ e saída do modelo de referência $y_{m1}(t)$ , destacando o transitório. . . . .	56
Figura 12- Saída do sistema $y_2(t)$ e saída do modelo de referência $y_{m2}(t)$ . . . . .	56
Figura 13- Saída do sistema $y_2(t)$ e saída do modelo de referência $y_{m2}(t)$ , destacando o transitório. . . . .	57
Figura 14- Variável de estado $\eta_1(t)$ do subsistema (3.48) e sua correspondente variável de estado atrasada $\eta_{1d}(t) = \eta_1(t - d(t))$ . . . . .	57
Figura 15- Variável de estado $\eta_2(t)$ do subsistema (3.48) e sua correspondente variável de estado atrasada $\eta_{2d}(t) = \eta_2(t - d(t))$ . . . . .	58
Figura 16- Sinal de controle $u_1$ . . . . .	58
Figura 17- Sinal de controle $u_2$ . . . . .	59

Figura 18- Estado medido $x_1$ e estado estimado $\hat{x}_1$ por um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,25$ s.....	73
Figura 19- Estado medido $x_2$ e estado estimado $\hat{x}_2$ por um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,25$ s.....	73
Figura 20- Saída medida $y$ e saída observada $\hat{y}$ por um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,25$ s. ....	73
Figura 21- Erros de estimação $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ de um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,25$ s. ....	74
Figura 22- Erro de observação $\tilde{y}$ de um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,25$ s.....	74
Figura 23- Estado medido $x_1$ e estado estimado $\hat{x}_1$ por um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s.....	75
Figura 24- Estado medido $x_2$ e estado estimado $\hat{x}_2$ por um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s.....	75
Figura 25- Saída medida $y$ e saída observada $\hat{y}$ por um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s. ....	76
Figura 26- Erros de estimação $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ de um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s. ....	76
Figura 27- Erro de observação $\tilde{y}$ de um único observador. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s.....	77
Figura 28- Estado medido $x_1$ e estado estimado $\hat{x}_1$ por dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s.....	77
Figura 29- Estado medido $x_2$ e estado estimado $\hat{x}_2$ por dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s.....	78
Figura 30- Saída medida $y$ e saída observada $\hat{y}$ por dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s.....	78
Figura 31- Erros de estimação $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ de dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s. ....	79
Figura 32- Erro de observação $\tilde{y}$ de dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída $d = 0,5$ s.....	79
Figura 33- Diagrama em blocos do esquema de controle proposto.....	83

Figura 34- Estado medido $x_1$ e estado estimado $\hat{x}_1$ por dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída $d = 0,5 s$ .	89
Figura 35- Estado medido $x_2$ e estado estimado $\hat{x}_2$ por dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída $d = 0,5 s$ .	89
Figura 36- Saída medida $y$ e saída observada $\hat{y}$ por dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída $d = 0,5 s$ .	90
Figura 37- Erros de estimação $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ de dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída $d = 0,5 s$ .	90
Figura 38- Erro de observação $\tilde{y}$ de dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída $d = 0,5 s$ .	91
Figura 39- Sinal de controle $u$ , com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída $d = 0,5 s$ .	91

## LISTA DE SIGLAS

DDE	<i>Differential-Difference Equations</i>
FDE	<i>Functional Differential Equations</i>
ISS	<i>Input-to-State Stable</i>
HFG	<i>High Frequency Gain</i>
HGO	<i>High Gain Observer</i>
MIMO	<i>Multi-Input-Multi-Output</i>
ODE	<i>Ordinary Differential Equations</i>
OSS	<i>Output-to-State Stable</i>
PDE	<i>Partial Differential Equations</i>
SISO	<i>Single-Input-Single-Output</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
SPR	<i>Strictly Positive Real</i>
UVC	<i>Unit Vector Control</i>
VSC	<i>Variable Structure Control</i>

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
1	<b>PRELIMINARES</b> .....	20
1.1	<b>Notação e Terminologia</b> .....	20
1.2	<b>Definições</b> .....	22
1.3	<b>Conceitos Básicos de Sistemas com Atraso</b> .....	24
1.3.1	<u>Notação</u> .....	24
1.3.2	<u>Condição Inicial</u> .....	25
1.3.3	<u>Teorema de Estabilidade de Lyapunov-Krasovskii</u> .....	25
1.3.4	<u>Deslocamento do Atraso</u> .....	26
2	<b>CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL POR MODO DESLIZANTE</b> .....	27
2.1	<b>Formulação do Problema</b> .....	28
2.2	<b>Superfície de Deslizamento</b> .....	29
2.2.1	<u>Modo Deslizante</u> .....	29
2.2.2	<u>Condição de Existência do Modo Deslizante</u> .....	30
2.2.3	<u>Método de Filippov</u> .....	31
2.2.4	<u>Método do Controle Equivalente</u> .....	34
2.3	<b>Lei de Controle</b> .....	35
2.4	<b><i>Chattering</i></b> .....	36
2.5	<b>Exemplo Numérico</b> .....	38
2.6	<b>Conclusões</b> .....	42
3	<b>CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO NO ESTADO</b> .....	43
3.1	<b>Formulação do Problema</b> .....	43
3.1.1	<u>Problema do Rastreamento Global</u> .....	46
3.1.2	<u>Equação do Erro</u> .....	47
3.2	<b>Observadores de Norma para Sistemas com Atraso</b> .....	48
3.2.1	<u>Classe de Sistemas Não-Lineares com Atraso</u> .....	48
3.2.2	<u>Projeto do Observador de Norma</u> .....	49

3.3	<b>Controle por Modo Deslizante e Realimentação de Saída</b> .....	52
3.4	<b>Resultados de Estabilidade</b> .....	53
3.5	<b>Exemplo Numérico</b> .....	54
3.6	<b>Conclusões</b> .....	59
4	<b>CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO NA SAÍDA</b> .....	60
4.1	<b>Observadores em Cascata</b> .....	60
4.1.1	<u>Formulação do Problema</u> .....	61
4.1.2	<u>Construção dos Observadores em Cascata</u> .....	62
4.1.3	<u>Observadores de Alto Ganho em Cascata</u> .....	68
4.1.4	<u>Exemplo Numérico</u> .....	71
4.2	<b>Controle por Modo Deslizante utilizando Observadores em Cascata</b> .....	79
4.2.1	<u>Formulação do Problema</u> .....	80
4.2.2	<u>Estabilização</u> .....	81
4.2.3	<u>Controle por Modo Deslizante e Realimentação de Saída</u> .....	82
4.2.4	<u>Análise de Estabilidade</u> .....	85
4.2.5	<u>Exemplo Numérico</u> .....	87
4.3	<b>Conclusões</b> .....	91
5	<b>CONCLUSÕES FINAIS</b> .....	93
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	96
	<b>APÊNDICE A: LEMAS AUXILIARES</b> .....	102

## INTRODUÇÃO

O atraso no tempo está presente em muitos processos industriais, químicos, físicos, biológicos, metalúrgicos, computacionais, entre outros, e é frequentemente a causa de instabilidade e baixo desempenho do sistema de controle (SI-AMMOUR; DJENNOUNE; BET-TAYEB, 2009; GOMES DA SILVA JR. et al., 2009). Os atrasos podem ser causados, por exemplo, pela medição de variáveis de processo, transmissões pneumáticas, hidráulicas ou mecânicas, processamento de informações, transmissão de dados e pelo tempo de transporte de produtos, como o escoamento de fluidos em dutos (CAMACHO; ROJAS; GARCÍA-GABÍN, 2007).

O efeito do atraso na estabilidade de sistemas dinâmicos é um problema de interesse contínuo dos pesquisadores. Um pequeno atraso já é capaz de instabilizar o controle e, além disso, comportamentos caóticos podem ocorrer em sistemas não-lineares com atraso (KOLMANOVSKII; NICULESCU; GU, 1999).

Os sistemas com atraso no tempo são também denominados sistemas com tempo morto ou de efeito retardado, sistemas hereditários, equações com argumentos divergentes ou equações de diferença diferenciais (*Differential-Difference Equations* - DDE). Pertencem a uma classe de equações diferenciais funcionais (*Functional Differential Equations* - FDE) que são de dimensão infinita, ao contrário de equações diferenciais ordinárias (*Ordinary Differential Equations* - ODE) que possuem dimensão finita, o que dificulta sua solução (RICHARD, 2003).

Segundo (RICHARD, 2003), há quatro motivos para tamanho interesse pelos sistemas com atraso:

- (1) O tempo morto ou efeito retardado é um problema aplicado e usual: os engenheiros necessitam que os modelos desenvolvidos se comportem como os processos reais. Há também uma crescente preocupação de melhorar o desempenho dos sistemas dinâmicos cada vez mais. Muitos processos possuem o efeito do atraso em sua dinâmica interna. Em (KOLMANOVSKII; MYSHKIS, 1999; NICULESCU, 2001), pode-se encontrar exemplos de atraso em biologia, química, economia, mecânica, física, fisiologia, dinâmica populacional e engenharia. Além disso, atuadores, sensores e redes de campo introduzem atraso no sistema de controle. Conseqüentemente, nas



áreas de tecnologia e comunicação, alguns temas relacionados ao atraso têm sido motivo de preocupação, tais como sistemas controlados por redes, transmissão de imagens, redes de alta velocidade, sistemas teleoperados, computação paralela e robótica.

- (2) Sistemas com atraso continuam “resistentes” a muitos controladores clássicos: pode-se pensar que uma solução seria substituir o atraso por funções de dimensão finita através de aproximações. Infelizmente, ignorar alguns efeitos representados adequadamente pelas FDEs não é uma alternativa geral e pode levar a resultados desastrosos em termos de estabilidade.
- (3) As propriedades do atraso são surpreendentes, visto que alguns estudos mostraram que a introdução voluntária do atraso pode beneficiar o controle, auxiliando no amortecimento e na estabilização do sistema, como em (SEURET et al., 2009; RICHARD et al., 1997; ABDALLAH et al., 1993). Por exemplo, o sistema

$$\ddot{y}(t) + y(t) - y(t - d) = 0$$

é instável para o atraso nulo  $d = 0$  s, mas assintoticamente estável para  $d = 1$  s.

- (4) Os sistemas com atraso, apesar de sua complexidade, frequentemente aparecem como modelos simples de dimensão infinita, na área bem complexa de equações diferenciais parciais (*Partial Differential Equations* - PDE). Como mencionado em (KOLMANOVSKII; MYSHKIS, 1992), “normalmente não é difícil mostrar que o aparecimento do atraso em uma equação diferencial parcial resulta de alguma simplificação essencial do modelo”.

Um atraso constante  $d$  pode ser modelado pela função de transferência  $e^{-ds}$ . Logo, a equação característica do sistema terá termos que dependem do atraso, podendo levar o controle à instabilidade. Para realizar o controle de sistemas lineares estáveis com parâmetros e atraso conhecidos, uma solução para compensação do atraso é o uso do *Preditor de Smith* (SMITH, 1957). Sua idéia chave é somar a saída do sistema com uma função de transferência projetada de maneira a cancelar o atraso do sinal resultante (CAMPOS; TEIXEIRA, 2006). Porém, para muitos sistemas não-lineares com atraso, não

podem ser utilizadas soluções convencionais como o *Preditor de Smith*, dificultando ainda mais o controle.

### Sistemas Não-Lineares com Atraso

Nesta Dissertação, serão considerados sistemas não-lineares com atraso. A principal motivação para se considerar esta classe de sistemas é a sua existência abundante no mundo real, visto que a maioria dos sistemas físicos são de natureza não-linear e possuem atraso. A não-linearidade dificulta o projeto do controlador, dado que os sistemas não-lineares são mais complexos que os lineares, podendo se comportar inclusive de forma caótica. Muitos exemplos de sistemas não-lineares podem ser encontrados em (KHALIL, 2002), como manipuladores robóticos, máquinas elétricas, circuitos eletrônicos, sistemas biológicos e diversos processos na indústria química, petroquímica, siderúrgica, automobilística, dentre outros.

Não há dúvidas de que, sempre que possível, é conveniente utilizar a linearização para simplificar a solução de sistemas não-lineares. Porém, esta linearização pode ocultar vários comportamentos presentes nos sistemas não-lineares, por dois motivos (KHALIL, 2002):

- (a) a linearização é uma aproximação em torno do ponto de operação e, portanto, só possibilita prever o comportamento *local* do sistema na vizinhança deste ponto. Assim, o comportamento *global* dos sistemas não-lineares não pode ser previsto pelo uso da linearização.
- (b) a dinâmica dos sistemas não-lineares é bem mais complexa que dos sistemas lineares. Há alguns fenômenos que só ocorrem na presença de não-linearidades, ou seja, não podem ser descritos ou previstos por modelos lineares. Dentre estes fenômenos, pode-se citar o escape em tempo finito, múltiplos pontos de equilíbrio isolados, ciclos limite, comportamento caótico, entre outros.

A teoria de sistemas não-lineares é importante não somente para explicar fenômenos e comportamentos tipicamente não-lineares, mas também para servir de base para novos conceitos, metodologias e objetivos de controle, como: observadores não-lineares, sistema inverso e dinâmica não-linear dos zeros, realimentação de saída de sistemas incertos, estabilidade entrada-saída, estabilidade entrada-estado, realimentação de estados

para sistemas incertos, linearização por realimentação, regulação e rastreamento de saída. Existem ainda outras abordagens importantes de controle que envolvem não-linearidades intrínsecas, como por exemplo, o controle neural, o controle *fuzzy* e os sistemas híbridos (chaveados) de controle (OLIVEIRA, 2010).

Com a facilidade atual de se implementar algoritmos de controle de complexidade quase ilimitada em computadores e microcontroladores, a abordagem de sistemas não-lineares possibilita sintetizar esquemas de controle mais eficientes do que aqueles que utilizam apenas o controle linear.

### **Estimação do Estado Não-Medido**

Grande parte da teoria moderna de projeto de controle não-linear baseia-se no conhecimento do estado do sistema. Entretanto, muitas vezes só é possível medir parte das variáveis de estado devido a aspectos técnicos ou econômicos, como por exemplo, impossibilidade da instalação dos sensores em alguns locais e custo de sua aquisição. Sendo assim, as demais variáveis não estão disponíveis, e precisam ser estimadas.

No caso de sistemas não-lineares, a construção de observadores para estimação do estado torna-se mais complexa, pois não se pode aplicar o *Princípio da Separação*, que permite realizar o projeto do controlador e do observador de modo independente. Como mencionado anteriormente, sistemas não-lineares podem apresentar o fenômeno do *escape em tempo finito* (KHALIL, 2002), que pode não ser detectável via medição da saída, ou seja, alguns estados do sistema podem escapar enquanto a saída permanece limitada, o que dificulta o projeto destes observadores.

Além disso, a presença do atraso nos sistemas não-lineares torna o controle ainda mais difícil, visto que o observador deve informar o estado atual do sistema para o controlador, a partir da estimação do estado atrasado.

### **Controle a Estrutura Variável por Modo Deslizante para Sistemas Não-Lineares com Atraso**

O controle a estrutura variável por modo deslizante é um método de controle robusto e eficiente para se controlar sistemas não-lineares, mesmo com a presença de incertezas, que podem ser causadas por dinâmicas não-modeladas, variações nos parâmetros

da planta ou simplificações de plantas complexas (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

O controle a estrutura variável caracteriza-se pela utilização de um conjunto de leis de controle, chaveadas de acordo com uma regra de decisão (função de chaveamento), mudando assim a estrutura do sistema em malha fechada. Desta maneira, é possível combinar propriedades úteis de cada uma das estruturas do sistema realimentado. Adicionalmente, podem ser obtidas novas propriedades que não são inerentes a nenhuma das estruturas utilizadas, por exemplo, um sistema assintoticamente estável pode ser constituído de duas estruturas instáveis (NUNES, 2004).

Outra característica importante deste tipo de controle é a possibilidade de serem obtidas trajetórias que descrevem um novo tipo de movimento, denominado *modo deslizante* (UTKIN, 1978), que pode ser invariante com relação a incertezas da planta. Geralmente, as funções de chaveamento são projetadas para que as trajetórias do sistema alcancem e sejam mantidas em uma superfície no espaço de estado desejada (*superfície de deslizamento*), garantindo assim, a ocorrência do modo deslizante.

Os sistemas com controle a estrutura variável por modo deslizante oferecem vantagens significativas, tais como: estabilidade global, capacidade de rejeitar perturbações não-modeladas, bom comportamento transitório, insensibilidade a não-linearidades da planta e a variações de parâmetros (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

Entretanto, a presença do atraso faz com que a trajetória do estado não se mantenha sobre superfície de deslizamento, mas sim oscile em uma vizinhança desta superfície, ocasionando o fenômeno *chattering* (trepidação), que deteriora o desempenho do controle e pode levar o sistema à instabilidade (UTKIN; GULDNER; SHI, 1999).

## Objetivo deste Trabalho

O objetivo deste trabalho é propor estratégias de controle por modo deslizante para sistemas com atraso no estado e para sistemas com atraso na saída.

## Organização da Dissertação

No **Capítulo 1**, são apresentadas definições e conceitos preliminares, com ênfase em sistemas com atraso.

No **Capítulo 2**, são revisados os conceitos básicos de controle a estrutura variável

por modo deslizante, além de apresentar simulações para ilustrar o efeito do atraso neste tipo de controle.

No **Capítulo 3**, é proposto um controlador por modo deslizante e realimentação de saída para sistemas incertos não-lineares, multivariáveis, de grau relativo arbitrário, com atraso incerto e variante no tempo em relação ao estado. Apresenta-se também o desenvolvimento de observadores para estimação da norma do estado.

No **Capítulo 4**, são apresentados os observadores em cascata desenvolvidos por (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012) e proposto um controlador por modo deslizante e realimentação de saída para sistemas não-lineares, monovariáveis, de grau relativo arbitrário, com atraso arbitrário conhecido e constante na saída, utilizando tais observadores em cascata para estimação do estado não-medido.

Por fim, no **Capítulo 5**, são apresentadas as conclusões finais e as contribuições deste trabalho, bem como são propostas sugestões para a sua continuação.

## 1 PRELIMINARES

Neste capítulo são revisados alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento dos algoritmos de controle propostos, bem como são apresentadas as notações utilizadas ao longo desta Dissertação.

### 1.1 Notação e Terminologia

A notação e terminologia utilizadas ao longo desta Dissertação são apresentadas a seguir.

- O máximo intervalo de tempo de definição de uma dada solução da equação diferencial que rege a dinâmica da planta em malha fechada é representado por  $\mathcal{I}_0 := [0, t_M)$ , onde  $t_M$  pode ser finito ou infinito. Para qualquer  $t_* \in \mathcal{I}_0$  seja  $\mathcal{I}_* := [t_*, t_M)$ .
- A norma Euclidiana de um vetor  $x$  e a correspondente norma induzida de uma matriz  $A$  são denotadas por  $\|x\|$  e  $\|A\|$ , respectivamente, enquanto que a norma  $\mathcal{L}_{\infty e}$  de um sinal  $x(t) : \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$  é definida como em (DESOER; VIDYASAGAR, 1975) e (CUNHA, 2004), sendo descrita por:

$$\|x_{t,t_*}\| := \sup_{t_* \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\| .$$

Para o instante inicial  $t_* = 0$ , a notação  $\|x_t\|$  é adotada (IOANNOU; SUN, 1996).

- A matriz  $I_n$  é a matriz identidade  $(n, n)$ .
- Os autovalores máximo e mínimo da matriz  $A$  são representados por  $\lambda_{max}(A) := \max_i \{\text{Re}\{\lambda[A]\}\}$  e  $\lambda_{min}(A) := \min_i \{\text{Re}\{\lambda[A]\}\}$ , respectivamente.
- A matriz  $A^T$  denota a matriz transposta de  $A$ .
- Uma função  $\Psi : \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$  pertence à classe  $\mathcal{K}$  se for contínua, crescente e  $\Psi(0) = 0$ . Diz-se que  $\Psi(a) \in \mathcal{K}_{\infty}$  se  $\Psi(a) \in \mathcal{K}$  e  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Psi(a) = +\infty$ . Uma função  $\pi : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$  pertence à classe  $\mathcal{KL}$  se, para cada  $t \in \mathfrak{R}_+$ ,  $\pi(\cdot, t) \in \mathcal{K}$  e, para cada  $a \in \mathfrak{R}_+$ ,  $\pi(a, \cdot)$  é decrescente com  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \pi(a, t) = 0$ .

Estas funções  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_{\infty}$  e  $\mathcal{KL}$  foram definidas como em (KHALIL, 2002, p. 144).

- Eventualmente, o símbolo  $\pi$  também representará funções  $\mathcal{KL}$  exponenciais genéricas da forma:

$$\pi(\cdot, t) = \Psi(\cdot)e^{-\gamma(t-t_*)}, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*,$$

onde  $\gamma > 0$  é uma constante genérica e  $\Psi \in \mathcal{K}_\infty$  é função da norma dos estados (em  $t = t_*$ ).

- Adotam-se as definições encontradas em (SLOTINE; LI, 1991), (KHALIL, 2002) e (IO-ANNOU; SUN, 1996) para funções ou matrizes de transferência estritamente reais positivas (*strictly positive real* - SPR). No caso escalar, as condições necessárias para que uma função de transferência  $W(s)$  seja SPR são:  $W(s)$  deve ser estritamente estável e de fase mínima, ter grau relativo 0 ou 1 e a curva de Nyquist de  $W(jw)$  deve estar inteiramente no semi-plano direito do plano complexo (o deslocamento de fase do sistema a entradas senoidais deve ser sempre menor que  $90^\circ$ ).
- Uma função  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$  é dita como sendo positiva definida se  $V(x) > 0$  para todo  $x$  diferente de zero e  $V(0) = 0$ . Ela é positiva semi-definida se  $V(0) = 0$  e  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$ . A função  $V(x)$  é negativa definida (semi-definida), se  $-V(x)$  for positiva definida (semi-definida). Uma função  $V(x)$  é dita como sendo radialmente ilimitada, ou própria, se  $V(x)$  tende para  $+\infty$  quando  $|x|$  tende para  $+\infty$ . Uma função  $V$  é suave se possui, em todos os pontos, derivadas de todas as ordens.
- O grau relativo é o número de vezes que a saída  $y(t)$  precisa ser diferenciada em relação ao tempo até que a entrada  $u$  apareça explicitamente na expressão analítica desta última diferenciação.
- Em relação à estabilização dos sistemas com atraso, assume-se que
  - (i) a *estabilidade local* é a convergência das trajetórias do sistema à origem, para toda condição inicial contida em um domínio de estabilidade  $\mathcal{D}$ .
  - (ii) a *estabilidade global* é a convergência das trajetórias do sistema à origem, para qualquer condição inicial.

## 1.2 Definições

Considere o seguinte sistema não-linear:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.1)$$

onde  $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$  é localmente Lipschitz com  $f(0, 0) = 0$ .

Por conveniência, adota-se que a origem  $x = 0$  é o *ponto de equilíbrio* do sistema (1.1) em  $t = 0$ . Sendo assim,

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.2)$$

É importante ressaltar que qualquer ponto de equilíbrio pode ser deslocado para a origem por meio de uma mudança de variáveis (KHALIL, 2002).

As definições a seguir são enunciadas segundo (KHALIL, 2002).

**Definição 1.** *O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (1.1) é*

- *estável se, para cada  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , tal que*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (1.3)$$

- *uniformemente estável se, para cada  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , independente de  $t_0$ , tal que a condição (1.3) seja satisfeita.*
- *instável se não é estável.*
- *assintoticamente estável se for estável e se existe uma constante positiva  $c = c(t_0)$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , para todo  $\|x(t_0)\| < c$ .*
- *uniformemente assintoticamente estável se for uniformemente estável e se existe uma constante positiva  $c$ , independente de  $t_0$ , tal que para todo  $\|x(t_0)\| < c$ ,  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente em  $t_0$ , ou seja, para cada  $\eta > 0$ , existe um  $T = T(\eta) > 0$  tal que*

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.4)$$



- *globalmente uniformemente assintoticamente estável se for uniformemente estável, com  $\delta(\epsilon)$  escolhido de maneira a satisfazer  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = \infty$ , e, para cada par de números positivos  $\eta$  e  $c$ , existe  $T = T(\eta, c)$ , tal que*

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.5)$$

**Definição 2.** *Considerando as funções de classe  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{KL}$ , o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (1.1) é*

- *uniformemente estável se e somente se existe uma função  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  e uma constante positiva  $c$ , independente de  $t_0$ , tal que*

$$\|x(t)\| < \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.6)$$

- *assintoticamente uniformemente estável se e somente se existe uma função  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  e uma constante positiva  $c$ , independente de  $t_0$ , tal que*

$$\|x(t)\| < \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.7)$$

- *globalmente assintoticamente uniformemente estável se e somente se a condição (1.7) for satisfeita para qualquer estado inicial  $x(t_0)$ .*

**Definição 3.** *O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (1.1) é*

- *exponencialmente estável se existe as constantes positivas  $c$ ,  $k$  e  $\lambda$  tal que*

$$\|x(t)\| < k \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.8)$$

- *globalmente exponencialmente estável se a condição (1.8) for satisfeita para qualquer estado inicial  $x(t_0)$ .*

Agora, para as definições a seguir, considere o seguinte sistema não-linear geral, com estado  $x$ , entrada  $u$  e saída  $y$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \\ y &= h(x), \quad y \in \mathbb{R}^p, \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde  $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$  é localmente Lipschitz com  $f(0,0) = 0$ , e  $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$  é contínua com  $h(0) = 0$ . A entrada  $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}^m$  é um mapeamento mensurável e localmente essencialmente limitado ( $u \in \mathcal{L}_\infty$ ). A solução definida em algum intervalo máximo  $[0, t_{max}(x_0, u))$  de existência é denotada por  $x(t, x_0, u)$  para cada condição inicial  $x_0$  e entrada  $u$ .

**Definição 4.** *O sistema (1.9) é dito ser estável da entrada para o estado (Input-to-State Stable - ISS), se existirem  $\beta \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma \in \mathcal{K}$  (também referido como ganho-ISS), tais que para todo  $x_0, u \in \mathcal{L}_\infty$  e  $\forall t \in [0, t_{max})$ :*

$$\|x(t, x_0, u)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u_t\|). \quad (1.10)$$

**Definição 5.** *O sistema (1.9) é dito ser estável da entrada/saída para o estado (input-output-to-state stable - IOSS), se existirem  $\beta \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$ , tais que para todo  $x_0, u \in \mathcal{L}_\infty$  e  $\forall t \in [0, t_{max})$ :*

$$\|x(t, x_0, u)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma_1(\|u_t\|) + \gamma_2(\|y_t\|). \quad (1.11)$$

Se (1.11) for satisfeita com  $\gamma_1(\|u_t\|) \equiv 0$ , o sistema é denominado estável no sentido saída-estado (*output-to-state stable - OSS*) (SONTAG; WANG, 1995).

### 1.3 Conceitos Básicos de Sistemas com Atraso

A seguir são resumidos os conceitos básicos para sistemas com atraso, utilizados nesta Dissertação.

#### 1.3.1 Notação

A evolução de um sistema com atraso depende não somente de seu estado atual, mas também de seu passado. Para representar esta relação de causa e efeito, são utilizadas equações diferenciais funcionais (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003).

Portanto, considere a seguinte notação para equações diferenciais funcionais de sistemas com atraso (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003)

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1.12)$$

onde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $f : \mathfrak{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-d, 0], \mathfrak{R}^n)$ ,  $d$  é um número real positivo que representa o atraso, e  $x_t$  é o estado atrasado em  $d$ , ou seja,  $x_t = x(t - d)$ .

### 1.3.2 Condição Inicial

Devido à presença do atraso, a solução do sistema (1.12) não pode ser unicamente determinada a partir dos valores das variáveis de estado do sistema no instante  $t = t_0$ . Desta maneira, a solução a partir de um instante inicial  $t_0$  é caracterizada pelo conhecimento dos valores assumidos pelo vetor de estado  $x(t)$  no intervalo  $[t_0 - d, t_0]$ . Logo, a condição inicial deixa de ser um ponto no espaço  $\mathfrak{R}^n$  para ser uma função nesse espaço, e é dada por (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003; GHIGGI, 2008)

$$x_{t_0}(\theta) = x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-d, 0]. \quad (1.13)$$

### 1.3.3 Teorema de Estabilidade de Lyapunov-Krasovskii

Este teorema é de fundamental importância para análise de estabilidade de sistemas com atraso, bem como para síntese dos controladores utilizados nestes sistemas (GHIGGI, 2008).

Ele consiste em interpretar a evolução das soluções no espaço das funções, e é enunciado a seguir.

**Teorema 1. (Teorema de Estabilidade de Lyapunov-Krasovskii)** (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003, p. 12) *Suponha que  $f : \mathfrak{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  em (1.12) e que  $u, v, w : \bar{\mathfrak{R}}_+ \rightarrow \bar{\mathfrak{R}}_+$  são funções contínuas não-decrescentes, sendo  $u(s)$  e  $v(s)$  positivas para  $s > 0$ , e  $u(0) = v(0) = 0$ . Se existe um funcional diferenciável contínuo  $V : \mathfrak{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que*

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c), \quad (1.14)$$

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|), \quad (1.15)$$

então, o sistema (1.12) é uniformemente estável.

Se  $w(s) > 0$  para  $s > 0$ , logo o sistema (1.12) é uniformemente assintoticamente estável.

Adicionalmente, se  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ , então o sistema (1.12) é uniformemente

*assintoticamente estável.*

*Demonstração.* Ver (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003, pp. 12–13). □

### 1.3.4 Deslocamento do Atraso

Considera-se o seguinte sistema com atraso no sinal de saída:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= h(x(t-d)),\end{aligned}\tag{1.16}$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathfrak{R}$  é a entrada de controle e  $d$  é o atraso constante. O sinal de saída  $y \in \mathfrak{R}$  é uma função do estado  $x$  atrasado, isto é, no instante de tempo  $t-d$ .

Realizando a mudança de variáveis

$$\bar{x}(t) := x(t-d),\tag{1.17}$$

tem-se

$$\bar{x}(t+d) = x(t),\tag{1.18}$$

então

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t+d) &= f(\bar{x}(t+d), u(t)), \\ y(t) &= h(\bar{x}(t)).\end{aligned}\tag{1.19}$$

Definindo-se

$$\tau := t+d,\tag{1.20}$$

o sistema (1.16) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(\tau) &= f(\bar{x}(\tau), u(\tau-d)), \\ y(\tau) &= h(\bar{x}(\tau)),\end{aligned}\tag{1.21}$$

no qual o tempo foi renomeado  $\tau$  e o atraso foi deslocado da saída  $y$  para a entrada  $u$ .

## 2 CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL POR MODO DESLIZANTE

Na formulação de qualquer problema de controle, sempre haverá, por menor que seja, diferenças entre o sistema real e o seu modelo matemático. Essas diferenças podem ser causadas por dinâmicas não-modeladas, variações nos parâmetros da planta ou simplificações de plantas complexas. O controlador projetado deve ser capaz de atingir o desempenho desejado mesmo com a presença destas incertezas. Um método de controle robusto para esta situação é o denominado Controle por Modo Deslizante (*Sliding Mode Control* - SMC) (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

O SMC pode ser realizado pelo Controle a Estrutura Variável (*Variable Structure Control* - VSC). O VSC foi inicialmente proposto e elaborado por volta da década de 1960, na antiga União Soviética, por Emel'yanov e Barbashin. Entretanto, este conceito só foi difundido para outros países na década de 1970, quando foram publicados um livro por Itkis (1976) e um artigo por Utkin (1977), ambos em inglês. No trabalho pioneiro de Utkin, o sistema considerado era linear de segunda ordem. Desde então, o VSC foi desenvolvido e aplicado a uma grande variedade de sistemas com características distintas, dentre os quais destacam-se os sistemas não-lineares, multivariáveis, estocásticos e modelos em tempo discreto (HUNG; GAO; HUNG, 1993).

Os sistemas de controle a estrutura variável são caracterizados por um conjunto de leis de controle por realimentação e uma regra de decisão. A regra de decisão, denominada função de chaveamento, tem como entrada algumas medidas que determinam o comportamento atual do sistema, e produz como saída o controlador por realimentação específico a ser utilizado naquele instante de tempo. Assim, o resultado é um sistema com estrutura variável, formado pela combinação de subsistemas, onde cada subsistema tem uma estrutura de controle fixa e é válido para uma determinada região de operação. Logo, o VSC é um método de controle não-linear que altera a dinâmica do sistema através da aplicação de um sinal de controle descontínuo, chaveado em alta velocidade, entre duas ou mais estruturas de controle, produzindo um novo sistema (EDWARDS; SPURGEON, 1998; UTKIN, 1978).

No controle por modo deslizante, o VSC é projetado para conduzir e manter o estado do sistema na superfície de deslizamento. Esta superfície é projetada de maneira a garantir que o sistema tenha o desempenho desejado e seja imune a perturbações. Quando

o sistema atinge a superfície de deslizamento e nela permanece, diz-se que está na condição de deslizamento ou em modo deslizante, funcionando idealmente como um controlador de ganho infinito. Logo, ao contrário dos controladores baseados em dinâmica inversa, os efeitos das incertezas paramétricas e das perturbações são anulados, tornando o sistema robusto e fazendo com que o objetivo do controle seja alcançado (UTKIN; GULDNER; SHI, 1999; RIBEIRO, 2006).

A existência de um modo deslizante exige a estabilidade da trajetória do estado para a superfície de deslizamento. Portanto, a lei de controle deve ser chaveada para assegurar que a trajetória do estado alcance a superfície de deslizamento e nela permaneça durante todo o tempo subsequente (UTKIN, 1992; DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988).

Desta maneira, um projeto de VSC se divide em duas etapas (EDWARDS; SPURGEON, 1998):

- (a) Projeto de uma superfície de deslizamento, de maneira que a dinâmica da planta, quando em modo deslizante, tenha uma trajetória desejada;
- (b) Desenvolvimento de uma lei de controle que satisfaça as condições de existência do modo deslizante e alcance da superfície de deslizamento.

Apesar do VSC ser um método de controle atrativo para sistemas incertos e com perturbações, seu desempenho é prejudicado pela presença do atraso, visto que o chaveamento depende dos estados atuais. Caso o efeito do atraso seja significativo, o chaveamento poderá não direcionar ou não ser capaz de manter a trajetória do estado na superfície de deslizamento, podendo levar o sistema à instabilidade (UTKIN; GULDNER; SHI, 1999).

## 2.1 Formulação do Problema

Cosidere a seguinte classe de sistemas não-lineares:

$$\dot{x} = \hat{f}(t, x, u) = f(t, x) + B(t, x)u(t), \quad (2.1)$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathfrak{R}^l$  é o sinal de controle,  $f(t, x) \in \mathfrak{R}^n$  e  $B(t, x) \in \mathfrak{R}^{n \times l}$ . Adicionalmente, os elementos de  $f(t, x)$  e  $B(t, x)$  são assumidos contínuos, com derivadas contínuas e limitadas em relação a  $x$  e  $t$ .

## 2.2 Superfície de Deslizamento

A superfície de deslizamento é uma região do espaço de estado onde se garante que o sistema tenha um comportamento predefinido e estável. Ela é determinada pela intersecção de  $l$  superfícies de chaveamento contidas no  $\mathfrak{R}^n$ . Estas superfícies de chaveamento são projetadas de tal maneira que conduzam e mantenham o estado na superfície de deslizamento.

Seja a superfície de deslizamento dada por

$$\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0, \quad (2.2)$$

onde  $S \in \mathfrak{R}^{n \times l}$  é a matriz da superfície de deslizamento.

Cada entrada  $u_i(t)$  do controle chaveado  $u(t) \in \mathfrak{R}^l$  tem a seguinte forma

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \text{se } \sigma_i(x(t)) > 0 \\ u_i^-(t, x) & \text{se } \sigma_i(x(t)) < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

para  $i = 1, \dots, l$ . O termo  $\sigma_i(x(t))$  define a  $i$ -ésima superfície de chaveamento associada à superfície (2.2).

### 2.2.1 Modo Deslizante

Uma vez projetada a superfície de deslizamento, o próximo passo é garantir a existência de um modo deslizante.

Um modo deslizante existe se, na vizinhança da superfície de deslizamento  $\sigma(x(t)) = 0$ , a tangente ou vetor velocidade da trajetória do estado sempre estiver direcionado para a superfície de deslizamento. Assim sendo, se a trajetória do estado intercepta a superfície de deslizamento, o valor da trajetória do estado se manterá dentro de uma vizinhança  $\epsilon$  de  $\sigma(x(t)) = 0$ . Se o modo deslizante existe em  $\sigma(x(t)) = 0$ , então  $\sigma(x(t))$  é chamado de superfície de deslizamento.

O modo deslizante não precisa existir na  $i$ -ésima superfície de deslizamento  $\sigma(x_i(t)) = 0$  separadamente. No entanto, sua existência deve ser garantida na intersecção de todas as superfícies, conforme mostrado na Figura 1.

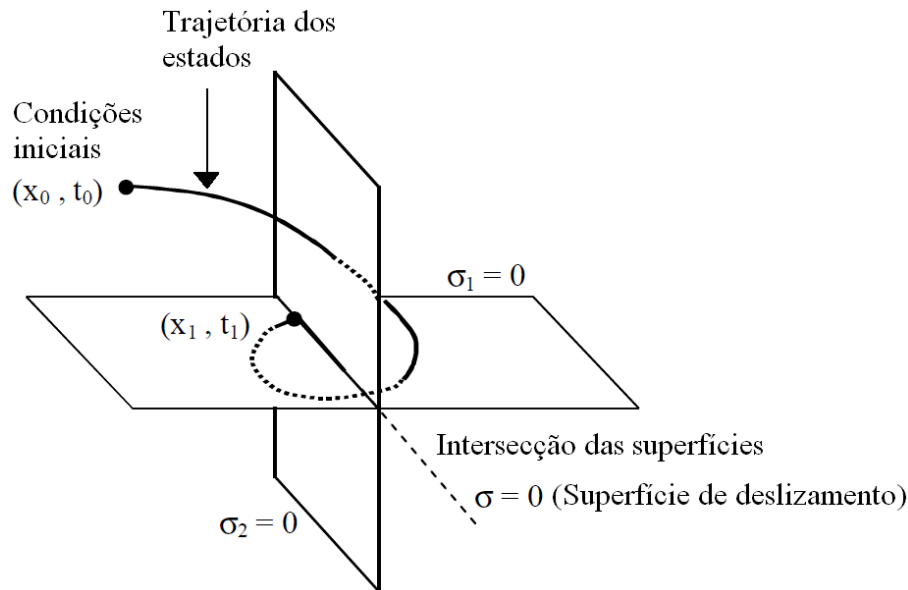


Figura 1 - Formação da superfície de deslizamento pela intersecção das  $i$ -ésimas superfícies existentes (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988).

### 2.2.2 Condição de Existência do Modo Deslizante

Para que exista um modo deslizante, é necessário que haja estabilidade na trajetória do estado para a superfície de deslizamento  $\sigma(x(t)) = 0$  ou, no mínimo, para uma vizinhança desta superfície. Logo, os estados devem se aproximar da superfície assintoticamente. A maior vizinhança é denominada região de atração. Geometricamente, a derivada no tempo do vetor de estado deverá apontar para a superfície de deslizamento, na região de atração.

O problema da existência do modo deslizante assemelha-se a um problema de estabilidade generalizada, onde o segundo método de Lyapunov fornece um conjunto natural para a análise. Então, a estabilidade para a superfície de deslizamento requer a seleção de uma função de Lyapunov generalizada  $V(x, t)$ , que é definida positiva e tem uma derivada negativa em relação ao tempo, na região de atração (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988).

Assim, a seguinte definição e teorema são enunciados.

**Definição 6.** *Um domínio  $D$  no espaço fechado  $\sigma = 0$  é um domínio de um modo deslizante se para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que qualquer movimento iniciado dentro de uma vizinhança  $\delta$  de  $D$  pode deixar uma vizinhança  $\epsilon$  de  $D$  somente através da vizinhança  $\epsilon$  da fronteira de  $D$  (EDWARDS; SPURGEON, 1998, p. 59), como ilustrado na Figura 2.*



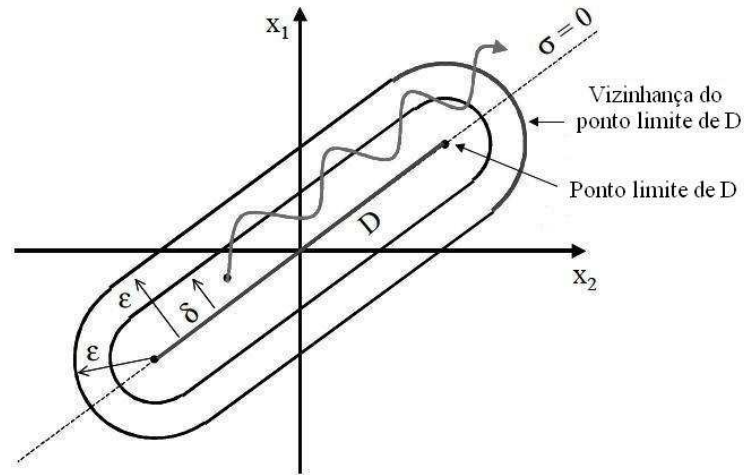


Figura 2 - Ilustração do domínio de existência de um modo deslizante (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988).

**Teorema 2.** *Para o domínio  $D$  ser o domínio de um modo deslizante é suficiente que, em certa região de  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  onde  $D \subset \Omega$ , exista uma função escalar diferenciável contínua  $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça as seguintes condições (EDWARDS; SPURGEON, 1998, pp. 59–60):*

- (1)  *$V(t, x, \sigma)$  é definida positiva em relação à  $\sigma$ , ou seja,  $V(t, x, \sigma) > 0$  se  $\sigma \neq 0 \forall x \in \Omega$ , e nas esferas  $\|\sigma\| = r \forall x \in \Omega$ :*

$$\begin{aligned} \inf_{\|\sigma\|=r} V(t, x, \sigma) &= h_r, \\ \sup_{\|\sigma\|=r} V(t, x, \sigma) &= H_r > 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $H_r$  e  $h_r$  dependem de  $r$ , e  $h_r > 0$  para  $r \neq 0$ .

- (2) *A derivada de  $V(t, x, \sigma)$  em relação ao tempo tem um supremo negativo para todo  $x \in \Omega$ , exceto nos pontos da superfície de deslizamento onde a ação de controle é indefinida e, por isso, a derivada de  $V(t, x, \sigma)$  não existe.*

### 2.2.3 Método de Filippov

Devido à utilização de chaveamento no controle à estrutura variável, as equações diferenciais apresentam lado direito descontínuo, ou seja, descontinuidade no controle. Sendo assim, não é possível determinar uma constante de Lipschitz a fim de garantir unicidade de solução para o sistema.

O método proposto por (FILIPPOV, 1964) é adequado para tratar este tipo de equações diferenciais descontínuas. Basicamente, as soluções no sentido de Filippov são absolutamente contínuas como funções do tempo e também contínuas em relação às condições iniciais.

A definição da solução no sentido de Filippov é dada a seguir (FILIPPOV, 1964).

**Definição 7.** *Seja a equação diferencial*

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.5)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função mensurável (no sentido de Lebesgue) e definida para quase todo  $(x, t)$  em um domínio  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Além disso, para qualquer subconjunto compacto  $D \subset M$ , existe uma função  $A(t)$  finita localmente integrável, tal que

$$\|f(x, t)\| \leq A(t) \quad (2.6)$$

para quase todo  $(x, t)$  em  $D$ .

Uma função vetorial  $x(\cdot)$  é denominada uma solução de (2.5) em  $[t_o, t_1]$ , se  $x(\cdot)$  é absolutamente contínua em  $[t_o, t_1]$  e se para quase todo  $t \in [t_o, t_1]$ ,

$$\dot{x} \in K[f(x, t)] \quad (2.7)$$

com

$$K[f(x, t)] = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{conv}} f[B(x, \delta) - N, t], \quad (2.8)$$

onde  $\bigcap_{\mu N = 0}$  representa a intersecção de todos os conjuntos  $N$  de medida nula (no sentido de Lebesgue),  $\overline{\text{conv}}$  denota o fecho convexo e  $B(x, \delta)$  é uma bola de raio  $\delta$  centrada em  $x$ . O termo  $\mu$  é a medida no sentido de Lebesgue.

O campo vetorial que determina a solução de (2.5) em cada ponto da superfície de descontinuidade pertence ao conjunto convexo fechado mínimo que contém todos os valores de  $f(x)$ , quando  $x$  varia em quase toda a vizinhança  $\delta$  (com  $\delta \rightarrow 0$ ) do ponto considerado, ou seja, a vizinhança completa exceto um conjunto de medida nula. A relação (2.7) é conhecida como uma inclusão diferencial.

Para uma dada trajetória, os pontos da superfície de descontinuidade constituem um conjunto de medida nula em uma vizinhança da superfície e, portanto, podem ser rejeitados, embora o campo vetorial nestes pontos seja incerto. Assim, a possibilidade de rejeitar um conjunto de medida nula é que permite a definição do campo vetorial em uma superfície de chaveamento descontínua.

Caso ocorra deslizamento em uma vizinhança da superfície  $\sigma(x)$ , o campo vetorial  $f^*$  em cada ponto desta superfície pode ser determinado a partir dos campos vetoriais  $f^+$  e  $f^-$ , ilustrados na Figura 3. Então, é obtido um fecho convexo mínimo, que é a base do método de Filippov.

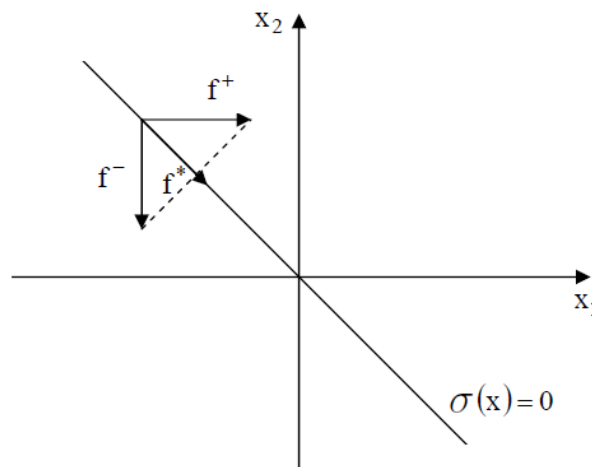


Figura 3 - Campos vetoriais no modo deslizante, pelo método de Filippov (OLIVEIRA, 2007).

Uma vez que, por definição, o deslizamento ideal ocorre na superfície de deslizamento, o campo vetorial  $f^*$  permanece em um plano tangencial à esta superfície. Desta maneira, de acordo com Filippov, a equação para o deslizamento ideal em relação ao sistema (2.5) é dada por

$$\dot{x} = f^*(x, t), \quad (2.9)$$

com  $f^*$  dado pela combinação linear convexa

$$f^* = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-, \quad (2.10)$$

onde  $\alpha \in [0, 1]$  é um escalar que depende das magnitudes e direções dos campos vetoriais  $f^+$ ,  $f^-$  e do gradiente da superfície de deslizamento  $\sigma(x)$ .

A partir da equação (2.9), é possível garantir a existência e unicidade da solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo aplicadas, por exemplo, em sistemas com controle a estrutura variável.

#### 2.2.4 Método do Controle Equivalente

O método do controle equivalente proposto por (UTKIN, 1978) é utilizado para determinar o movimento do sistema restrito à superfície de deslizamento  $\sigma(x(t)) = 0$ . Em outras palavras, é o sinal de controle necessário para manter o modo deslizante ideal, isto é, sobre a superfície de deslizamento (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

Considere que a trajetória do estado intercepta a superfície de deslizamento em um instante  $t_0$ , e que um modo deslizante ideal existe  $\forall t \geq t_0$ . Matematicamente, esta situação pode ser expressa por

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(x(t)) &= 0, \\ \sigma(x(t)) &= 0, \quad \forall t \geq t_0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Aplicando a derivada parcial em relação a  $t$  no termo  $\sigma(x(t)) = 0$ , obtém-se

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = 0.\tag{2.12}$$

Substituindo (2.1) em (2.12), tem-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(t, x) + B(t, x)u_{eq}] = 0,\tag{2.13}$$

onde o controle equivalente  $u_{eq}$  é a única solução da equação (2.13).

Assumindo que o produto matricial  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x)$  é não-singular para todo  $x$  e  $t$  (DE-CARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988), então

$$u_{eq} = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x).\tag{2.14}$$

Desde que a condição inicial  $x(t_0)$  satisfaça  $\sigma(x(t_0)) = 0$ , pode-se substituir (2.14)

em (2.1), o que leva a

$$\dot{x} = \left[ I - B(t, x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(t, x), \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.15)$$

que descreve o comportamento do sistema sobre a superfície de deslizamento.

No caso em que a superfície de deslizamento é linear e dada por

$$\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0, \quad (2.16)$$

tem-se

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = S. \quad (2.17)$$

Assim, a equação (2.15) se reduz a

$$\dot{x} = [I - B(t, x) [SB(t, x)]^{-1} S] f(t, x), \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.18)$$

### 2.3 Lei de Controle

Após o projeto da superfície de deslizamento, o próximo passo é projetar a lei de controle. Seu projeto deve satisfazer as condições de existência e alcançabilidade do modo deslizante. Em geral, a lei de controle  $u$  é um vetor de dimensão  $l$  com elementos

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \text{se } \sigma_i(x) > 0, \\ u_i^-(t, x) & \text{se } \sigma_i(x) < 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

onde  $i = 1, \dots, l$  e  $\sigma(x) = [\sigma_1(x), \dots, \sigma_l(x)]^T$ .

Algumas possibilidades de estruturas com controle descontínuo  $u$  são apresentadas a seguir (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988):

(a) Função sinal com ganhos constantes

$$u_i = \begin{cases} \alpha_i \text{sgn}(\sigma_i(x)), & \sigma_i(x) \neq 0 \text{ e } \alpha_i < 0 \\ 0, & \sigma_i(x) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

(b) Função sinal com ganhos dependentes do estado

$$u_i = \begin{cases} \alpha_i(x) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)), & \sigma_i(x) \neq 0 \text{ e } \alpha_i(x) < 0 \\ 0, & \sigma_i(x) = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

(c) Malha fechada com ganhos chaveados

$$u_i(x) = \Omega x, \quad (2.22)$$

sendo

$$\Omega = [\Omega_{ij}], \quad \Omega_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \sigma_i x_j > 0 \\ \beta_{ij}, & \sigma_i x_j < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

(d) Controle vetorial unitário

$$u(x) = -\rho \frac{\sigma(x)}{\|\sigma(x)\|}. \quad (2.24)$$

onde  $\rho > 0$  é denominado *função de modulação*.

## 2.4 *Chattering*

Um modo deslizante ideal existe se, e somente se, a trajetória do estado  $x(t)$  da planta satisfaz  $\sigma(x(t)) = 0$  para todo  $t \geq t_0$ , para algum  $t_0$ . Para que isto aconteça, deve-se ter chaveamentos infinitamente rápidos.

Entretanto, em sistemas reais, as funções de controle chaveado têm imperfeições e limitações, tais como retardamento, histereses, entre outras, que forçam o chaveamento a ocorrer em uma frequência finita. Conseqüentemente, a trajetória do estado oscila em uma vizinhança da superfície de deslizamento. Esta oscilação é denominada *chattering* (trepidação).

Assim, o modo deslizante real não ocorre sobre a superfície de deslizamento, mas dentro de uma camada limite (UTKIN, 1978; UTKIN; GULDNER; SHI, 1999). A Figura 4 ilustra a diferença entre um modo deslizante ideal e um modo deslizante com *chattering*.

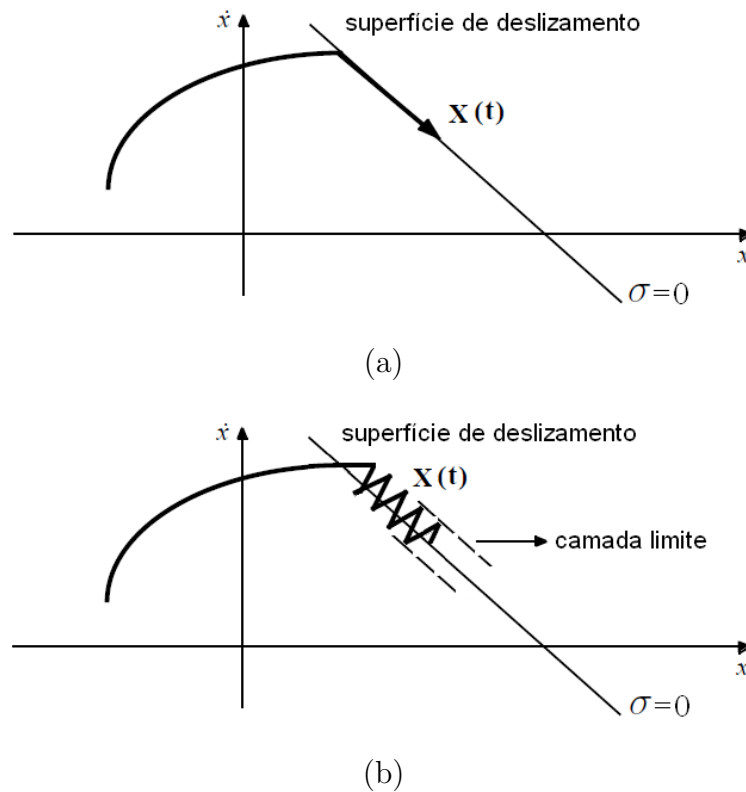


Figura 4 - Modo deslizante: (a) ideal e (b) com *chattering* (SLOTINE; LI, 1991).

O *chattering* é indesejável pois pode causar instabilidade no controle, perda de energia por aquecimento em circuitos elétricos, além de desgaste por vibrações em sistemas mecânicos (UTKIN; GULDNER; SHI, 1999).

Segundo (UTKIN; GULDNER; SHI, 1999), várias alternativas foram desenvolvidas para eliminar ou reduzir o *chattering*, dentre elas destacam-se:

- a introdução de uma camada limite no controlador para permitir que a trajetória do sistema permaneça sobre uma região ao redor da superfície de deslizamento e não restritamente sobre essa superfície, desenvolvido por (SLOTINE; SASTRY, 1983; SLOTINE, 1984);
- o uso de um observador assintótico na malha de controle, a fim de gerar um modo deslizante ideal, que foi proposto por (BONDAREV et al., 1985);
- a implementação de controladores em cascata utilizando a aproximação da forma regular, abordado por (DRAKUNOV et al., 1990a, 1990b), cuja ideia é projetar um controlador para gerar o sinal de controle desejado e outro controlador para garantir que o sinal de controle real (medido) seja igual ao desejado;

- a rejeição de perturbações, proposta por vários autores e encontrada em (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988), que se baseia em um sinal de controle contínuo  $u_c(t)$  para controlar o comportamento do sistema em condições nominais, além de um sinal de controle descontínuo  $u_d(t)$  para rejeitar as perturbações e eliminar as incertezas paramétricas do sistema.

Outro método para eliminação do *chattering* é a redução da amplitude do sinal de controle proposta por (UTKIN; LEE, 2006), que pode ser realizada por uma função de modulação.

Todavia, a presença do atraso em sistemas de controle agrava ainda mais o *chattering*, e os métodos citados acima podem não ser tão eficientes para sua eliminação. Com isso, o desempenho do controlador é deteriorado, podendo até mesmo ocasionar uma instabilização do sistema.

## 2.5 Exemplo Numérico

Para ilustrar o efeito do atraso no controle a estrutura variável por modo deslizante, considere o seguinte sistema de segunda ordem (duplo integrador) proposto em (SOKAL, 2010):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (2.25)$$

A função de chaveamento para geração do sinal de controle é dada por

$$u = -\text{sgn}(\sigma(x)), \quad (2.26)$$

sendo

$$\text{sgn}(\sigma(x)) := \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(x) > 0 \\ 0, & \text{se } \sigma(x) = 0 \\ -1, & \text{se } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

A superfície de chaveamento é definida como

$$\sigma(x) = Sx(t) = 0, \quad (2.28)$$

onde  $S \in \mathfrak{R}^{1 \times 2}$ .



Na Figura 5, pode-se observar o comportamento do sistema (2.25) ao se aplicar o controle VSC dado em (2.26), (2.27) e (2.28). No instante  $t_1$ , o estado alcança a superfície de deslizamento e, deste momento em diante ( $t \geq t_1$ ), o controle passa a chavear entre os dois valores definidos em (2.27) com o objetivo de manter o estado na superfície  $\sigma(x) = 0$ . Quando o modo de deslizamento é atingido, o sistema se comporta como um sistema de ordem reduzida (primeira ordem).

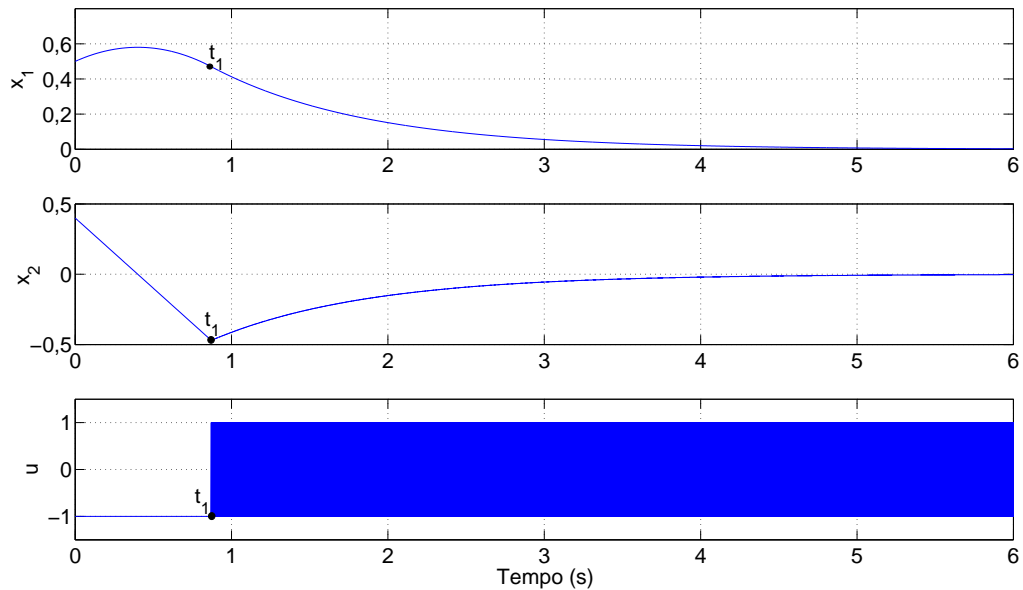


Figura 5 - Estado ( $x_1$  e  $x_2$ ) e sinal de controle ( $u$ ) do sistema de controle a estrutura variável (2.25)–(2.28), sem atraso.

Submetendo o sistema (2.25) a diferentes condições iniciais, obtem-se o plano de fase na Figura 6. O estado  $x(t)$  é conduzido para a superfície de deslizamento, conforme indicam as setas, o que mostra a atratividade dessa superfície, mesmo com o sistema sendo submetido a condições iniciais distintas.

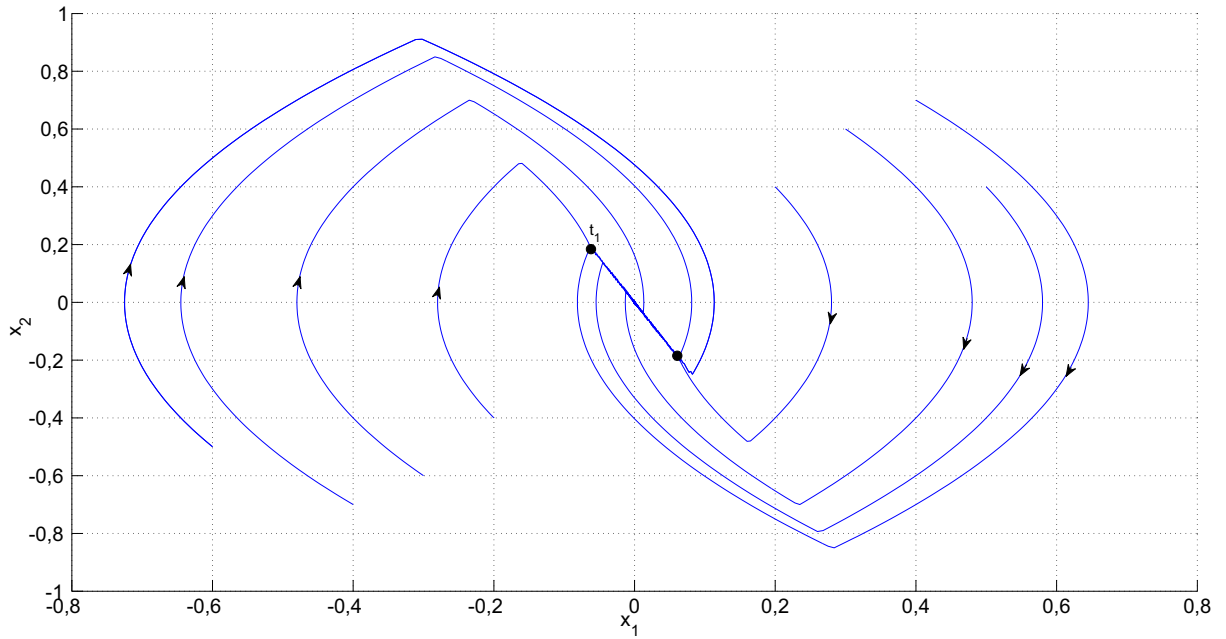


Figura 6 - Plano de fase do sistema (2.25)–(2.28) com diferentes condições iniciais, sem atraso.

Inserindo o atraso  $d = 0,1$  s na malha de realimentação, isto é,

$$\sigma = Sx(t - d), \quad (2.29)$$

pode-se notar na Figura 7 o aparecimento do *chattering* devido ao chaveamento em frequência finita do sinal de controle  $u$ . Com isso, o estado não se mantém sobre a superfície de deslizamento e o desempenho do controle é prejudicado.

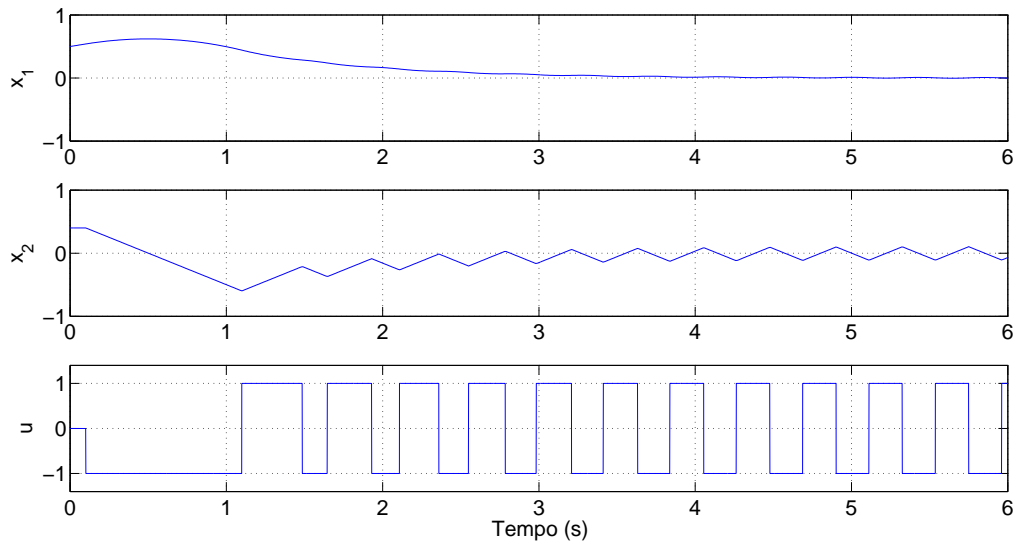


Figura 7 - Estado ( $x_1$  e  $x_2$ ) e sinal de controle ( $u$ ) do sistema de controle a estrutura variável (2.25)–(2.27) e (2.29), com atraso  $d = 0, 1$  s.

Agora, ampliando o atraso para  $d = 1$  s, observa-se que o sistema torna-se instável, conforme ilustrado na Figura 8.

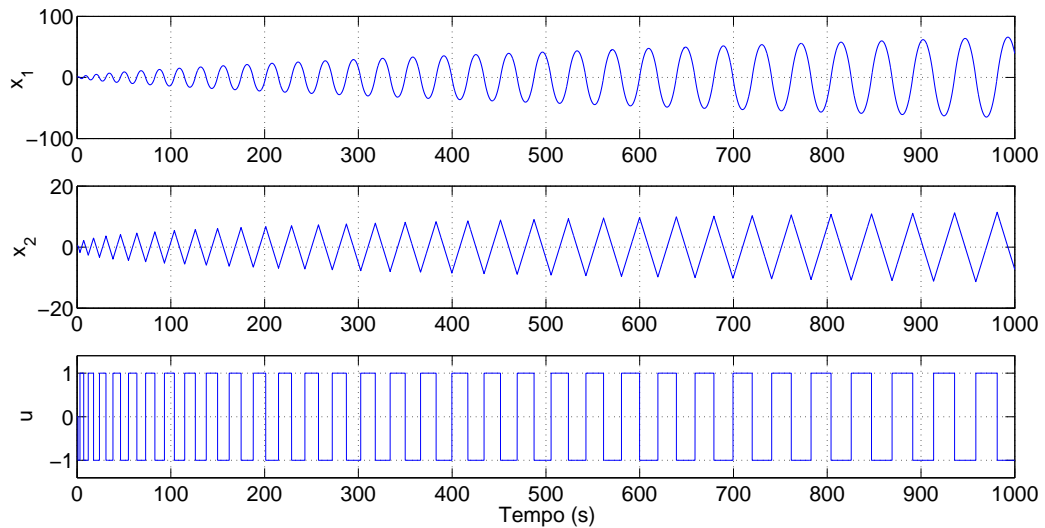


Figura 8 - Estado ( $x_1$  e  $x_2$ ) e sinal de controle ( $u$ ) do sistema de controle a estrutura variável (2.25)–(2.27) e (2.29), com atraso  $d = 1$  s.

## 2.6 Conclusões

Neste capítulo, foram apresentados os conceitos básicos de controle a estrutura variável por modo deslizante. Este tipo de controle é robusto a incertezas paramétricas e perturbações. Entretanto, a presença do atraso prejudica o desempenho do controle, gera o *chattering* e pode até levar o sistema à instabilidade.

O problema do controle por modo deslizante de sistemas com atraso será tratado nos Capítulos 3 e 4, onde são propostos controladores para sistemas com atraso no estado e com atraso na saída, respectivamente.

### 3 CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO NO ESTADO

A presença do atraso e a incerteza nos parâmetros da planta são frequentemente a causa de instabilidade e baixo desempenho dos sistemas de controle. Por isso, há um crescente interesse no estudo de sistemas incertos com atraso (RICHARD, 2003; SBARCIOG et al., 2008; LIU; ZINOBER; SHTESSEL, 2009).

O controle por modo deslizante é uma metodologia atrativa para sistemas incertos, visto que é robusto a incertezas e perturbações na planta. Porém, a presença do atraso deteriora o controle causando *chattering* e podendo até instabilizar o sistema. O uso de observadores de estado é uma alternativa para o problema do atraso no estado, como desenvolvido em (NIU et al., 2004; YAN; SPURGEON; EDWARDS, 2010). Entretanto, tais observadores não podem ser aplicados na classe de sistemas considerados aqui, pois em (NIU et al., 2004) não são consideradas perturbações descasadas e em (YAN; SPURGEON; EDWARDS, 2010) o atraso deve ser conhecido.

Neste capítulo, é desenvolvido um controlador por modo deslizante e realimentação de saída para sistemas incertos não-lineares, com múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multi-Input-Multi-Output* - MIMO) e com atraso incerto e variável no estado, utilizando observadores de norma (*norm observers*) para estimação da norma do estado não-medido, pois são mais robustos a fortes incertezas do que os observadores de estado.

O controlador resultante garante a limitação global do estado, a convergência exponencial do erro de saída para zero e o rastreamento exato do sinal de referência. Além disso, este controlador utiliza o controle vetorial unitário e parte da análise elaborada em (CUNHA et al., 2003), o que resulta em menos restrições impostas à matriz de ganho de alta frequência do sistema.

#### 3.1 Formulação do Problema

O sistema incerto não-linear, MIMO, com atraso incerto e variante no tempo em relação ao estado, é descrito pelas seguintes equações de estado:

$$\dot{\eta} = \phi_0(\eta, \eta_d, y, y_d, t), \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = \phi_1(\eta, \eta_d, y, y_d, t) + K_p u, \quad (3.2)$$

onde  $\phi_0$  e  $\phi_1$  são funções não-lineares incertas,  $u \in \mathfrak{R}^l$  é o sinal de controle,  $y \in \mathfrak{R}^l$  é o sinal de saída medido, e  $\eta \in \mathfrak{R}^{n-l}$  é o estado não-medido do subsistema (3.1). A fim de representar os vetores de estado atrasados no tempo, o subscrito  $d$  é introduzido para definir os seguintes termos (YAN; SPURGEON; EDWARDS, 2010):

$$\eta_d := \eta(t - d(t)), \quad (3.3)$$

$$y_d := y(t - d(t)). \quad (3.4)$$

Conforme é usual na literatura de sistemas com atraso (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003, Sec. 1.2), as condições iniciais são definidas por:

$$\eta(t) = \eta_0(t), \quad (3.5)$$

$$y(t) = y_0(t), \quad (3.6)$$

onde  $\eta_0(t)$  e  $y_0(t)$  são funções vetoriais contínuas em  $t \in [-\bar{d}, 0]$ , e  $\bar{d}$  é definido a seguir na hipótese (H2).

O sistema deve atender as seguintes hipóteses:

- (H1)** Para a matriz de ganho de alta frequência (*High Frequency Gain* - HFG)  $K_p$ , deve ser conhecida uma matriz  $S_p$  de tal maneira que  $-K_p S_p$  seja Hurwitz e  $\|K_p^{-1}\| \leq c$ , sendo  $c > 0$  uma constante conhecida.
- (H2)** O atraso  $d(t)$  é uma função incerta e contínua por partes, que satisfaz

$$0 < \underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d} < +\infty, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.7)$$

onde  $\underline{d}$  e  $\bar{d}$  são limites conhecidos.

- (H3)** As funções incertas  $\phi_0$  e  $\phi_1$  são contínuas por partes em  $t$  e localmente Lipschitz em outros argumentos.
- (H4)** A norma do estado  $\eta$  do subsistema (3.1) pode ser majorada por um *observador de norma* exponencialmente estável.
- (H5)** Há funções conhecidas  $\alpha_1(\cdot)$ ,  $\alpha_2(\cdot)$  e  $\alpha_3(\cdot)$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  localmente Lipschitz, e uma função não-negativa conhecida  $\varphi_1(y, t)$  contínua em  $y$ , e contínua por partes em  $t$ ,

tal que:

$$\|\phi_1\| \leq \alpha_1(\|\eta\|) + \alpha_2(\eta_{\text{sup}}) + \alpha_3(y_{\text{sup}}) + \varphi_1(y, t), \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_{\text{sup}}(t) &:= \sup_{\tau \in [\underline{d}, \bar{d}]} \|\eta(t - \tau)\|, \\ y_{\text{sup}}(t) &:= \sup_{\tau \in [\underline{d}, \bar{d}]} \|y(t - \tau)\|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A condição Hurwitz em (H1) é necessária e suficiente para a atratividade da superfície de deslizamento ao controle vetorial unitário por modo deslizante (CUNHA et al., 2003). Esse requisito é menos restritivo que as condições usuais encontradas na literatura de controle por modo deslizante multivariável, como por exemplo, o conhecimento do ganho de alta frequência (HFG) em (NIU et al., 2004; YAN; SPURGEON; EDWARDS, 2010).

Aqui e em (FRIDMAN; ORLOV, 2009), o atraso  $d(t)$  pode ser incerto. Deste ponto de vista, a hipótese (H2) é menos restritiva que a necessidade do conhecimento do atraso em (NIU et al., 2004; YAN; SPURGEON; EDWARDS, 2010; NAM, 2009).

A hipótese (H3) garante a existência local e a unicidade da solução de (3.1)–(3.2) para  $u \equiv 0$ . Para cada solução de (3.1)–(3.2) existe um intervalo de tempo máximo dado por  $[0, t_M)$ , onde  $t_M$  pode ser finito ou infinito. Portanto, o escape de tempo finito não está excluído *a priori*.

De acordo com (H4), nosso esquema de controle por realimentação de saída utiliza um observador de norma (NIU et al., 2004; YAN; SPURGEON; EDWARDS, 2010), em vez de observadores de estado, para o vetor de estado  $\eta$  não-medido, conforme será explicado na Seção 3.2. Mesmo que os observadores de estado possam ser aplicados em controladores por realimentação de saída, como por exemplo em (KRICHMAN; SONTAG; WANG, 2001; OLIVEIRA; PEIXOTO; HSU, 2010), seu projeto é complexo para a classe de sistemas incertos não-lineares com atraso incerto e variante no tempo, considerada neste capítulo. Além disso, os observadores de norma são mais vantajosos que os observadores de estado, devido aos seguintes fatores:

- (1) sua estrutura é mais simples que a de observadores de estado;
- (2) os observadores de norma estipulam majorantes conservativos para a norma do estado e, por isso, são mais robustos a incertezas;
- (3) o procedimento de projeto para o observador de norma é independente da

ordem do sistema, que pode ser incerto (CUNHA; COSTA; HSU, 2008) e;

(4) os observadores de norma já foram utilizados em sistemas de controle por modo deslizante, garantindo a estabilidade global, por exemplo, em (HSU; COSTA; CUNHA, 2003; OLIVEIRA; PEIXOTO; HSU, 2010).

Para estimar a norma do estado  $\eta$  do subsistema (3.1), é utilizado um observador de norma exponencialmente estável, de primeira ordem, na forma ( $y$  é a saída da planta):

$$\dot{\bar{\eta}} = -\lambda_0 \bar{\eta} + c_0 \varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t), \quad (3.10)$$

com entrada  $\varphi_0(y, t)$  e saída  $\bar{\eta} \in \mathfrak{R}$ , de maneira que:

- (i)  $\lambda_0, c_0 > 0$  são constantes apropriadas;
- (ii)  $\varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t)$  é uma função não-negativa contínua em  $\|y\|$  e  $y_{\text{sup}}$ , contínua por partes e limitada superiormente em  $t$ ;
- (iii) para cada estado inicial  $\eta_0$  e  $\bar{\eta}(0)$ , tem-se

$$\|\eta(t)\| \leq \bar{\eta}(t) + k_0 (\eta_0^* + |\bar{\eta}(0)|) e^{-\lambda_0 t}, \quad \forall t \in [0, t_M], \quad (3.11)$$

onde  $k_0 > 0$  é uma constante e

$$\eta_0^* := \sup_{t \in [-\bar{d}, 0]} \|\eta_0(t)\|. \quad (3.12)$$

A fim de obter um majorante para  $\phi_1$  em (3.2), assume-se adicionalmente (H5). Note que (H5) não é tão restritiva desde que  $\phi_1$  é assumida ser localmente Lipschitz contínua nas variáveis  $\eta, \eta_d, y$  e  $y_d$ . Além disso, as funções delimitadoras  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\varphi_1$  não impõem condições de crescimento particular em relação ao vetor de campo não-linear  $\phi_1$ . Portanto, podem haver não-linearidades polinomiais em  $\eta, \eta_d, y$  e  $y_d$ .

### 3.1.1 Problema do Rastreamento Global

O problema consiste em projetar uma lei de controle  $u$  por realimentação de saída para conduzir o *erro de rastreamento de saída*

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (3.13)$$



assintoticamente a zero (rastreamento exato), partindo de quaisquer condições iniciais da planta ou controlador, e mantendo os sinais em malha fechada uniformemente limitados. Assume-se que a *trajetória desejada*  $y_m(t)$  é gerada pelo *modelo de referência*

$$\dot{y}_m = A_m y_m + r_m, \quad (3.14)$$

onde  $r_m, y_m \in \mathfrak{R}^l$ . O sinal de referência  $r_m(t)$  deve ser contínuo por partes e uniformemente limitado. A matriz  $A_m$  é dada por

$$A_m = -\text{diag} \{a_1, \dots, a_l\}, \quad (3.15)$$

sendo  $a_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, l\}$ .

### 3.1.2 Equação do Erro

Subtraindo (3.14) de (3.2), a dinâmica do erro pode ser escrita como

$$\dot{e} = A_m e + K_p(u - u^*), \quad (3.16)$$

onde o *sinal de controle ideal*  $u^*$  pode ser considerado como uma perturbação de entrada casada em (3.16) e é definido por

$$u^* := K_p^{-1}(-\phi_1 + A_m y + r_m). \quad (3.17)$$

Das hipóteses (H1)–(H5),  $u^*$  pode ser majorado em norma por sinais disponíveis, por exemplo,

$$\|u^*\| \leq c [\alpha_1(2|\bar{\eta}|) + \alpha_2(2\bar{\eta}_{\text{sup}}) + \alpha_3(y_{\text{sup}}) + \varphi_1(y, t) + \|A_m y + r_m\|] + \pi_1, \quad (3.18)$$

onde  $c$  é dado em (H1) e

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{\text{sup}}(t) &:= \sup_{\tau \in [d, \bar{d}]} |\bar{\eta}(t - \tau)|, \\ \pi_1 &:= k_1 (\eta_0^* + |\bar{\eta}(0)|) e^{-\lambda_0 t}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

sendo  $k_1 > 0$  uma constante apropriada. O termo  $\pi_1$  majora os sinais exponencialmente

decrecentes resultantes das condições iniciais em (3.11). Para desenvolver (3.18), foi considerado o fato de que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são localmente Lipschitz e  $\psi(a + b) \leq \psi(2a) + \psi(2b)$ ,  $\forall a, b \geq 0$  e  $\forall \psi \in \mathcal{K}_\infty$  (SONTAG, 1998, p. 94).

Então, o problema do rastreamento global pode ser reformulado como um problema de regulação, de acordo com o que segue:

*Encontrar uma lei de controle  $u$  por modo deslizante e realimentação de saída, de maneira que, para todas as condições iniciais  $(y_0, \eta_0, e(0), \bar{\eta}(0))$ :*

- (i) *as soluções de (3.1)–(3.2), (3.10) e (3.16) sejam limitadas e;*
- (ii)  *$e(t)$  tenda pelo menos assintoticamente a zero.*

## 3.2 Observadores de Norma para Sistemas com Atraso

Para que os observadores de norma exponencialmente estáveis possam ser implementados, nesta seção é caracterizada uma classe de sistemas não-lineares MIMO, que requer somente uma condição de crescimento linear em relação ao estado não-medido  $\eta$ .

### 3.2.1 Classe de Sistemas Não-Lineares com Atraso

Considere a classe de sistemas não-lineares MIMO apresentada em (3.1)–(3.2), com a função  $\phi_0$  dada por

$$\phi_0(\eta, \eta_d, y, y_d, t) = A_0\eta + f_0(\eta, t) + f_1(\eta_d, t) + \bar{\phi}_0(y, y_d, t), \quad (3.20)$$

onde a matriz  $A_0$  e as funções não-lineares  $f_0, f_1, \bar{\phi}_0$  podem ser incertas.

Em particular, a aproximação desenvolvida aqui para projetar um observador de norma exponencialmente estável, considera que  $A_0$  é Hurwitz com *margem de estabilidade* (CUNHA; COSTA; HSU, 2008) dada por

$$\gamma_0 := -\max_i \{\operatorname{Re}(\gamma_i)\}, \quad (3.21)$$

onde  $\{\gamma_i\}$  são os autovalores de  $A_0$ . Além disso, as funções não-lineares  $f_0(\eta, t)$  e  $f_1(\eta_d, t)$

são majoradas por funções de crescimento linear, tais como

$$\begin{aligned}\|f_0(\eta, t)\| &\leq \mu_0 \|\eta\|, \\ \|f_1(\eta_d, t)\| &\leq \mu_1 \|\eta_d\|,\end{aligned}\tag{3.22}$$

sendo  $\mu_0$  e  $\mu_1$  constantes positivas conhecidas. Assume-se também que a função não-linear dependente da saída  $\bar{\phi}_0(y, y_d, t)$  é majorada em norma por  $\varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t)$  como em (3.10), ou seja,

$$\|\bar{\phi}_0(y, y_d, t)\| \leq \varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t).\tag{3.23}$$

### 3.2.2 Projeto do Observador de Norma

A seguir, será mostrado que o subsistema não-linear (3.1) com  $\phi_0$  dado por (3.20) deve admitir um observador de norma exponencialmente estável da forma (3.10).

A partir de (3.5) e (3.12), e aplicando-se o Lema 3 (veja Apêndice A) juntamente com os majorantes (3.22)–(3.23) ao sistema (3.1) e (3.20), tem-se:

$$\begin{aligned}\|\eta(t)\| &\leq c_1 e^{-\gamma_0 t} * \|f_0(\eta, t) + f_1(\eta_d, t) + \bar{\phi}_0(y, y_d, t)\| + c_2 \eta_0^* e^{-\gamma_0 t} \\ &\leq c_1 e^{-\gamma_0 t} * [\mu_0 \|\eta\| + \mu_1 \|\eta_d\| + \varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t)] + c_2 \eta_0^* e^{-\gamma_0 t} \leq r(t),\end{aligned}\tag{3.24}$$

$\forall t \in [0, t_M)$ , e onde

$$r(t) = c_1 e^{-\gamma_0 t} * [\mu_0 \|\eta\| + \mu_1 \eta_{\text{sup}} + \varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t)] + c_2 \eta_0^* e^{-\gamma_0 t},\tag{3.25}$$

sendo as constantes  $c_1, c_2 > 0$ ,  $\gamma_0$  definido em (3.21) e lembrando que

$$\begin{aligned}\eta_0^* &:= \sup_{t \in [-\bar{d}, 0]} \|\eta_0(t)\|, \\ \eta_{\text{sup}}(t) &:= \sup_{\tau \in [d, \bar{d}]} \|\eta(t - \tau)\|.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Para fins de projeto, as constantes  $c_1$  e  $\gamma_0$  podem ser calculadas a partir da matriz incerta  $A_0$  usando o método proposto em (CUNHA; COSTA; HSU, 2008). O sinal escalar

$r(t)$  é a solução da equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\gamma_0 r + c_1 [\mu_0 \|\eta\| + \mu_1 \eta_{\text{sup}} + \varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t)], \\ r(0) &= c_2 \eta_0^*.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Uma vez que  $r(t) \geq \|\eta(t)\|$ ,  $\forall t \in [0, t_M]$ , então

$$\eta_{\text{sup}}(t) \leq \sup_{\tau \in [\underline{d}, \bar{d}]} r(t - \tau).\tag{3.28}$$

Adicionalmente,  $\dot{r} \geq -\gamma_0 r$  e usando o Teorema da Comparação (FILIPPOV, 1964, Teorema 7), tem-se de (3.28) que

$$\begin{aligned}\eta_{\text{sup}}(t) &\leq \sup_{\tau \in [\underline{d}, \bar{d}]} e^{-\gamma_0[(t-\tau)-t]} r(t) \\ &\leq e^{\gamma_0 \bar{d}} r(t), \quad \forall t \in [0, t_M].\end{aligned}\tag{3.29}$$

Após a substituição de  $\|\eta\|$  por  $r$  e  $\eta_{\text{sup}}$  por  $e^{\gamma_0 \bar{d}} r$  em (3.27), chega-se à equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= (c_1 \mu_0 + c_1 \mu_1 e^{\gamma_0 \bar{d}} - \gamma_0) \bar{r} + c_1 \varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t), \\ \bar{r}(0) &= r(0) = c_2 \eta_0^*,\end{aligned}\tag{3.30}$$

que satisfaz  $\bar{r}(t) \geq r(t) \geq \|\eta(t)\|$ ,  $\forall t \in [0, t_M]$ . Logo, conclui-se que, se

$$\lambda_0 = \gamma_0 - c_1 \mu_0 - c_1 \mu_1 e^{\gamma_0 \bar{d}} > 0,\tag{3.31}$$

então (3.30) e (3.10) são estáveis no sentido entrada-estado (*Input-to-State Stable* - ISS) em relação à função não-linear  $\varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t)$ . Por isso, de (3.30) obtém-se equivalentemente (3.10), ajustando-se

$$c_0 \geq c_1,\tag{3.32}$$

Substituindo (3.31) em (3.30), tem-se

$$\dot{\bar{r}} = -\lambda_0 \bar{r} + c_1 \varphi_0(\|y\|, y_{\text{sup}}, t).\tag{3.33}$$

Se  $\bar{r}(0) = \bar{\eta}(0) = 0$ , então, comparando (3.33) com (3.10), conclui-se que

$$\bar{\eta}(t) \geq \bar{r}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.34)$$

Se  $\bar{r}(0) \neq \bar{\eta}(0)$ , obtem-se

$$\bar{\eta}(t) \geq \bar{r}(t) - e^{\lambda_0 t}(|\bar{r}(0)| + |\bar{\eta}(0)|), \quad (3.35)$$

e logo chega-se a

$$\bar{\eta}(t) \geq \bar{r}(t) - e^{\lambda_0 t}(c_2 \eta_0^* + |\bar{\eta}(0)|) \geq \|\eta(t)\| - e^{\lambda_0 t}(c_2 \eta_0^* + |\bar{\eta}(0)|). \quad (3.36)$$

Escolhendo  $k_0 = \max\{c_2, 1\}$  em (3.36), pode-se finalmente escrever (3.11).

Note que a condição imposta sobre  $\lambda_0$  em (3.31) implica em uma desigualdade transcendental

$$\gamma_0 > c_1 \mu_0 + c_1 \mu_1 e^{\gamma_0 \bar{d}}. \quad (3.37)$$

Tal desigualdade é usada para determinar o atraso máximo permitido pela margem de estabilidade  $\gamma_0$  de  $A_0$ . Reescrevendo (3.37) como  $e^{\gamma_0 \bar{d}} \leq (\gamma_0 - c_1 \mu_0) / c_1 \mu_1$  e aplicando  $\ln(\cdot)$  em ambos os lados, tem-se

$$\bar{d} \leq \frac{1}{\gamma_0} \ln \frac{\gamma_0 - c_1 \mu_0}{c_1 \mu_1}. \quad (3.38)$$

Como em (NAM, 2009), o tempo máximo de atraso depende da margem de estabilidade  $\gamma_0$  de  $A_0$ . Entretanto, há uma limitação natural imposta pelo argumento da função  $\ln(\cdot)$  que deve ser positivo, isto é

$$\gamma_0 > c_1 \mu_0. \quad (3.39)$$

O projeto do observador de norma para sistemas com atraso, proposto aqui, deve ser conservativo para alguns sistemas. Portanto, procedimentos menos conservativos poderiam explorar características favoráveis do sistema e técnicas de otimização, por exemplo, seguindo as ideias em (CUNHA; COSTA; HSU, 2008; NAM, 2009).

Na próxima seção, será apresentado o projeto desenvolvido para o controlador por realimentação de saída baseado em observadores de norma exponencialmente estáveis.

### 3.3 Controle por Modo Deslizante e Realimentação de Saída

Da hipótese (H1), há uma matriz pré-compensadora conhecida  $S_p$  que assegura que  $-K_p S_p$  seja Hurwitz. Assim, a equação de Lyapunov  $(K_p S_p)^T P + P(K_p S_p) = I$  tem uma solução  $P = P^T > 0$ .

Neste caso, pode-se aplicar a *lei de controle por vetor unitário* (*Unit Vector Control* - UVC) (CUNHA et al., 2003) <sup>1</sup>

$$u = -S_p \varrho \frac{e}{\|e\|}, \quad e \neq 0, \quad (3.40)$$

à equação da dinâmica do erro (3.16) e verificar que, se a função de modulação  $\varrho$  satisfaz

$$\varrho \geq c_d \|u^*\| + c_e \|e\| + \delta, \quad \delta \geq 0, \quad (3.41)$$

*modulo* o termo exponencial em decaimento  $c_d \pi_1$  ( $\pi_1$  de (3.18)), então a derivada Dini no tempo de  $V = \sqrt{e^T P e}$  ao longo das soluções de (3.16) satisfaz:

$$\dot{V} \leq -\lambda_m V + \frac{c_d \pi_1}{2\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}, \quad \forall t \in [0, t_M], \quad (3.42)$$

onde  $0 < \lambda_m < \min_i \{a_i\}$ ,  $i = 1, \dots, l$  em (3.15) e

$$\begin{aligned} c_d &\geq 2\|PK_p\|, \\ c_e &\geq \|A_m^T P + PA_m\| + \lambda_m. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Além disso, se  $a_i = \lambda_m$  ( $\forall i$ ), então pode-se escolher  $c_e = 0$  (CUNHA et al., 2003, Corolário 1). Então, usando o Teorema da Comparação (FILIPPOV, 1964, Teorema 7), tem-se:

$$\|e(t)\| \leq \|e(0)\| e^{-\lambda_m t} + \pi_2, \quad \forall t \in [0, t_M], \quad (3.44)$$

sendo

$$\pi_2 := \Psi_2(|\bar{\eta}(0)| + \eta_0^*) e^{-\lambda_c t}, \quad (3.45)$$

onde  $0 < \lambda_c < \min\{\lambda_0, \lambda_m\}$  e  $\Psi_2 \in \mathcal{K}$  (para detalhes, veja (CUNHA et al., 2003, Lema 1)).

<sup>1</sup>Desde que  $e = 0$  corresponda a um conjunto de medida nula no sentido de Lebesgue. Então, de acordo com o teorema de Filippov, o valor do controle neste ponto é irrelevante. Entretanto, por causa da consistência matemática, assume-se que  $u = 0$  se  $e = 0$ .

Assim, o objetivo do controle de rastreamento pode ser atingido.

Usando a desigualdade (3.18), uma função de modulação alternativa que satisfaz a desigualdade (3.41) é

$$\begin{aligned} \varrho = & c_{dc} [\alpha_1(2|\bar{\eta}|) + \alpha_2(2\bar{\eta}_{\text{sup}}) + \alpha_3(y_{\text{sup}}) + \\ & + \varphi_1(y, t) + \|A_m y + r\|] + c_e \|e\| + \delta, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde os sinais escalares  $\bar{\eta}$  e  $\bar{\eta}_{\text{sup}}$  são gerados pelo observador de norma em (3.10) e (3.19).

O esquema de controle proposto neste capítulo é representado pelo diagrama em blocos na Figura 9.

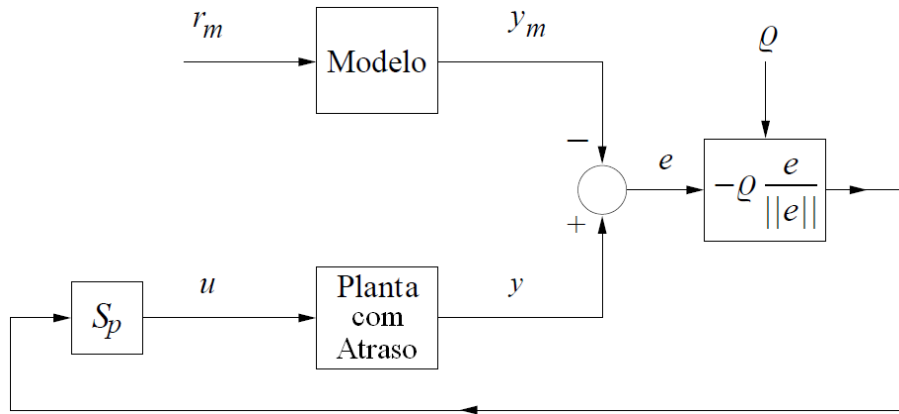


Figura 9 - Diagrama em blocos do esquema de controle proposto.

Os resultados de estabilidade estão descritos a seguir.

### 3.4 Resultados de Estabilidade

Na análise de estabilidade abaixo, o estado da dinâmica inversa  $\eta$  e o estado do observador de norma  $\bar{\eta}$  são tratados como sinais exógenos no sistema do erro (3.16). O principal resultado é apresentado agora.

**Teorema 3. (Resultado Principal)** *Considere os sistemas não-lineares com atraso representados na forma (3.1)-(3.2), com a lei de controle UVC (3.40) e função de modulação (3.46) que utiliza o observador de norma (3.10). Assuma que as hipóteses (H1)-(H5) sejam satisfeitas. Assim, todos os sinais do sistema em malha fechada permanecem uniformemente limitados e o erro de rastreamento de saída converge exponencialmente a zero.*

*Demonstração.* Uma vez assumido que a função de modulação  $\varrho$  em (3.40) é implementada de forma a satisfazer (3.41), a convergência exponencial a zero do erro de rastreamento  $e(t)$  pode ser provada como foi mostrado em (3.44).

Lembrando que  $y = e + y_m$  e  $y_m$  é uniformemente limitado, então, de (H4) e da propriedade ISS da dinâmica de  $\bar{\eta}$  em (3.10) relacionada à função não-linear dependente da saída  $\varphi_0$ , resulta que  $\bar{\eta}$ ,  $\eta$ , e conseqüentemente  $u$ , são também uniformemente limitados. Assim, conclui-se que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados.  $\square$

O modo deslizante ideal é obtido de acordo com o seguinte corolário.

**Corolário 1. (Modo Deslizante Ideal)** *Adicionalmente aos resultados do Teorema 3, se  $\delta > 0$  em (3.41), então o modo deslizante na superfície  $e = 0$  é alcançado em tempo finito.*

*Demonstração.* No que segue,  $k_i > 0$  são constantes apropriadas que não dependem das condições iniciais. Analogamente ao que foi mostrado na Seção 3.3, se a função de modulação  $\varrho$  na lei de controle (3.40) satisfaz (3.41) com  $\delta > 0$ , então, a derivada Dini no tempo de  $V = \sqrt{e^T P e}$  ao longo das soluções de (3.16) é tal que:

$$\dot{V} \leq -k_1\delta - k_2V + k_3\pi, \quad (3.47)$$

onde  $\pi$  é um termo exponencialmente decrescente.

Portanto, do Lema 4 (veja Apêndice A), pode-se concluir ainda que  $\exists t_1 < +\infty$  tal que  $V(t) = 0, \forall t \geq t_1$ . Conseqüentemente, o modo deslizante em  $e = 0$  inicia em algum tempo finito  $t_s, 0 \leq t_s \leq t_1$ .  $\square$

### 3.5 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema incerto não-linear, com atraso incerto e variante no tempo, onde as fortes não-linearidades escolhidas e o tipo de atraso abordado não tinham sido tratados na literatura até o momento:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} -0,5\eta_1 \sin \eta_2 + 0,2\eta_{d1}^{\frac{1}{3}}\eta_{d2}^{\frac{2}{3}} - 1y_1^2 \\ 0,5\eta_2 \cos \eta_1 - 0,2\eta_{d1} + 0,2\eta_{d2} + 1,5y_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$



$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -0,2\eta_2^5 + 0,7y_1^3 \\ -1,1\eta_{d1}^4 + 0,8y_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1,5 \end{bmatrix} u, \quad (3.49)$$

onde  $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\eta_d = [\eta_{1d}, \eta_{2d}]^T \in \mathfrak{R}^2$ ,  $y = [y_1, y_2]^T \in \mathfrak{R}^2$  e  $u \in \mathfrak{R}^2$ .

O modelo de referência escolhido e o sinal de referência usado nas simulações são dados por

$$\dot{y}_m = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} y_m + \begin{bmatrix} \text{sen}(10t) \\ \text{cos}(10t) \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

O conhecimento do atraso variante no tempo

$$d(t) = 0,3 \text{sen}(t) + 0,5 \quad (3.51)$$

(em segundos) não é necessário no projeto do sistema de controle. Entretanto, o majorante superior  $\bar{d} = 0,8$  s é requerido para o projeto do observador de norma, conforme (3.31).

A matriz  $S_p = I$  foi escolhida de forma que  $-K_p S_p$  seja Hurwitz, e que a hipótese (H1) seja satisfeita. De (H1), tem-se também a constante  $c = 1,4 \geq \|K_p^{-1}\|$  usada na função de modulação (3.46).

Os termos não lineares em  $\eta$  e em  $\eta_d$  apresentados em (3.48) satisfazem (3.22) com  $\mu_0 = 0,5$  e  $\mu_1 = 0,2$ .

Para satisfazer (3.37) e (3.38),  $\gamma_0 = 1$ ,  $c_1 = 1$ , e  $\lambda_0 = 0,0549$  rad/s. O coeficiente  $c_0 = 1,1$  foi escolhido para atender (3.32).

De acordo com (3.43),  $c_d = 35$  e  $c_e = 6$ . A constante  $\delta = 2$  foi escolhida arbitrariamente de maneira a garantir convergência a zero do sinal de erro em tempo finito.

As Figuras 10 à 13 mostram os resultados da simulação para esse sistema de controle. Note que  $y$  atinge  $y_m$  e, portanto, o erro de rastreamento do sinal de saída se torna nulo, como esperado, em um tempo menor que 25 ms, conforme destacado nas Figuras 11 e 13.

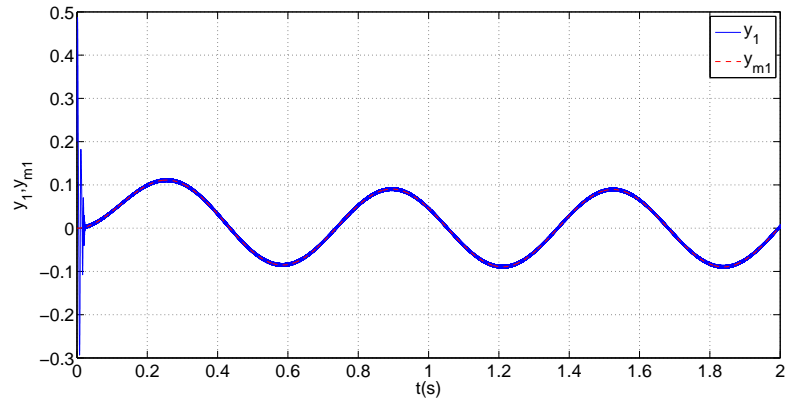


Figura 10 - Saída do sistema  $y_1(t)$  e saída do modelo de referência  $y_{m1}(t)$ .

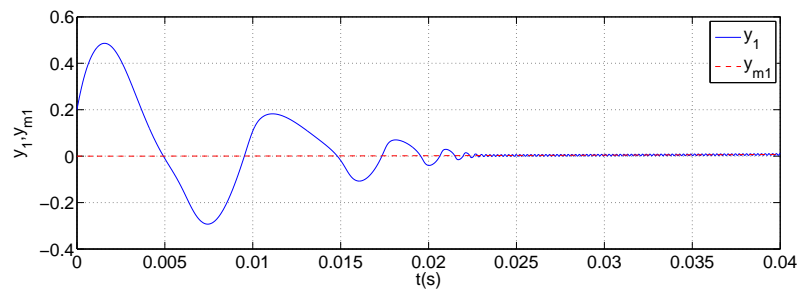


Figura 11 - Saída do sistema  $y_1(t)$  e saída do modelo de referência  $y_{m1}(t)$ , destacando o transitório.

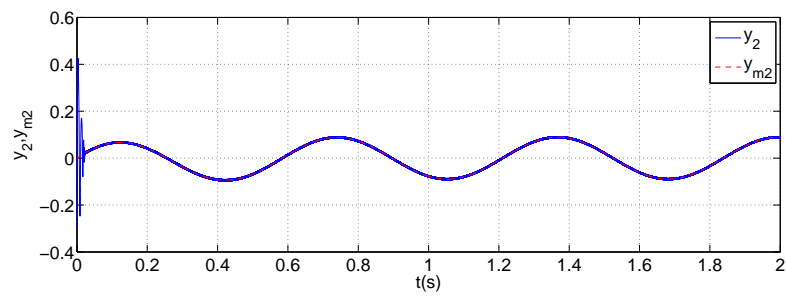


Figura 12 - Saída do sistema  $y_2(t)$  e saída do modelo de referência  $y_{m2}(t)$ .

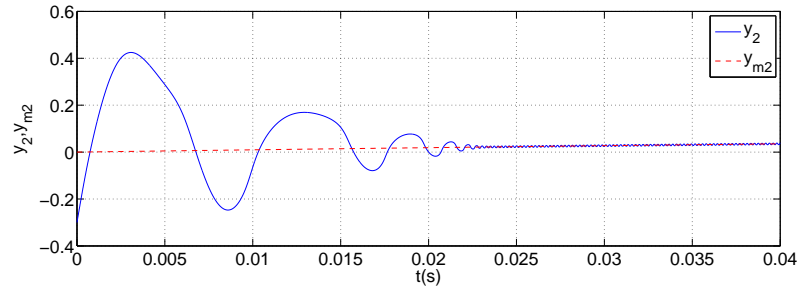


Figura 13 - Saída do sistema  $y_2(t)$  e saída do modelo de referência  $y_{m2}(t)$ , destacando o transitório.

Para ilustrar o efeito do atraso variante no tempo, as Figuras 14 e 15 mostram as variáveis de estado  $\eta_1$  e  $\eta_2$  do subsistema (3.48) e sua correspondente variável de estado atrasada  $\eta_{1d}$  e  $\eta_{2d}$ , respectivamente. O sinal atrasado é distorcido de acordo com a função de variação do atraso dada por (3.51). É importante destacar que a estabilidade e o desempenho do controlador são robustos em relação a este atraso desconhecido.

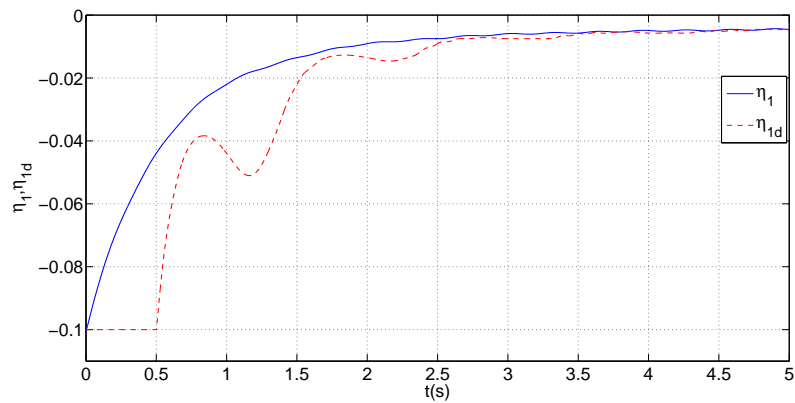


Figura 14 - Variável de estado  $\eta_1(t)$  do subsistema (3.48) e sua correspondente variável de estado atrasada  $\eta_{1d}(t) = \eta_1(t - d(t))$ .

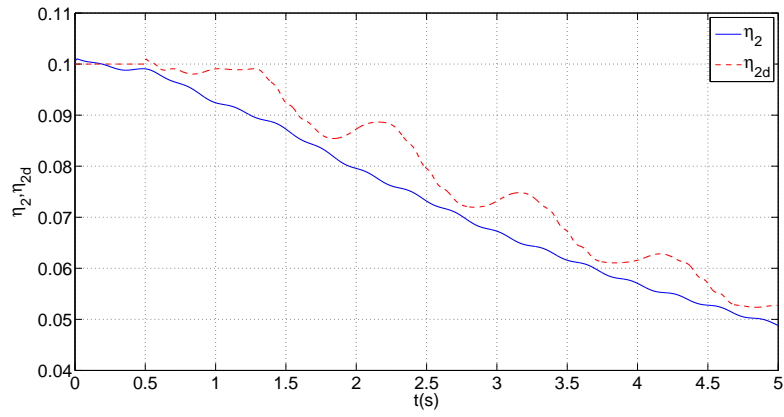


Figura 15 - Variável de estado  $\eta_2(t)$  do subsistema (3.48) e sua correspondente variável de estado atrasada  $\eta_{2d}(t) = \eta_2(t - d(t))$ .

Os sinais de controle  $u_1$  e  $u_2$  são mostrados nas Figuras 16 e 17, e são modulados de acordo com a lei de controle dada em (3.40).

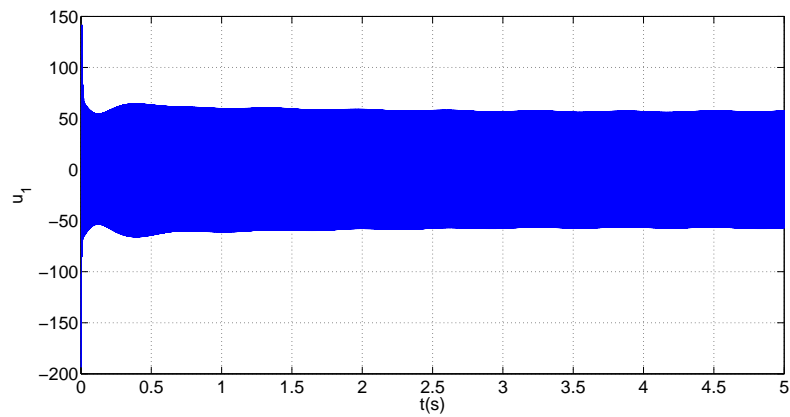


Figura 16 - Sinal de controle  $u_1$ .

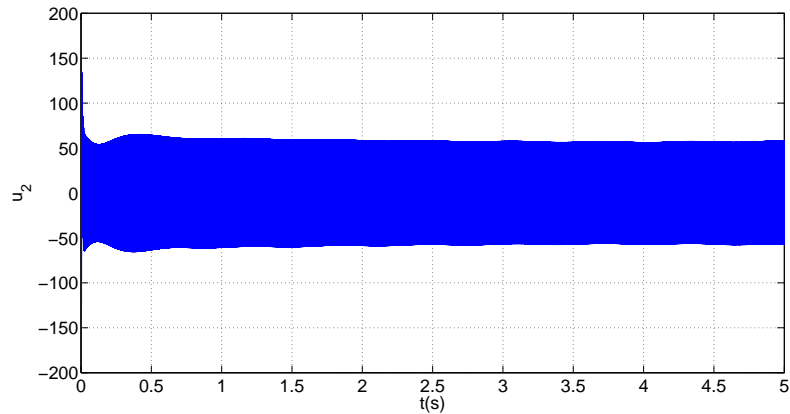


Figura 17 - Sinal de controle  $u_2$ .

### 3.6 Conclusões

Foi desenvolvido um controlador por modo deslizante e realimentação de saída para sistemas incertos não-lineares, multivariáveis, com atraso incerto e variante no tempo em relação ao estado, e não-linearidades descasadas dependentes do estado.

Baseado no controle vetorial unitário por modo deslizante e estimação da norma do estado, o controlador resultante garante a limitação global do estado e a convergência para zero em tempo finito do erro de rastreamento da saída. Além disso, é desnecessária a hipótese usual de limitação de norma uniforme das não-linearidades do sistema com relação aos estados não-medidos.

Até onde se sabe, tais resultados são inéditos na literatura de controle por modo deslizante considerando-se sistemas com atraso no estado.

O conteúdo deste capítulo foi publicado no artigo (COUTINHO; OLIVEIRA; CUNHA, 2011) apresentado na 50<sup>th</sup> *Conference on Decision and Control and European Control Conference* (CDC-ECC), realizada pelo *Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE), em Orlando - EUA.

## 4 CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO NA SAÍDA

No Capítulo 3, foi apresentado o desenvolvimento de um controlador para uma classe de sistemas com *atraso no estado*. Baseado no controle por modo deslizante com realimentação de saída e observadores para estimação da norma do estado, o controlador desenvolvido controlava sistemas incertos não-lineares, com múltiplas entradas e saídas (MIMO), e com atraso incerto e variável no estado. Neste capítulo, é apresentado o desenvolvimento de um controlador para sistemas com *atraso na saída*.

Em (LIU; ZINOBER; SHTESSEL, 2009), aproximações de Padé são utilizadas para transformar o problema de rastreamento de sistemas com atraso na saída em um problema de rastreamento para sistemas de fase não-mínima. Como se sabe, tais aproximações não são boas se o atraso considerado for muito longo. Além disso, apenas a estabilidade local do controlador por modos deslizantes desenvolvido pôde ser garantida.

O controlador proposto aqui é baseado no controle por modo deslizante com realimentação de saída, e utiliza observadores em cascata para estimação do estado não-medido. Seu objetivo é controlar sistemas não-lineares, monovariáveis, de grau relativo arbitrário, com atraso arbitrário conhecido e constante na saída, garantindo a estabilidade global do sistema em malha fechada.

### 4.1 Observadores em Cascata

Para o desenvolvimento de controladores, muitas vezes precisamos estimar variáveis que não podem ser medidas. No caso de sistemas lineares estáveis com atraso conhecido, a estimação pode ser realizada pelo *Preditor de Smith*. Porém, para muitos sistemas não-lineares com atraso na saída, soluções convencionais como o Preditor de Smith não podem ser utilizadas e a construção de observadores torna-se bem mais complexa. Além disso, a presença do atraso na saída dificulta a convergência do valor estimado das variáveis para o valor real e, conseqüentemente, o controle do sistema.

Em (SUBBARAO; MURALIDHAR, 2009), foi desenvolvido um observador para estimar o estado de sistemas lineares com atraso variável e conhecido na saída. Entretanto, verificou-se que este observador é não-causal, por isso, inadequado para controle em malha fechada.

Nesta seção, é abordado o uso de observadores em cascata para estimação do es-

tado em uma classe de sistemas não-lineares com atraso na saída, que foram recentemente desenvolvidos por (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012). São considerados sistemas de uma entrada e uma saída (*Single-Input-Single-Output* - SISO), com parâmetros conhecidos, e atraso arbitrário conhecido e constante na saída. A grande vantagem deste tipo de observador é que consegue-se estimar o valor atual das variáveis de estado através de seus valores atrasados, para sistemas com grandes ou pequenos atrasos na saída, bastando adicionar observadores em cascata à medida que o atraso aumenta.

Na Seção 4.2, será apresentado o desenvolvimento de um controlador por modo deslizante utilizando tais observadores em cascata, para controlar sistemas SISO não-lineares, de grau relativo arbitrário, com parâmetros conhecidos e com atraso na saída arbitrário de valor conhecido e constante.

#### 4.1.1 Formulação do Problema

Considere a seguinte classe de sistemas não-lineares:

$$\dot{x} = Ax + \phi(x, u), \quad (4.1)$$

$$y = Cx(t - d), \quad (4.2)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\phi(x, u) = \begin{bmatrix} \phi_1(x, u) \\ \vdots \\ \phi_n(x, u) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

sendo  $d$  o atraso conhecido e constante, e  $x \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estado que deve ser estimado. A saída  $y \in \mathfrak{R}$  é uma função linear do estado  $x$  no instante de tempo  $t - d$ ,  $u \in \mathfrak{R}$  é a entrada de controle, e  $\phi_i: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  são funções não-lineares suaves com  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

As seguintes hipóteses devem ser satisfeitas:

**(H1)** As funções  $\phi_i(x, u)$  são triangulares em  $x$ , isto é:

$$\frac{\partial \phi_i(x, u)}{\partial x^{k+1}} = 0, \quad (4.6)$$

sendo  $k = i, \dots, n - 1$  e  $x = [x^1, x^2, \dots, x^n]^T$ .

**(H2)** As funções  $\phi_i(x, u)$  são globalmente Lipschitz, uniformemente em  $u$  com relação a  $x$ , ou seja

$$\exists \beta > 0, \quad \text{tal que } \forall (x, x') \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n, \quad \forall u \in \mathfrak{R}, \quad (4.7)$$

as desigualdades

$$\|\phi_i(x, u) - \phi_i(x', u)\| \leq \beta \|x - x'\|, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

são satisfeitas.

**Nota 1.** O vetor  $\phi(x, u)$  deve conter também termos lineares que não estão representados por  $A_x$  em (4.1).

#### 4.1.2 Construção dos Observadores em Cascata

Para estimar o estado atual  $x(t)$  do sistema com atraso constante na saída, descrito por (4.1) e (4.2), serão utilizados observadores conectados em cascata. Quanto maior o tempo de atraso, maior o número  $m$  de observadores necessários, com  $m$  satisfazendo a seguinte inequação:

$$m \geq \frac{\theta^2}{\mu} d, \quad (4.9)$$

onde o parâmetro  $\theta$  é uma constante positiva que deve satisfazer a condição  $\theta \geq 1$ , e a constante  $\mu > 0$  é um parâmetro de projeto.

Cada observador estimará um vetor de estado atrasado, cujo valor do atraso é dado por  $\frac{d}{m}$ , ou seja, o atraso é dividido em partes iguais para cada observador.



Considere a seguinte notação para representar o estado estimado e o sinal de controle, ambos atrasados, em cada observador  $j$

$$x_j(t) = x \left( t - d + j \frac{d}{m} \right), \quad (4.10)$$

$$u_j(t) = u \left( t - d + j \frac{d}{m} \right), \quad (4.11)$$

onde  $j = 1, \dots, m$ .

Então, o observador para estimação do estado é dado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= A\hat{x}_1 + \phi(\hat{x}_1, u_1) - \theta\Delta^{-1}K \left( C\hat{x}_1 \left( t - \frac{d}{m} \right) - y \right), \\ \hat{y}_1 &= C\hat{x}_1, \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_j &= A\hat{x}_j + \phi(\hat{x}_j, u_j) - \theta\Delta^{-1}K \left( C\hat{x}_j \left( t - \frac{d}{m} \right) - y_{j-1} \right), \\ \hat{y}_j &= C\hat{x}_j, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde o vetor  $K = [k_1, \dots, k_n]^T$  deve ser escolhido de tal maneira que a matriz  $A - KC$  seja Hurwitz, e  $\Delta$  é uma matriz diagonal expressa por:

$$\Delta = \text{diag} \left[ 1, \dots, \frac{1}{\theta^{i-1}}, \dots, \frac{1}{\theta^{n-1}} \right]. \quad (4.13)$$

O vetor  $\hat{x}_j(t)$  é uma estimativa do estado atrasado  $x_j(t)$  e  $\hat{x}_m(t)$  é uma estimativa de  $x(t)$ .

Todos os observadores utilizados em (4.12) possuem a mesma estrutura. Esta característica facilita significativamente sua implementação.

Se o atraso for suficientemente pequeno, somente um observador de alto ganho seria necessário para estimar as variáveis de estado do sistema, e o atraso também poderia ser variável. A convergência exponencial neste caso é provada no Lema 1 proposto em (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012).

**Lema 1. (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012, Lema 1)**

*Considere o seguinte observador:*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) - \theta\Delta^{-1}K(C\hat{x}(t - d(t)) - y), \quad (4.14)$$

no qual o atraso  $d(t)$  pode ser variante no tempo, contínuo por partes e limitado. Então, para  $\theta$  suficientemente grande e sendo  $d_1$  uma constante positiva tal que  $d(t) \in [0, d_1] \forall t$ , o estado do observador (4.14) irá convergir exponencialmente para o estado do sistema original representado pelas equações (4.1) e (4.2).

*Demonstração.* Seja o erro de observação definido por

$$\tilde{x} := \hat{x} - x. \quad (4.15)$$

Derivando (4.15), tem-se

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x}. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.14) e (4.1) em (4.16), obtem-se

$$\dot{\tilde{x}} = A(\hat{x} - x) + \phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u) - \theta\Delta^{-1}KC(\hat{x}(t - d(t)) - x(t - d(t))), \quad (4.17)$$

e aplicando (4.15), tem-se

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u) - \theta\Delta^{-1}KC\tilde{x}(t - d(t)). \quad (4.18)$$

Em (4.18), usando a relação

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t - d(t)) + \int_{t-d(t)}^t \dot{\tilde{x}}(s)ds \quad (4.19)$$

chega-se a

$$\dot{\tilde{x}} = (A - \theta\Delta^{-1}KC)\tilde{x} + \phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u) + \theta\Delta^{-1}KC \int_{t-d(t)}^t \dot{\tilde{x}}(s)ds. \quad (4.20)$$

Aplicando a mudança de coordenadas  $\bar{x} = \Delta\tilde{x}$ , e sabendo que  $\Delta A\Delta^{-1} = \theta A$  e  $C\Delta = C\Delta^{-1}$ , então a equação (4.20) pode ser reescrita na forma

$$\dot{\bar{x}} = \theta(A - KC)\bar{x} + \Delta(\phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u)) + \theta KC \int_{t-d(t)}^t \dot{\bar{x}}(s)ds. \quad (4.21)$$

No intuito de desenvolver um majorante  $d_1$  do atraso  $d(t)$  para garantir que o erro  $\bar{x}$  irá convergir exponencialmente a zero, será utilizada a seguinte função de *Lyapunov*-

*Krasovskii* (FRIDMAN, 2001)

$$W(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x} + \int_{t-d_1}^t \int_s^t \|\dot{\hat{x}}(\xi)\|^2 d\xi ds, \quad (4.22)$$

onde  $P$  é uma matriz simétrica positiva definida e que satisfaz a equação algébrica de Lyapunov

$$P(A - KC) + (A - KC)^T P \leq -\mu I_n, \quad (4.23)$$

sendo  $\mu > 0$ , conforme (4.9).

Após algumas manipulações, a equação (4.22) pode ser escrita como

$$W(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x} + \int_{t-d_1}^t (s - t + d_1) \|\dot{\hat{x}}(s)\|^2 ds. \quad (4.24)$$

Derivando a equação (4.24), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{W} &\leq \theta \bar{x}^T (P(A - KC) + (A - KC)^T P) \bar{x} + 2\bar{x}^T P \Delta(\phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u)) + \\ &+ 2\theta \bar{x}^T P K C \int_{t-d(t)}^t \dot{\hat{x}}(s) ds + d_1 \|\dot{\hat{x}}\|^2 - \int_{t-d_1}^t \|\dot{\hat{x}}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Utilizando (4.23), obtem-se:

$$\begin{aligned} \dot{W} &\leq -\mu\theta \|\bar{x}\|^2 + 2\bar{x}^T P \Delta(\phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u)) + 2\theta \bar{x}^T P K C \int_{t-d(t)}^t \dot{\hat{x}}(s) ds + \\ &+ d_1 \|\dot{\hat{x}}\|^2 - \int_{t-d_1}^t \|\dot{\hat{x}}(s)\|^2 ds, \end{aligned} \quad (4.26)$$

sendo

$$\Delta(\phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u)) = \begin{bmatrix} \phi_1(\hat{x}, u) - \phi_1(x, u) \\ \vdots \\ \frac{1}{\theta^{i-1}} (\phi_i(\hat{x}, u) - \phi_i(x, u)) \\ \frac{1}{\theta^{n-1}} (\phi_n(\hat{x}, u) - \phi_n(x, u)) \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Usando a desigualdade de Lipschitz (4.8), tem-se que

$$\left\| \frac{1}{\theta^{i-1}} (\phi_i(\hat{x}, u) - \phi_i(x, u)) \right\| \leq \frac{\beta}{\theta^{i-1}} \sqrt{\sum_{k=1}^i (\hat{x}^k - x^k)^2}. \quad (4.28)$$

Sabendo que  $\theta \geq 1$ , deduz-se que

$$\left\| \frac{1}{\theta^{i-1}} (\phi_i(\hat{x}, u) - \phi_i(x, u)) \right\| \leq \beta \sqrt{\sum_{k=1}^i (\bar{x}^k)^2}, \quad (4.29)$$

onde  $(\hat{x}^k - x^k) = \theta^{k-1} \bar{x}^k$  e  $\sqrt{\sum_{k=1}^i (\bar{x}^k)^2} \leq \|\bar{x}\|$ .

Então, pode-se escrever que

$$\left\| \frac{1}{\theta^{i-1}} (\phi_i(\hat{x}, u) - \phi_i(x, u)) \right\| \leq \beta \|\bar{x}\|, \quad (4.30)$$

$$\|\Delta(\phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u))\|^2 \leq n\beta^2 \|\bar{x}\|^2, \quad (4.31)$$

sendo  $i = 1, \dots, n$ . O que leva a

$$\|2\bar{x}^T P \Delta(\phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u))\| \leq 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{n} \beta \|\bar{x}\|^2. \quad (4.32)$$

E então, tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{W} &\leq -\mu\theta \|\bar{x}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{n} \beta \|\bar{x}\|^2 + 2\theta \bar{x}^T P K C \int_{t-d(t)}^t \dot{\bar{x}}(s) ds + \\ &+ d_1 \|\dot{\bar{x}}(t)\|^2 - \int_{t-d_1}^t \|\dot{\bar{x}}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.33)$$

De (4.21) e usando a desigualdade de Hölder (GUSTAFSON, 1999, p. 63), resulta em

$$\|\dot{\bar{x}}(t)\|^2 \leq 2\theta^2 [\|A - KC\| + 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{n} \beta]^2 \|\bar{x}\|^2 + 2\|K\|^2 \sigma(t)^2, \quad (4.34)$$

onde  $\sigma(t) = \theta \int_{t-d(t)}^t \dot{\bar{x}}(s) ds$ .

Usando a desigualdade de Young (NICULESCU; PERSSON, 2004, p. 18), obtem-se

$$\left\| 2\theta \bar{x}^T P K C \int_{t-d(t)}^t \dot{\bar{x}}(s) ds \right\| \leq \frac{\theta\mu}{2} \|\bar{x}\|^2 + \frac{2}{\mu\theta} \lambda_{\max}^2(P) \|K\|^2 \|\sigma(t)\|^2. \quad (4.35)$$

Logo, utilizando (4.35) e (4.33), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{W} &\leq -\frac{\mu\theta}{2} \|\bar{x}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n}\beta \|\bar{x}\|^2 + \frac{2}{\mu\theta} \lambda_{\max}^2(P) \|K\|^2 \|\sigma(t)\|^2 + \\ &+ 2d_1\theta^2 [\|A - KC\| + 2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n}\beta]^2 \|\bar{x}\|^2 + 2d_1 \|K\|^2 \|\sigma(t)\|^2 + \\ &- \int_{t-d_1}^t \|\dot{\bar{x}}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para provar o Lema 1, é suficiente que se encontre condições que garantam a seguinte desigualdade

$$\dot{W} + \epsilon W < 0, \quad (4.37)$$

com  $\forall \epsilon > 0$ .

Da equação acima e usando (4.22), pode-se escrever que

$$\bar{x}^T P \bar{x} \leq W(\bar{x}) \leq W(\bar{x}(t_0)) e^{-\epsilon(t-t_0)}, \quad (4.38)$$

então, deduz-se que

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\sqrt{W(\bar{x}(t_0))}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\frac{\epsilon}{2}(t-t_0)}. \quad (4.39)$$

De (4.36) e (4.37), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{W} + \epsilon W &\leq -\frac{\mu\theta}{2} \|\bar{x}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n}\beta \|\bar{x}\|^2 + \frac{2}{\mu\theta} \lambda_{\max}^2(P) \|K\|^2 \|\sigma(t)\|^2 + \\ &+ \epsilon \lambda_{\max}(P) \|\bar{x}\|^2 + 2d_1\theta^2 [\|A - KC\| + 2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n}\beta]^2 \|\bar{x}\|^2 + \\ &+ 2d_1 \|K\|^2 \|\sigma(t)\|^2 + \epsilon d_1 \int_{t-d_1}^t \|\dot{\bar{x}}(s)\|^2 ds - \int_{t-d_1}^t \|\dot{\bar{x}}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.40)$$

E usando a desigualdade de *Jensen* (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003, p. 322), obtem-se

$$\int_{t-d_1}^t \|\dot{\bar{x}}(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\theta^2 d_1} \|\sigma(t)\|^2. \quad (4.41)$$

Então, chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{W} + \epsilon W &\leq -\left\{ \frac{\mu\theta}{2} - 2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n}\beta - 2d_1\theta^2 [\|A - KC\| + 2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n}\beta]^2 + \right. \\ &- \left. \epsilon \lambda_{\max}(P) \right\} \|\bar{x}\|^2 - \left\{ 1 - 2\lambda_{\max}^2(P) \|K\|^2 \frac{d_1\theta}{\mu} - 2d_1^2\theta^2 \|K\|^2 + \right. \\ &- \left. \epsilon d_1 \right\} \int_{t-d_1}^t \|\dot{\bar{x}}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.42)$$

A convergência exponencial do erro de observação  $\bar{x}$  para zero é garantida se as seguintes desigualdades forem atendidas

$$\begin{aligned} \frac{\mu\theta}{2} - 2\lambda_{max}(P)\sqrt{n}\beta - 2d_1\theta^2 [\|A - KC\| + 2\lambda_{max}(P)\sqrt{n}\beta]^2 - \epsilon\lambda_{max}(P) &\geq 0, \\ \frac{1}{d_1} - 2\lambda_{max}^2(P)\|K\|^2 \frac{\theta}{\mu} - 2d_1\theta^2 \|K\|^2 - \epsilon &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Sendo o máximo atraso admitido dado por

$$d_1 = \frac{\mu}{\theta^2}, \quad (4.44)$$

e fazendo  $\epsilon \rightarrow +0$ , então, as desigualdades em (4.43) serão equivalentes a

$$\begin{aligned} \frac{\mu\theta}{2} &> 2\lambda_{max}(P)\sqrt{n}\beta + 2\mu [\|A - KC\| + 2\lambda_{max}(P)\sqrt{n}\beta]^2, \\ \theta^2 &> 2\lambda_{max}^2(P)\|K\|^2\theta + 2\mu^2\|K\|^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

As desigualdades em (4.45) são atendidas para qualquer constante positiva  $\mu$ , através da escolha de  $\theta$  suficientemente grande.  $\square$

Pelo Lema 1, determina-se o máximo atraso (4.44) admitido pelo observador (4.14) que garanta  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ , desde que  $\theta$  seja escolhido de acordo com as condições em (4.45). Para lidar com atrasos maiores, na próxima seção serão apresentados observadores conectados em cascata.

#### 4.1.3 Observadores de Alto Ganho em Cascata

Nesta seção é apresentada uma cascata de observadores de alto ganho, onde cada observador irá estimar o estado com atraso fracionário, de maneira que a saída com o atraso total será a combinação das saídas estimadas com frações do atraso. Assim, pode-se admitir a presença de atraso com valor arbitrário na saída.

Após provar a convergência do observador (4.14) para um pequeno atraso, será demonstrado agora que uma quantidade suficiente de observadores em cascata é capaz de reconstruir o estado do sistema dado pelas equações (4.1) e (4.2), para um atraso longo e constante (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012).

**Teorema 4.** (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012, Teorema 1) *Considerando o sistema (4.1) e (4.2), então para qualquer atraso  $d$  conhecido e constante, existe uma constante positiva  $\theta$  suficientemente grande e um número natural  $m$  de observadores tal que o estado do último observador em (4.12) converge exponencialmente para o estado do sistema (4.1) e (4.2).*

*Demonstração.* A convergência dos observadores em cascata será provada passo a passo.

**Passo 1** Considere o primeiro observador da cascata:

$$\dot{\hat{x}}_1 = A\hat{x}_1 + \phi(\hat{x}_1, u_1) - \theta\Delta^{-1}K \left( C\hat{x}_1 \left( t - \frac{d}{m} \right) - y \right), \quad (4.46)$$

sendo  $y = Cx(t-d)$ . Então, tem-se

$$\dot{\hat{x}}_1 = A\hat{x}_1 + \phi(\hat{x}_1, u_1) - \theta\Delta^{-1}KC \left( \hat{x}_1 \left( t - \frac{d}{m} \right) - x(t-d) \right), \quad (4.47)$$

onde  $x(t-d) = x_1 \left( t - \frac{d}{m} \right)$ .

Se  $\theta$  for escolhido suficientemente grande e  $m$  for um número inteiro de tal maneira que

$$m \geq \frac{\theta^2}{\mu}d, \quad (4.48)$$

então  $\hat{x}_1(t)$  convergirá para

$$x_1(t) = x \left( t - d + \frac{d}{m} \right) = x \left( t - (m-1)\frac{d}{m} \right). \quad (4.49)$$

Logo, se voltarmos às condições do Lema 1, o atraso agora será  $\frac{d}{m}$ , que deve ser menor que  $\frac{\mu}{\theta^2}$ .

**Passo j**

A cada passo ( $j = 2, \dots, m$ ), é estimado o estado atrasado  $x \left( t - d + j\frac{d}{m} \right)$  usando o seguinte observador:

$$\dot{\hat{x}}_j = A\hat{x}_j + \phi(\hat{x}_j, u_j) - \theta\Delta^{-1}KC \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{d}{m} \right) - x_{j-1}(t) \right). \quad (4.50)$$

Considerando que o erro de observação seja  $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$ , então somando e sub-

traindo o termo  $\theta\Delta^{-1}KCx_{j-1}(t)$  na equação (4.50), obtem-se

$$\dot{\tilde{x}}_j = A\tilde{x}_j + \phi(\hat{x}_j, u_j) - \phi(x_j, u_j) - \theta\Delta^{-1}KC\tilde{x}_j \left( t - \frac{d}{m} \right) + \theta\Delta^{-1}KC\tilde{x}_{j-1}(t). \quad (4.51)$$

Realizando a mudança de coordenadas  $\bar{x}_j = \Delta\tilde{x}_j$ , tem-se

$$\dot{\bar{x}}_j = \theta(A - KC)\bar{x}_j + \Delta(\phi(\hat{x}_j, u_j) - \phi(x_j, u_j)) + \theta KC \int_{t-\frac{d}{m}}^t \dot{\tilde{x}}_j(s)ds + \theta KC\bar{x}_{j-1}. \quad (4.52)$$

Para provar a convergência do erro  $\bar{x}_j$ , suponha que o erro de observação  $\bar{x}_{j-1}$  irá convergir exponencialmente a zero. Então, considere a seguinte função de Lyapunov-Krasovskii

$$W_j(\bar{x}_j) = \bar{x}_j^T P \bar{x}_j + \int_{t-\frac{d}{m}}^t \left( s - t + \frac{d}{m} \right) \|\dot{\bar{x}}_j(s)\|^2 ds, \quad (4.53)$$

sendo que sua derivada deve satisfazer a desigualdade

$$\begin{aligned} \dot{W} &\leq -\mu\theta \|\bar{x}_j\|^2 + 2\bar{x}_j^T P \Delta(\phi(\hat{x}_j, u_j) - \phi(x_j, u_j)) + 2\theta\bar{x}_j^T P K C \bar{x}_{j-1} + \\ &+ 2\theta\bar{x}_j^T P K C + \int_{t-\frac{d}{m}}^t \dot{\bar{x}}_j(s)ds + \frac{d}{m} \|\dot{\bar{x}}_j\|^2 - \int_{t-\frac{d}{m}}^t \|\dot{\bar{x}}_j(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Usando as desigualdades de Hölder (GUSTAFSON, 1999, p. 63) e Young (NICULESCU; PERSSON, 2004, p. 18), obtem-se

$$\|\dot{\bar{x}}_j\|^2 \leq 3\theta^2 [\|A - KC\| + \sqrt{n}\beta\lambda_{max}(P)]^2 \|\bar{x}_j\|^2 + 3\|K\|^2 \|\sigma_j\|^2 + 3\|K\|^2 \theta^2 \|\bar{x}_{j-1}\|^2, \quad (4.55)$$

onde  $\sigma_j(t) = \theta \int_{t-\frac{d}{m}}^t \dot{\bar{x}}_j(s)ds$  e

$$\begin{aligned} 2\theta\bar{x}_j^T P K C \left( \bar{x}_{j-1} + \int_{t-\frac{d}{m}}^t \dot{\bar{x}}_j(s)ds \right) &\leq \frac{\mu\theta}{2} \|\bar{x}_j\|^2 + \frac{4\theta\|K\|^2 \lambda_{max}^2(P)}{\mu} \|\bar{x}_{j-1}\|^2 + \\ &+ \frac{4\|K\|^2 \lambda_{max}^2(P)}{\mu\theta} \|\sigma_j(t)\|^2. \end{aligned} \quad (4.56)$$

De (4.55) e (4.56), tem-se



$$\begin{aligned}
\dot{W}_j + \epsilon W_j &\leq - \left\{ \frac{\mu\theta}{2} - 2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n}\beta - \frac{3d}{m}\theta^2 [\|A - KC\| + \sqrt{n}\beta\lambda_{\max}(P)]^2 + \right. \\
&\quad - \left. \epsilon\lambda_{\max}(P) \right\} \|\bar{x}_j\|^2 - \left[ 1 - \frac{4\theta}{\mu}\lambda_{\max}^2(P)\|K\|^2\frac{d}{m} - 3\|K\|^2\left(\frac{d}{m}\right)^2\theta^2 + \right. \\
&\quad \left. - \frac{d}{m} \right] \int_{t-d_1}^t \|\dot{\bar{x}}_j(s)\|^2 ds + \left[ \frac{\theta^2\|K\|^2\lambda_{\max}^2(P)}{\mu} + \frac{3d}{m}\|K\|^2 \right] \|\bar{x}_{j-1}\|^2.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Então, pode-se dizer que, se  $m \geq \frac{\theta^2}{\mu}d$  e se as desigualdades

$$\begin{aligned}
\mu\theta &\geq 2 \left\{ 2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n}\beta + 3\mu [\|A - KC\| + \sqrt{n}\beta\lambda_{\max}(P)]^2 + \epsilon\lambda_{\max}(P) \right\}, \\
\theta^2 &\geq 4\lambda_{\max}^2(P)\|K\|^2\theta + 3\|K\|^2\mu^2 + \epsilon\mu,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

forem satisfeitas, chega-se a

$$\dot{W}_j \leq -\epsilon W_j + \left[ \frac{4\theta\|K\|^2\lambda_{\max}^2(P)}{\mu} + \frac{3d}{m}\|K\|^2 \right] \|\bar{x}_{j-1}\|^2. \tag{4.59}$$

Usando o Lema da Comparação (KHALIL, 2002, Lema 3.4), conclui-se que, se  $\bar{x}_{j-1}$  converge exponencialmente a zero, então  $\bar{x}_j$  também convergirá exponencialmente a zero. Observe que as condições em (4.57) também garantem a convergência do primeiro observador ( $j = 1$ ). Então, deduz-se recursivamente que, todos os erros de observação convergem exponencialmente a zero.

Portanto, pode-se dizer que para todo atraso constante  $d$  e para todo  $\theta$  que satisfaça as condições em (4.57), existe um número de observadores em cascata

$$m \geq \frac{\theta^2}{\mu}d \tag{4.60}$$

tal que todos os erros de observação convergem exponencialmente a zero.  $\square$

#### 4.1.4 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema não-linear com atraso na saída, cujas não-linearidades satisfazem as hipóteses (H1)–(H2), para ilustrar o observador proposto em (AHMED-ALI;

CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 0,5 \tanh(x_1(t)x_2(t)) + u(t), \\ y(t) &= x_1(t-d),\end{aligned}\tag{4.61}$$

com o sinal de controle senoidal:

$$u(t) = 0,1 \operatorname{sen}(0,1t).\tag{4.62}$$

O sistema (4.61) é estável em malha aberta e pertence a uma classe de sistemas triangulares com não-linearidades Lipschitz, podendo ser representado na forma das equações (4.1) e (4.2), com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + 0.5 \tanh(x_1 x_2) + u \end{bmatrix}.\tag{4.63}$$

As condições iniciais escolhidas para o sistema e para o observador em cascata são:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_j(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-d, 0].\tag{4.64}$$

Para o atraso na saída  $d = 0,25$  s, o número de observadores ( $m = 1$ ) foi escolhido de maneira a satisfazer (4.60). Baseado em (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012), adotou-se  $\theta = 2$  para atender (4.58). A matriz  $K = [1 \ 0, 5]^T$  foi calculada para que a matriz  $A - KC$  seja Hurwitz.

As Figuras 18 à 20 apresentam os sinais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $y$ , respectivamente, e comparam seus valores medidos e observados.

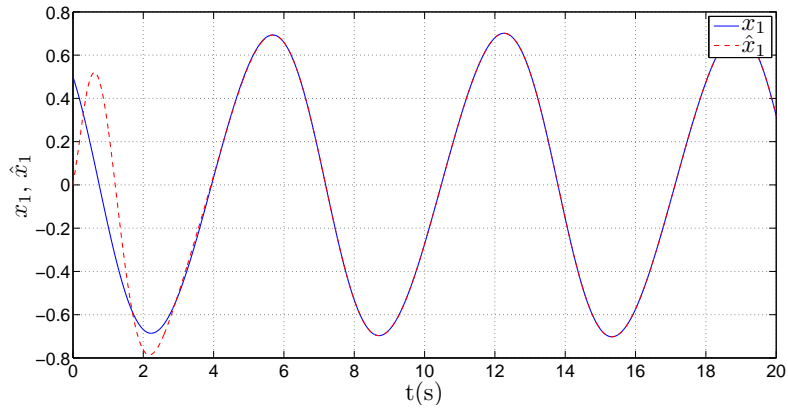


Figura 18 - Estado medido  $x_1$  e estado estimado  $\hat{x}_1$  por um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,25$  s.

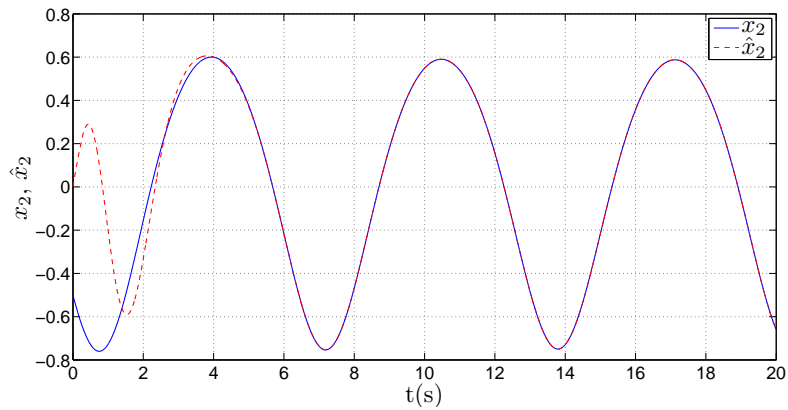


Figura 19 - Estado medido  $x_2$  e estado estimado  $\hat{x}_2$  por um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,25$  s.

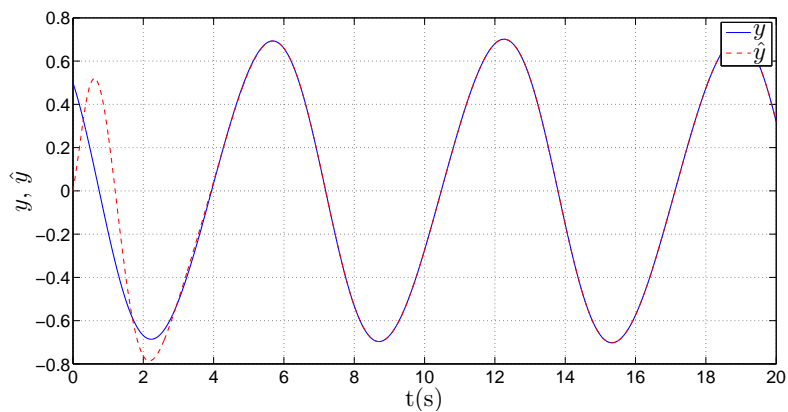


Figura 20 - Saída medida  $y$  e saída observada  $\hat{y}$  por um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,25$  s.

Os erros de estimação  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$ , e o erro de observação  $\tilde{y}$ , são apresentados nas Figuras 21 e 22. Note que o erro de observação converge a zero, logo pode-se concluir que somente um único observador é necessário para estimar o estado do sistema, com um atraso na saída  $d = 0,25 s$ .

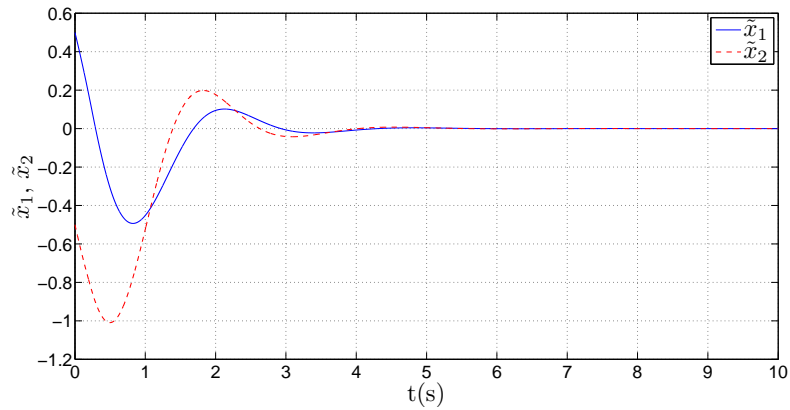


Figura 21 - Erros de estimação  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$  de um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,25 s$ .

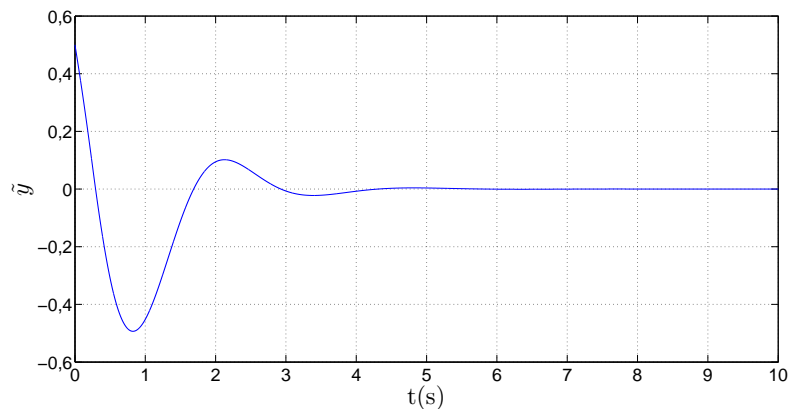


Figura 22 - Erro de observação  $\tilde{y}$  de um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,25 s$ .

Se o atraso for ampliado para  $d = 0,5 s$ , um único observador não é suficiente para estimar o estado do sistema. Consequentemente, os erros de estimação do estado  $x_1$  e  $x_2$ , e o erro de observação da saída  $y$ , tendem a infinito. As simulações são mostradas nas Figuras 23 à 27.

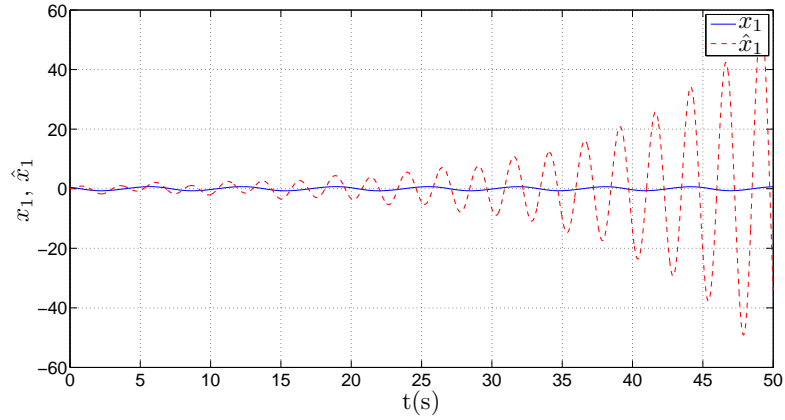


Figura 23 - Estado medido  $x_1$  e estado estimado  $\hat{x}_1$  por um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

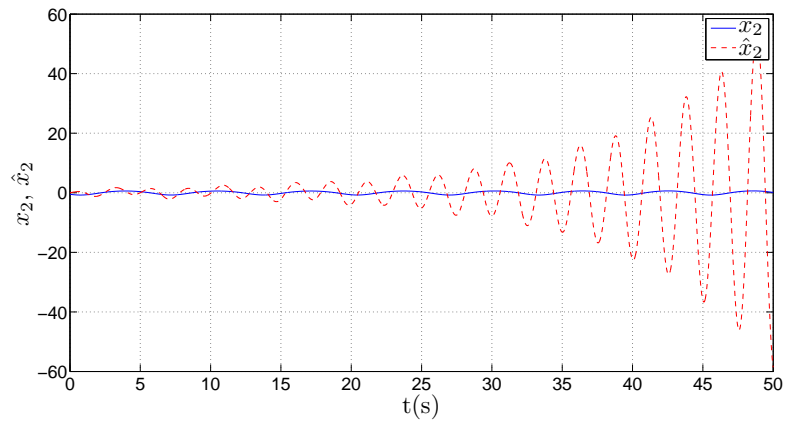


Figura 24 - Estado medido  $x_2$  e estado estimado  $\hat{x}_2$  por um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

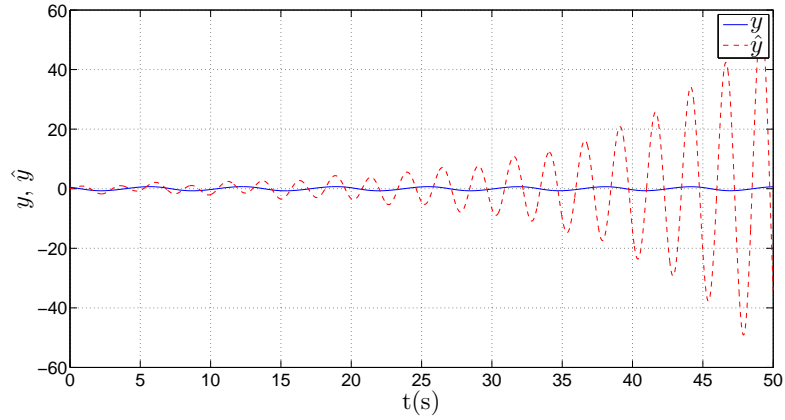


Figura 25 - Saída medida  $y$  e saída observada  $\hat{y}$  por um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

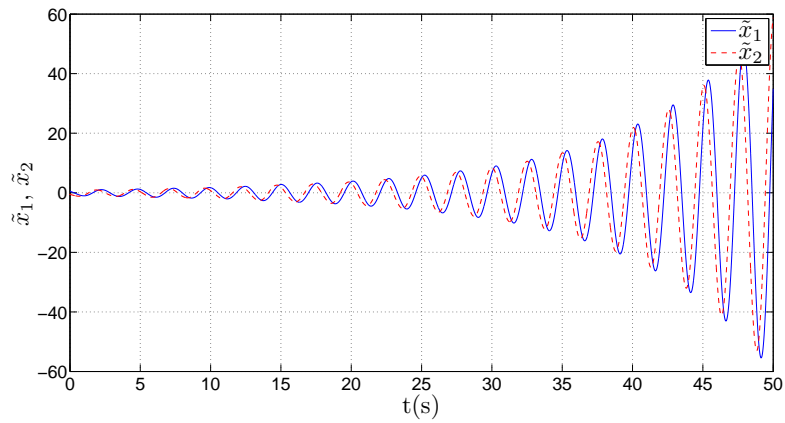


Figura 26 - Erros de estimação  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$  de um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

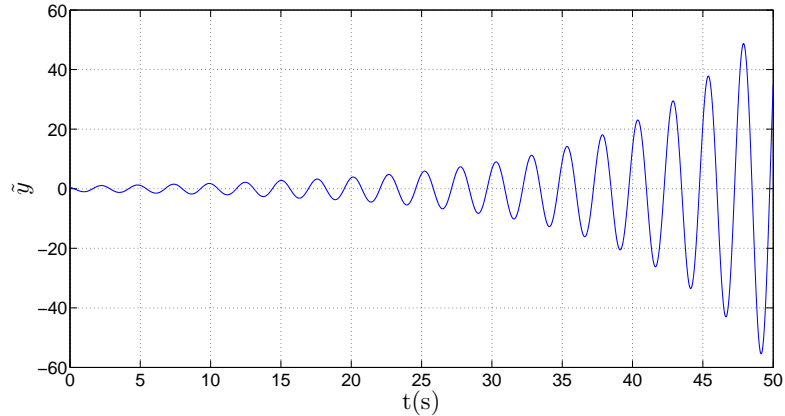


Figura 27 - Erro de observação  $\tilde{y}$  de um único observador. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5 s$ .

Agora, para estimar o estado do sistema com atraso na saída  $d = 0,5 s$ , foram utilizados dois observadores em cascata ( $m = 2$ ), a fim de satisfazer a restrição (4.60). Com base em (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012), adotou-se  $\theta = 2$  na simulação para atender (4.58). A matriz  $K = [0,9 \ 0,25]^T$  foi calculada para que a matriz  $A - KC$  seja Hurwitz. Esta quantidade de observadores com os parâmetros escolhidos permite a convergência para zero dos erros de estimação e de observação.

As Figuras 28 à 30 apresentam os sinais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $y$ , respectivamente, comparando seus valores medidos e observados, utilizando dois observadores.

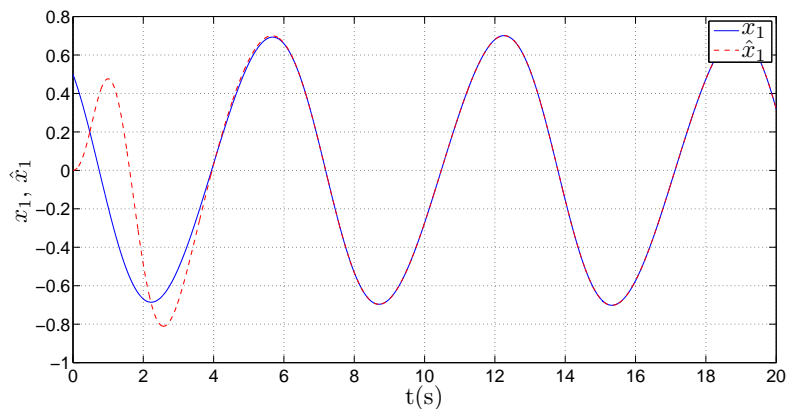


Figura 28 - Estado medido  $x_1$  e estado estimado  $\hat{x}_1$  por dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5 s$ .

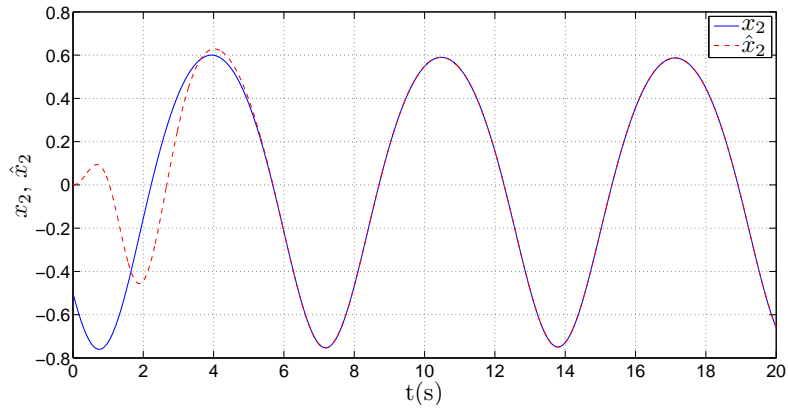


Figura 29 - Estado medido  $x_2$  e estado estimado  $\hat{x}_2$  por dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

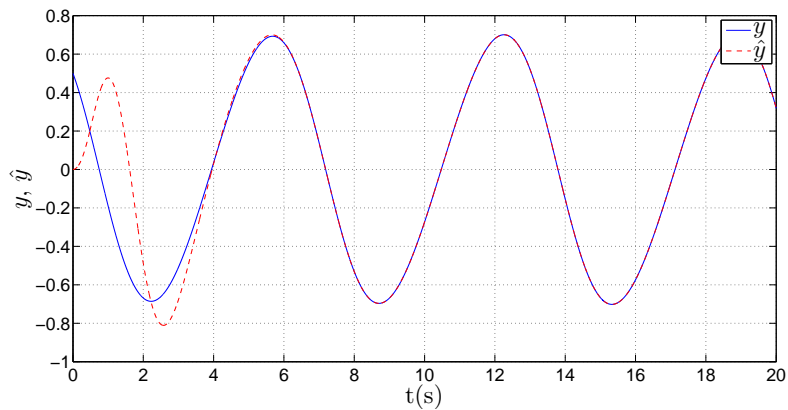


Figura 30 - Saída medida  $y$  e saída observada  $\hat{y}$  por dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

Os erros de estimação  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$ , e o erro de observação  $\tilde{y}$ , são apresentados nas Figuras 31 e 32. O uso de dois observadores em cascata permite que o erro de observação convirja para zero. Portanto, esta quantidade de observadores é suficiente para estimar o estado do sistema, considerando o atraso na saída  $d = 0,5$  s.



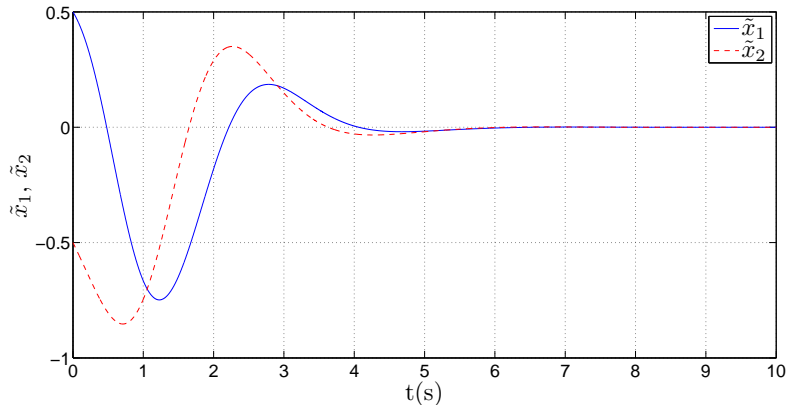


Figura 31 - Erros de estimação  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$  de dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

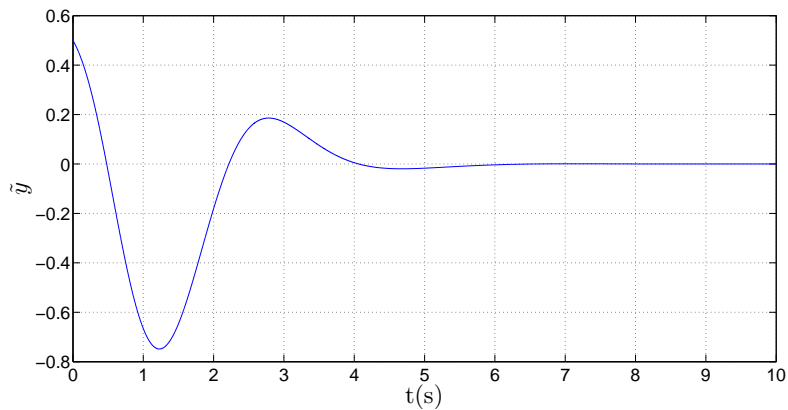


Figura 32 - Erro de observação  $\tilde{y}$  de dois observadores em cascata. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

## 4.2 Controle por Modo Deslizante utilizando Observadores em Cascata

Na Seção 4.1, foi abordado o uso dos observadores em cascata desenvolvidos por (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012) para estimação do estado em sistemas com atraso na saída.

Nesta seção, é desenvolvido um controlador por modo deslizante que utiliza tais observadores em cascata. O objetivo é controlar sistemas SISO não-lineares, de grau relativo arbitrário, com parâmetros conhecidos e com atraso arbitrário na saída conhecido e constante, garantindo-se a estabilidade global do sistema de controle em malha fechada.

### 4.2.1 Formulação do Problema

Considere a mesma classe de sistemas não-lineares apresentada em (4.1) e (4.2):

$$\dot{x} = Ax + \phi(x, u), \quad (4.65)$$

$$y = Cx(t - d), \quad (4.66)$$

onde  $d$  é o atraso conhecido e constante,  $u \in \mathfrak{R}$  é a entrada de controle,  $y \in \mathfrak{R}$  é a saída medida e  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estado que deve ser estimado. Por simplificação, assume-se que a função não-linear  $\phi(x, u)$  é dada por

$$\phi(x, u) = Bk_p(x, t)[u + w_\phi(x, t)], \quad (4.67)$$

onde

$$B = [0 \ \dots \ 0 \ 1]^T. \quad (4.68)$$

A tripla  $\{A, B, C\}$  está na forma do controlador de Brunovsky, ou seja, representa uma cadeia de  $n$  integradores (MARINO; TOMEI, 1995).

A função escalar  $k_p(x, t)$  é o ganho de alta frequência (HFG). O termo  $w_\phi(x, t)$  é uma perturbação não-linear, incerta, variante no tempo e dependente do estado.

Para realizar o observador de acordo com (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHILAGARRIGUE, 2012), o sistema deve atender as hipóteses (H1) e (H2) assumidas na Seção 4.1.1.

Para realizar o controle, são assumidas as seguintes hipóteses adicionais:

- (H3)** A função  $w_\phi(x, t) \in \mathfrak{R}$  é contínua em  $x$  e contínua por partes em  $t$ .
- (H4)** O sinal do ganho  $\text{sgn}(k_p(x, t))$  é constante, conhecido e  $|k_p(x, t)| \geq \underline{k}_p$ , onde  $\underline{k}_p > 0$  é um limitante inferior constante e conhecido para  $k_p(x, t)$ .
- (H5)** Existem uma função classe  $\mathcal{K}$  globalmente Lipschitz  $\varphi_w(\|x\|)$  e uma constante  $c_w \geq 0$ , ambas conhecidas, tal que  $|w_\phi(x, t)| \leq \varphi_w(\|x\|) + c_w$ .

### 4.2.2 Estabilização

Será projetada uma lei de controle dinâmica  $u$ , via realimentação de saída, para garantir a estabilidade global do sistema. Desta maneira, o estado  $x$  deve tender ao menos assintoticamente para zero. Além disso, o controlador deve manter todos os sinais do sistema limitados, partindo de quaisquer condições iniciais.

Seguindo o desenvolvimento de controladores a estrutura variável por realimentação de saída de (OLIVEIRA, 2010), considera-se a dinâmica dada em (4.65–4.67), e substituindo  $u$  por  $u + K_m x / k_p(x, t) - K_m x / k_p(x, t)$ , tem-se que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_m x + B k_p(x, t) [u - K_m x / k_p(x, t) + w_\phi(x, t)], \\ y &= C x(t - d),\end{aligned}\tag{4.69}$$

onde

$$\begin{aligned}x(t - d) &:= [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(n-1)}]^T, \\ A_m &:= A + B K_m.\end{aligned}\tag{4.70}$$

A matriz  $A_m$  deve ser Hurwitz e  $K_m$  é definido por

$$K_m := -[a_0 \ \dots \ a_{n-1}],\tag{4.71}$$

onde os elementos  $a_0, \dots, a_{n-1}$  são os coeficientes do polinômio característico  $p(s)$  da matriz  $A_m$ , ou seja

$$p(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0.\tag{4.72}$$

A equação de estado (4.69) pode ser reescrita como

$$\dot{x} = A_m x + k_p(x, t) B [u + w],\tag{4.73}$$

$$y = C x(t - d),\tag{4.74}$$

na qual a *perturbação equivalente de entrada* é

$$w(x, t) = -K_m x / k_p(x, t) + w_\phi(x, t).\tag{4.75}$$

### 4.2.3 Controle por Modo Deslizante e Realimentação de Saída

Estando somente a saída  $y$  disponível para realimentação, a *superfície de deslizamento* pode ser escolhida como

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &:= S\hat{x} = 0, \\ S &:= [ b_0 \ \dots \ b_{n-2} \ 1 ],\end{aligned}\tag{4.76}$$

sendo  $b_0, \dots, b_{n-2}, 1$  os coeficientes de um polinômio Hurwitz

$$p_S(s) = s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0,\tag{4.77}$$

tal que a função de transferência

$$p_S(s)/p(s) = S(sI - A_m)^{-1}B\tag{4.78}$$

seja estritamente real positiva (*strictly positive real* – SPR) (MARINO; TOMEI, 1995). A variável  $\hat{x}$  é uma estimativa de  $x$  fornecida pelo observador em (4.12):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_j &= A\hat{x}_j + \phi(\hat{x}_j, u_j) - \theta\Delta^{-1}K \left( C\hat{x}_j \left( t - \frac{d}{m} \right) - y_{j-1} \right), \\ \hat{y}_j &= C\hat{x}_j,\end{aligned}\tag{4.79}$$

onde  $j = 1, \dots, m$  e  $m$  é o número de observadores. O vetor  $\hat{x}_j$  é uma estimativa do estado atrasado  $x_j$  e  $\hat{x}_m$  é uma estimativa de  $x$ .

A lei de controle  $u$  proposta é

$$u = -\text{sgn}(k_p(x, t))\varrho(\|\hat{x}\|, t)\text{sgn}(\hat{\sigma}(t)).\tag{4.80}$$

O sinal  $\|\hat{x}\|$  é uma estimativa de um majorante para a norma do estado da planta  $\|x\|$ , tal que a desigualdade

$$|w(x, t)| + \delta \leq \varrho(\|\hat{x}\|, t)\tag{4.81}$$

seja satisfeita, a menos de termos exponencialmente decrescentes. O parâmetro  $\delta > 0$  é uma constante arbitrária.

A *função de modulação*  $\varrho(\|\hat{x}\|, t)$  é uma função escalar não-negativa absolutamente

contínua em  $\|\hat{x}\|$ , contínua por partes e limitada em  $t$  para cada  $\|\hat{x}\|$  fixado. Uma função que satisfaz (4.81) é

$$\varrho(\|\hat{x}\|, t) = \frac{\|K_m\|}{k_p} \|\hat{x}\| + \varphi_w(\|\hat{x}\|) + c_w + \delta. \quad (4.82)$$

O diagrama em blocos na Figura 33 representa o esquema de controle proposto neste capítulo.

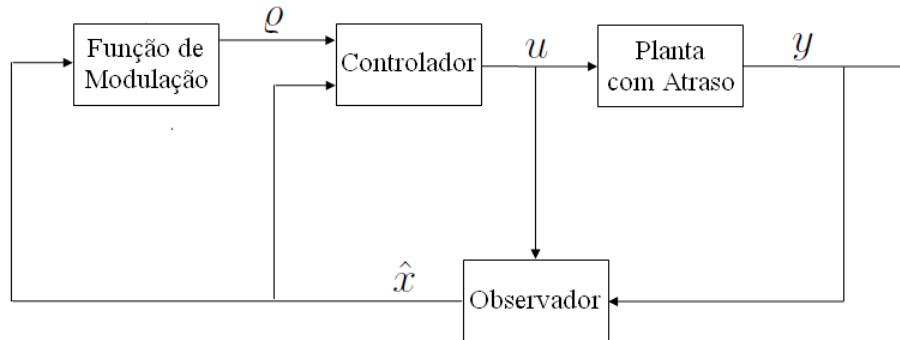


Figura 33 - Diagrama em blocos do esquema de controle proposto.

Como será mostrado no Lema 2, a desigualdade (4.81) é suficiente para que se alcance a estabilidade global. A fim de enunciar esse lema para realimentação de saída, considera-se o *erro de estimação* dado por

$$\tilde{x} := x - \hat{x}. \quad (4.83)$$

**Lema 2. (Propriedade ISS de  $\|\tilde{x}\|$  para  $x$ )** *Considere a dinâmica que governa  $x$  em (4.73) com sinal de saída  $\hat{\sigma} = S\hat{x} = Sx - S\tilde{x}$ , sendo a lei de controle  $u$  dada em (4.80), a função de modulação  $\varrho$  satisfazendo (4.81) e a perturbação equivalente de entrada  $w$  definida em (4.75). Então, (4.73) é ISS com respeito a  $\tilde{x}$  e a seguinte desigualdade se verifica*

$$\|x(t)\| \leq k_e \|\tilde{x}(t)\| + \pi_e, \quad (4.84)$$

onde  $\pi_e$  denota um termo que decai assintoticamente e depende das condições iniciais, e  $k_e > 0$  é uma constante apropriada.

*Demonstração.* Introduzindo a transformação

$$\bar{x} = T_n x, \quad T_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ b_0 & \dots & b_{n-2} & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

e sendo  $\sigma = Sx$  conforme (4.76), o sistema (4.73) pode ser representado na *forma normal* (KHALIL, 2002) com estado

$$\bar{x}(t-d) = \left[ y \quad \dot{y} \quad \dots \quad y^{(n-2)} \quad \sigma(x(t-d)) \right]^T. \quad (4.86)$$

Logo, uma vez que  $p_S(s)/p(s)$  é SPR, pode-se concluir que (4.73) é estável no sentido saída-estado (*Output-to-State Stable* - OSS), ou seja, estável da saída  $\sigma$  de grau relativo unitário para o estado  $x$ . Assim,  $x$  satisfaz

$$\|x\| \leq k_1 |Sx| + \pi_1, \quad (4.87)$$

com  $k_1 > 0$  sendo uma constante apropriada e  $\pi_1$  um termo exponencialmente decrescente que depende do valor da condição inicial do estado  $x$ . Note que, para todo  $\tilde{x}$ ,  $|Sx| \leq |S\tilde{x}|$  ou  $|Sx| > |S\tilde{x}|$ . Sendo assim,  $|Sx| \leq |S\tilde{x}|$  ou  $\text{sgn}(\hat{\sigma}) = \text{sgn}(Sx)$ . Considere o último caso.

Utilizando a candidata à função de Lyapunov  $V = x^T P x$ , onde  $P = P^T > 0$  é a solução de

$$A_m^T P + P A_m = -I, \quad (4.88)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}, \\ &= (x^T A_m^T + (k_p B[u+w])^T) P x + x^T P (A_m x + k_p B[u+w]). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Realizando algumas manipulações, pode-se escrever

$$\dot{V} = x^T (A_m^T P + P A_m) x + 2k_p Sx[u+w]. \quad (4.90)$$

Utilizando (4.88), obtem-se

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 - 2k_p|Sx|\varrho + 2k_p|Sx||w|, \quad (4.91)$$

e então, chega-se a

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 - 2k_p|Sx|[\varrho - |w|]. \quad (4.92)$$

Pode-se concluir que a derivada temporal de  $V$  ao longo das soluções de (4.73) satisfaz (4.92), ou equivalentemente,

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 - 2|Sx|[\underline{k}_p\varrho - |k_p(x, t)w|], \quad (4.93)$$

onde  $\underline{k}_p$  é o limitante inferior de  $k_p(x, t)$  definido em (H4).

Desta forma, como a função de modulação  $\varrho$  em (4.82) satisfaz a desigualdade (4.81), tem-se que  $\dot{V} \leq -\|x\|^2$ . Logo, conclui-se que  $x \rightarrow 0$  assintoticamente, para quaisquer condições iniciais.

Para o caso de  $|Sx| \leq |S\tilde{x}|$ , chega-se à desigualdade  $|Sx| \leq |S\tilde{x}| + \pi_2$ , onde  $\pi_2$  é um termo assintoticamente decrescente. Conseqüentemente, a partir de (4.87), a dinâmica que governa  $x$  é ISS com respeito a  $\tilde{x}$ , conforme (4.84).  $\square$

#### 4.2.4 Análise de Estabilidade

A fim de apresentar o principal resultado para a estabilidade global, pela enunciação do Teorema 5, defini-se o estado do sistema, que inclui a planta e o observador, como

$$z(t) := [x^T(t), \hat{x}^T(t)]^T. \quad (4.94)$$

**Teorema 5. (Estabilidade Global)** *Considere o sistema não-linear com atraso na saída dado em (4.65)-(4.66), com a lei de controle definida em (4.80) e estado atual estimado pelo observador em (4.12). Assuma que as hipóteses (H1)-(H5) deste capítulo sejam satisfeitas. Então, o ponto de equilíbrio  $z = 0$  do sistema em malha fechada é globalmente assintoticamente estável.*

*Demonstração.* A partir do Teorema 4, para qualquer atraso  $d$  conhecido e constante, o estado observado  $\hat{x}$  converge exponencialmente para o estado atual  $x$  e, conseqüentemente,

o erro de observação  $\tilde{x}$  converge exponencialmente para zero, isto é

$$\|\tilde{x}(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty. \quad (4.95)$$

De acordo com a desigualdade (4.84) no Lema 2, a norma de  $x$  é majorada pela norma do erro de estimação mais um termo  $\pi_e$  que decai assintoticamente, ou seja

$$\|x(t)\| \leq k_e \|\tilde{x}(t)\| + \pi_e, \quad (4.96)$$

sendo  $k_e > 0$  uma constante apropriada.

Assim, substituindo (4.95) em (4.96), pode-se concluir que  $x(t)$  e  $z(t)$  tendem para zero assintoticamente.  $\square$

**Corolário 2. (Modo Deslizante Ideal)** *Adicionalmente às hipóteses utilizadas no Teorema 5, se  $\delta > 0$  em (4.81), então o modo deslizante ideal em  $\hat{\sigma}(t) \equiv 0$  é alcançado em tempo finito.*

*Demonstração.* A prova deste corolário segue o que é apresentado na demonstração de (OLIVEIRA, 2010, Corolário 5.1), notando-se que aqui considera-se o problema de estabilização, enquanto que lá o contexto é de rastreamento sem atraso.

Sendo assim, lembrando que  $A = A_m - BK_m$  e  $\hat{x} = x - \tilde{x}$ , então (4.79) pode ser reescrita como

$$\dot{\hat{x}} = A_m \hat{x} + BK_p \left[ u - \frac{K}{k_p} (x - \tilde{x}) + w_\phi \right] + \theta \Delta^{-1} K \left[ C \hat{x} \left( t - \frac{d}{m} \right) - C \hat{x}_{m-1} \right], \quad (4.97)$$

ou seja,

$$\dot{\hat{x}} = A_m \hat{x} + BK_p [u + \zeta_1] + \zeta_2. \quad (4.98)$$

Note que, de acordo com os Teoremas 4 e 5, todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados e que  $x(t)$ ,  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$  tendem para zero.

Logo, existe um tempo finito  $T_1 > 0$  tal que

$$|\zeta_1| + |(BK_p)^{-1} \zeta_2| \leq \delta_1 \quad \forall t \geq T_1, \quad (4.99)$$

e qualquer  $\delta_1 > 0$ .



Agora, considere a função de energia  $V = \hat{x}^T P \hat{x}$ , onde  $P = P^T > 0$  é a solução de

$$A_m^T P + P A_m = -Q, \quad (4.100)$$

com  $Q = Q^T > 0$  e  $PB = S^T$  (lembrar que o sistema  $(A_m, B, S)$  é estritamente real positivo).

Então, calculando  $\dot{V}$  ao longo das soluções da dinâmica que governa  $\hat{x}$ , pode-se verificar que a condição para a existência de modo deslizante  $\hat{\sigma} \dot{\hat{\sigma}} < 0$  é verificada para algum tempo finito  $T_2 \geq T_1$  desde que  $\varrho$  satisfaça (4.81), onde  $\delta > 0$  é uma constante arbitrária.  $\square$

#### 4.2.5 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema não-linear com atraso na saída:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) + 0,5 \tanh(x_1(t)x_2(t)) + u(t), \\ y(t) &= x_1(t-d). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Reescrevendo o sistema (4.101) na forma dada em (4.65), (4.66) e (4.67), ou seja

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bk_p(x, t)[u + w_\phi(x, t)], \\ y &= Cx(t-d), \end{aligned} \quad (4.102)$$

então,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u + 3x_1 + 0,5 \tanh(x_1 x_2)], \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-d), \end{aligned} \quad (4.103)$$

com  $k_p(x, t) = 1$  e onde  $x = [x_1, x_2]^T \in \mathfrak{R}^2$ ,  $u \in \mathfrak{R}$ ,  $y \in \mathfrak{R}$  e  $d = 0,5s$  é o atraso na saída conhecido e constante.

As condições iniciais do sistema e dos observadores em cascata são

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_j(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-d, 0]. \quad (4.104)$$

No projeto dos observadores em cascata, foram utilizados  $\theta = 2$  para atender (4.58), e  $K = [1 \ 0,25]$  para que a matriz  $A - KC$  seja Hurwitz. O número de observadores ( $m = 2$ ) foi escolhido para satisfazer a condição (4.60).

Para o projeto do controlador definido em (4.80), a matriz  $S = [1 \ 1]$  que define a superfície de deslizamento, foi escolhida de acordo com (4.76), para o autovalor  $\lambda = -1$  rad/s.

Adicionalmente, na função de modulação  $\varrho$  dada em (4.82), a matriz  $K_m = [-2 \ -3]$  estabelece os autovalores  $\lambda_1 = -1$  rad/s e  $\lambda_2 = -2$  rad/s, conforme (4.71) e (4.72). O limitante inferior  $\underline{k}_p = 1$  foi assim escolhido pois  $k_p(x, t) = 1$  em (4.103). A função  $\varphi_w(\hat{x}) = 3,1 |\hat{x}_1|$  e a constante  $c_w = 0,5$  foram escolhidas para satisfazer a hipótese (H5). Arbitrou-se  $\delta = 0,2$ , conforme (4.81).

As Figuras 34 à 39 mostram os resultados da simulação deste sistema de controle. Observe que os estados  $x_1$ ,  $x_2$  e a saída  $y$  atingem o equilíbrio, conforme esperado.

Além disso, os erros de estimação  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$ , e o erro de observação  $\tilde{y}$ , convergem a zero, conforme mostram as Figuras 37 e 38.

O sinal de controle  $u$  com amplitude modulada é mostrado na Figura 39. Note que, após a estabilização de  $x_1$  e  $x_2$ , o sinal de controle permanece em uma amplitude pequena e constante, apenas para manter o modo deslizante e a estabilidade.

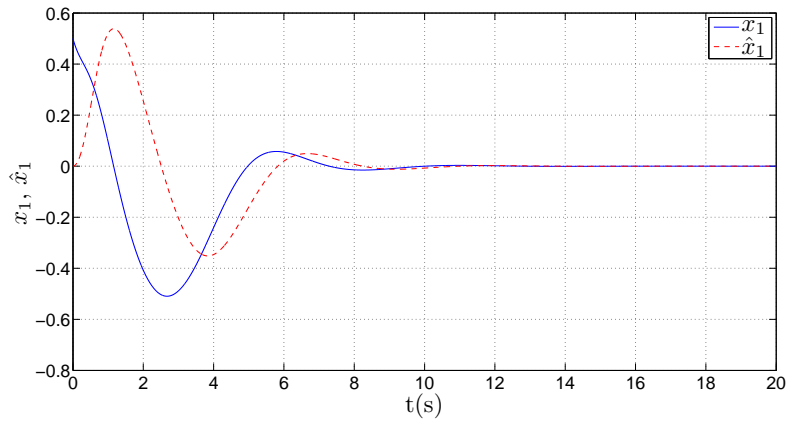


Figura 34 - Estado medido  $x_1$  e estado estimado  $\hat{x}_1$  por dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

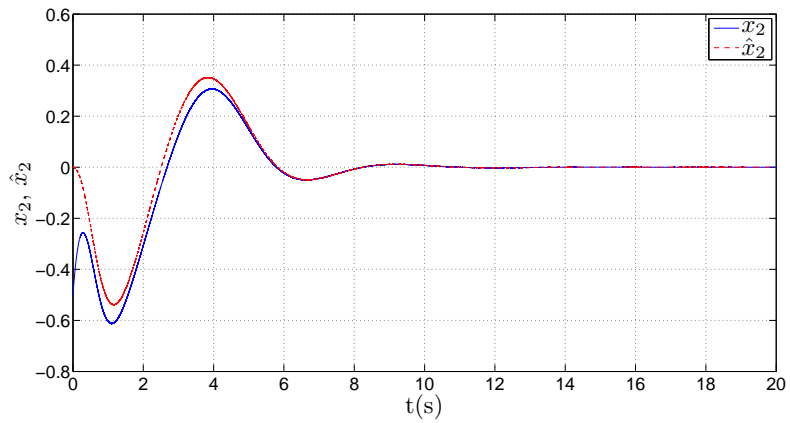


Figura 35 - Estado medido  $x_2$  e estado estimado  $\hat{x}_2$  por dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

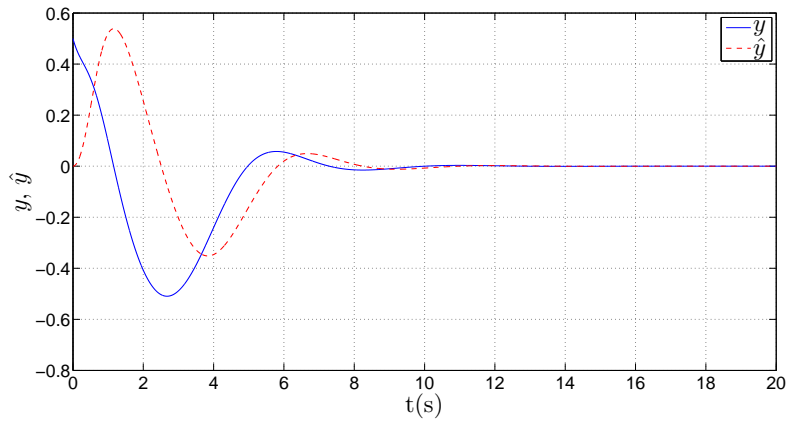


Figura 36 - Saída medida  $y$  e saída observada  $\hat{y}$  por dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

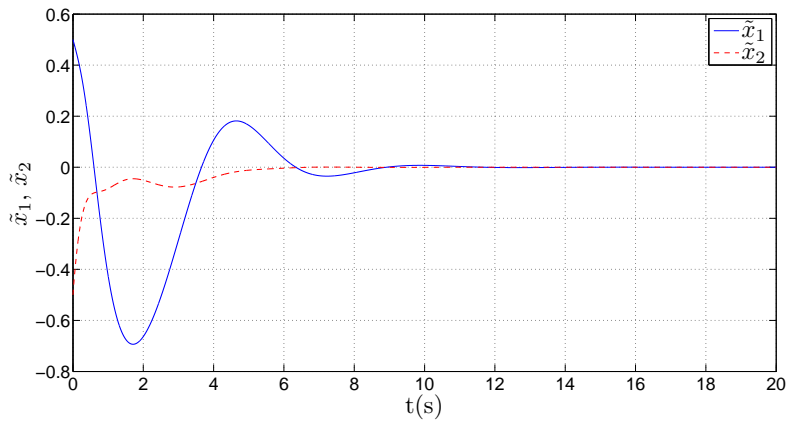


Figura 37 - Erros de estimação  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$  de dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

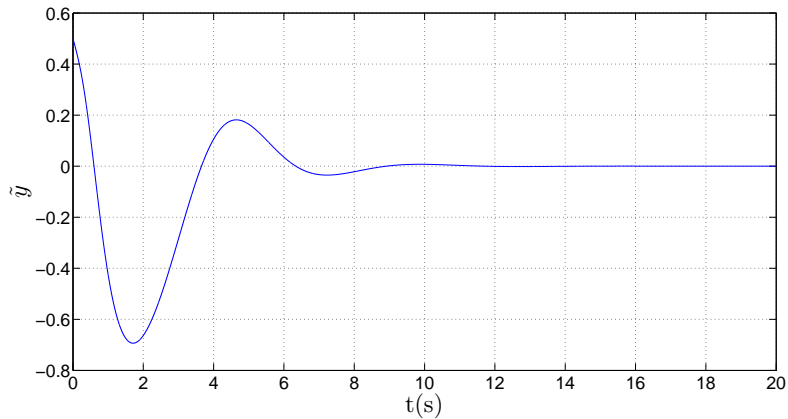


Figura 38 - Erro de observação  $\tilde{y}$  de dois observadores em cascata, com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

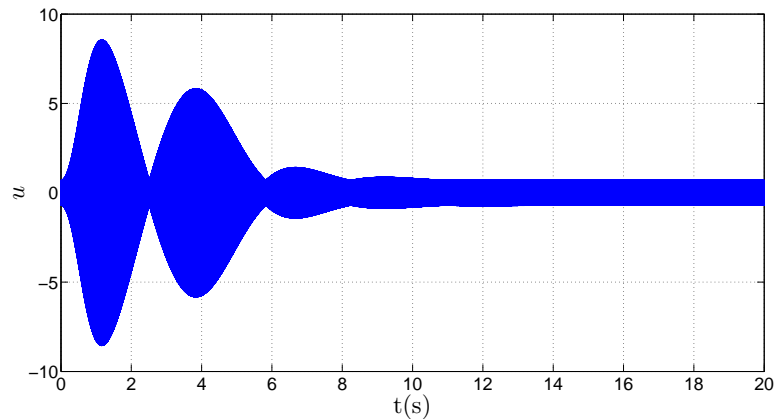


Figura 39 - Sinal de controle  $u$ , com controle por modo deslizante. Sistema com atraso na saída  $d = 0,5$  s.

### 4.3 Conclusões

Foi desenvolvido um controlador por modo deslizante e realimentação de saída para sistemas não-lineares, monovariáveis, de grau relativo arbitrário, com atraso na saída arbitrário, conhecido e constante. Apesar de serem considerados sistemas monovariáveis com parâmetros conhecidos, os resultados obtidos são relevantes, em vista da dificuldade do controle de sistemas não-lineares com atraso na saída.

O controle é baseado no modo deslizante com função de modulação e em observadores conectados em cascata para estimação do estado. O controlador garante a estabilidade global do sistema e a convergência assintótica do estado para zero.

Uma vez que o atraso é constante, este pode ser deslocado da entrada para a saída (MICHIELS; NICULESCU, 2007, Remark 7.8), conforme demonstrado na Seção 1.3.4. Então, a estratégia de controle desenvolvida também pode ser aplicada em sistemas com atraso na entrada.

Até onde se sabe, o esquema de controle proposto é inédito na literatura de controle por modo deslizante considerando-se sistemas com atraso na saída.

O conteúdo deste capítulo resultou no artigo (COUTINHO; CUNHA; OLIVEIRA, 2012), que será apresentado no XIX Congresso Brasileiro de Automática (CBA).

## 5 CONCLUSÕES FINAIS

Nesta Dissertação, foram propostos dois novos esquemas de controle por modo deslizante para sistemas não-lineares com atraso, sendo um para *atraso no estado* e outro para *atraso na saída*. Considerou-se também que o estado do sistema não era acessível, sendo utilizados observadores para sua estimação. A seguir, são listadas as principais contribuições deste trabalho.

### Desenvolvimento de um controlador para sistemas com *atraso no estado*

O controlador foi desenvolvido para uma classe de sistemas incertos não-lineares, multivariáveis, de grau relativo unitário, com perturbações não-lineares descasadas dependentes do estado, e com atraso incerto e variante no tempo em relação ao estado. O esquema proposto é baseado no controle vetorial unitário por modo deslizante e realimentação de saída, com função de modulação para a amplitude do sinal de controle. Esta função de modulação é gerada a partir dos sinais de entrada e saída, e de um observador que estima a norma do estado.

As principais características do controlador são:

- Garantia de limitação global do estado no sistema em malha fechada e convergência do erro de rastreamento de saída para zero em tempo finito.
- Não há necessidade do conhecimento exato do atraso, somente precisa-se conhecer seus valores máximo e mínimo.
- Para a matriz de ganho de alta frequência, é necessária somente a condição Hurwitz para a atratividade da superfície de deslizamento ao controle vetorial unitário por modo deslizante, seguindo-se a análise elaborada por (CUNHA et al., 2003). Esse requisito é menos restritivo que as condições usuais encontradas na literatura, como por exemplo, o conhecimento do ganho de alta frequência (HFG).
- Não há necessidade da hipótese usual de limitação uniforme da norma das não-linearidades.
- Os observadores de norma são robustos a incertezas e possuem estrutura mais simples que os observadores de estado, para a classe de sistemas considerada.

- Admitem-se não-linearidades polinomiais no estado e na saída do sistema.

Este trabalho resultou no artigo (COUTINHO; OLIVEIRA; CUNHA, 2011), que foi apresentado na *50th Conference on Decision and Control and European Control Conference* (CDC-ECC), em Orlando - EUA.

### **Desenvolvimento de um controlador para sistemas com *atraso na saída***

O controlador foi desenvolvido para uma classe de sistemas não-lineares, monovariáveis, de grau relativo arbitrário, com parâmetros conhecidos, e atraso arbitrário conhecido e constante na saída.

A estratégia proposta baseia-se no controle por modo deslizante e realimentação de saída, com função de modulação para a amplitude do sinal de controle. O estado é estimado por observadores em cascata desenvolvidos em (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHILAGARRIGUE, 2012).

É importante destacar que o atraso na entrada pode ser deslocado para a saída (MICHIELS; NICULESCU, 2007, Remark 7.8), conforme demonstrado na Seção 1.3.4, logo o esquema de controle proposto pode ser aplicado em sistemas com atraso na entrada.

Seguem as principais características deste controlador:

- Garantia de estabilidade global do sistema em malha fechada e convergência do erro de estimação do estado para zero.
- O atraso pode assumir qualquer valor, desde que seja conhecido e constante.

Este trabalho resultou no artigo (COUTINHO; CUNHA; OLIVEIRA, 2012), que será apresentado no XIX Congresso Brasileiro de Automática (CBA).

### **Trabalhos Futuros**

Propõem-se os seguintes tópicos para a continuação deste trabalho:

1. O controle proposto para sistemas com *atraso no estado* poderá ser generalizado para sistemas de grau relativo arbitrário.
2. Para a abordagem do *atraso na saída*, estender o controle proposto para sistemas multivariáveis incertos com atraso desconhecido e variante no tempo.



3. Aplicação das técnicas propostas em experimentos reais, tais como, sistemas de controle em redes de comunicação e sistemas com atraso de transporte.

## REFERÊNCIAS

- ABDALLAH, G. et al. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In: *Proc. American Contr. Conf.* San Francisco, CA: [s.n.], 1993. p. 3106–3107.
- AHMED-ALI, T.; CHERRIER, E.; LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 57, n. 1, p. 224–229, January 2012.
- BONDAREV, A. G. et al. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Autom. Remote Control*, v. 46, n. 6, p. 679–684, 1985.
- CAMACHO, O.; ROJAS, R.; GARCÍA-GABÍN, W. Some long time delay sliding mode control approaches. *ISA Trans.*, v. 46, p. 95–101, 2007.
- CAMPOS, M. C. M. M.; TEIXEIRA, H. C. G. *Controles Típicos de Equipamentos e Processos Industriais*. 1<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
- COUTINHO, C. L.; CUNHA, J. P. V. S.; OLIVEIRA, T. R. Controle por modos deslizantes para sistemas com atraso na saída. In: *Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB: [s.n.], 2012. (aceito para apresentação no congresso).
- COUTINHO, C. L.; OLIVEIRA, T. R.; CUNHA, J. P. V. S. Output-feedback sliding mode control for global tracking of uncertain nonlinear time-delay systems. In: *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf.* Orlando, FL: [s.n.], 2011. p. 7021–7026.
- CUNHA, J. P. V. S. *Controle de Sistemas Multivariáveis Incertos por Realimentação de Saída e Modo Deslizante*. Tese (Doutorado) — Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Março 2004.
- CUNHA, J. P. V. S.; COSTA, R. R.; HSU, L. Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems. *IEEE Trans. Ind. Electronics*, v. 55, n. 11, p. 4037–4046, 2008.

- CUNHA, J. P. V. S. et al. Output-feedback model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 48, n. 12, p. 2245–2250, 2003.
- DECARLO, R. A.; ŽAK, S. H.; MATTHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, v. 76, n. 3, p. 212–232, 1988.
- DESOER, C. A.; VIDYASAGAR, M. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. New York: Academic Press, 1975.
- DRAKUNOV, S. V. et al. The block control principle I. *Automation and Remote Control*, v. 51, n. 5, p. 601–609, 1990.
- DRAKUNOV, S. V. et al. The block control principle II. *Automation and Remote Control*, v. 51, n. 6, p. 737–746, 1990.
- EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. London: Taylor & Francis Ltd., 1998.
- FILIPPOV, A. F. Differential equations with discontinuous right-hand side. *American Math. Soc. Translations*, v. 42, n. 2, p. 199–231, 1964.
- FRIDMAN, E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Contr. Letters*, v. 43, n. 4, p. 309–319, 2001.
- FRIDMAN, E.; ORLOV, Y. Exponential stability of linear distributed parameter systems with time-varying delays. *Automatica*, v. 45, n. 1, p. 194–201, January 2009.
- GHIGGI, I. M. F. *Controle de Sistemas com Atrasos na Presença de Atuadores Saturantes*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFRGS, Porto Alegre, Junho 2008.
- GOMES DA SILVA JR., J. M. et al. Dynamic anti-windup synthesis for state delayed systems: an LMI approach. In: *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control and Chinese Control Conf.* Shanghai, China: [s.n.], 2009. p. 6904–6909.
- GU, K.; KHARITONOV, V. L.; CHEN, J. *Stability of Time-Delay Systems*. New York: Birkhäuser, 2003.

- GUSTAFSON, K. E. *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*. 3<sup>rd</sup>. ed. New York: Dover Publications, 1999.
- HSU, L.; COSTA, R. R.; CUNHA, J. P. V. S. Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems. *Asian Journal of Control*, v. 5, n. 4, p. 543–556, 2003.
- HSU, L. et al. Multivariable output-feedback sliding mode control. In: YU, X.; XU, J.-X. (Ed.). *Variable Structure Systems: Towards the 21st Century*. Berlin: Springer-Verlag, 2002. p. 283–313.
- HUNG, J. Y.; GAO, W.; HUNG, J. C. Variable structure control: a survey. *IEEE Trans. Ind. Electronics*, v. 40, n. 1, p. 2–22, 1993.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. *Robust Adaptive Control*. Los Angeles: Prentice-Hall, 1996.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3<sup>rd</sup>. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- KOLMANOVSKII, V. B.; MYSHKIS, A. *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Dordrecht: Kluwer Academy, 1992.
- KOLMANOVSKII, V. B.; MYSHKIS, A. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Dordrecht: Kluwer Academy, 1999.
- KOLMANOVSKII, V. B.; NICULESCU, S. I.; GU, K. Delay effects on stability: a survey. In: *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*. Phoenix, AZ: [s.n.], 1999. v. 2, p. 1993–1998.
- KRICHMAN, M.; SONTAG, E. D.; WANG, Y. Input-output-to-state stability. *SIAM J. Contr. Optim.*, v. 39, n. 6, p. 1874–1928, 2001.
- LIU, G.; ZINOBER, A.; SHITESSEL, Y. B. Second-order SM approach to SISO time-delay system output tracking. *IEEE Trans. Ind. Electronics*, v. 56, n. 9, p. 3638–3645, September 2009.
- MARINO, R.; TOMEI, P. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. 1<sup>st</sup>. ed. London: Prentice Hall, 1995.

- MICHIELS, W.; NICULESCU, S. I. *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*. Philadelphia: SIAM, 2007.
- NAM, P. Exponential stability criterion for time-delay systems with nonlinear uncertainties. *Applied Mathematics and Computation*, v. 214, n. 2, p. 374–380, August 2009.
- NICULESCU, C. P.; PERSSON, L. E. *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach*. Berlin: Springer, 2004.
- NICULESCU, S. I. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Berlin: Springer, 2001.
- NIU, Y. et al. Observer-based sliding mode control for nonlinear state-delayed systems. *International Journal of Systems Science*, v. 35, n. 2, p. 139–150, February 2004.
- NUNES, E. V. L. *Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior com Estabilidade Global*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Maio 2004.
- OLIVEIRA, J. B. *Estabilidade e Robustez de um Controlador Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação, UFRN, Natal, 2007.
- OLIVEIRA, T. R. *Rastreamento para Sistemas Incertos Fortemente Não-Lineares com Direção de Controle Desconhecida*. Tese (Doutorado) — Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Janeiro 2010.
- OLIVEIRA, T. R.; PEIXOTO, A. J.; HSU, L. Sliding mode control of uncertain multivariable nonlinear systems with unknown control direction via switching and monitoring function. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 55, n. 4, p. 1028–1034, 2010.
- RIBEIRO, J. M. S. *Controle Discreto com Modos Deslizantes em Sistemas Incertos com Atraso no Sinal de Controle*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UNESP, Ilha Solteira, Agosto 2006.
- RICHARD, J. P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, v. 39, n. 10, p. 1667–1694, 2003.

- RICHARD, J. P. et al. *Nonlinear Delay Systems: Tools for a Quantitative Approach to Stabilization*. London: Springer, 1997.
- SBARCIOG, M. et al. Nonlinear predictive control of processes with time delay. A temperature control case study. In: *Proc. Int. Conf. on Control Applications*. San Antonio (TX): [s.n.], 2008. p. 1001–1006.
- SEURET, A. et al. Static output feedback sliding mode control design via an artificial stabilizing delay. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 54, n. 2, p. 256–265, 2009.
- SI-AMMOUR, A.; DJENNOUNE, S.; BETTAYEB, M. A sliding mode control for linear fractional systems with input and state delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 14, n. 5, p. 2310–2318, May 2009.
- SLOTINE, J.-J. E. Sliding controller design for nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, v. 40, p. 421–434, 1984.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- SLOTINE, J.-J. E.; SASTRY, S. S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators. *Int. J. Contr.*, v. 38, p. 465–492, 1983.
- SMITH, O. J. M. Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, v. 53, n. 5, p. 217–219, 1957.
- SOKAL, G. J. *Posicionamento Dinâmico Utilizando Controle a Estrutura Variável e Servovisão*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, UERJ, Rio de Janeiro, Julho 2010.
- SONTAG, E. D. Comments on integral variants of ISS. *Systems & Contr. Letters*, v. 34, n. 1-2, p. 93–100, May 1998.
- SONTAG, E. D.; WANG, Y. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Contr. Letters*, v. 24, p. 351–359, 1995.
- SUBBARAO, K.; MURALIDHAR, P. C. State observer for linear systems with piece-wise constant output delays. *IET Contr. Theory and Applications*, v. 3, n. 8, p. 1017–1022, 2009.

UTKIN, V.; GULDNER, J.; SHI, J. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. London: Taylor & Francis Ltd., 1999.

UTKIN, V.; LEE, H. The chattering analysis. *Proc. Power Electronics and Motion Control Conf.*, p. 2014–2019, September 2006.

UTKIN, V. I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. Moscow: MIR Publishers, 1978.

UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

YAN, X.-G.; SPURGEON, S. K.; EDWARDS, C. Sliding mode control for time-varying delayed systems based on a reduced-order observer. *Automatica*, v. 46, n. 8, p. 1354–1362, August 2010.

## APÊNDICE A: LEMAS AUXILIARES

**Lema 3.** *Considere o sistema*

$$\dot{\eta}(t) = A_0\eta(t) + f(t), \quad (5.1)$$

onde  $\eta, f \in \mathbb{R}^{n-l}$ . Assuma que  $\gamma_0 := \min_i \{-\operatorname{Re}(\gamma_i)\}$  seja a margem de estabilidade de  $A_0$ , onde  $\{\gamma_i\}$  são autovalores de  $A_0$ , e  $\gamma := \gamma_0 - \delta$  com  $\delta > 0$  sendo uma constante arbitrária. Considere que  $\bar{f}(t)$  seja um majorante de  $f(t)$ , isto é,  $\|f(t)\| \leq \bar{f}(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ . Então,  $\exists c_1, c_2 > 0$  de maneira que a matriz exponencial satisfaça  $\|e^{A_0 t}\| \leq c_1 e^{-\gamma t}$  e as seguintes desigualdades existam

$$\|e^{A_0 t} * f(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t} * \bar{f}(t), \quad (5.2)$$

$$\|\eta(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t} * \bar{f}(t) + c_2 e^{-\gamma t} \|\eta(0)\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.3)$$

*Demonstração.* Veja prova em (HSU; COSTA; CUNHA, 2003, Lema 2). □

**Lema 4.** *Seja  $r(t)$  uma função escalar absolutamente contínua. Suponha que  $r(t)$  seja não-negativo e, enquanto  $r > 0$ , satisfaça  $\dot{r} \leq -\delta - \gamma r + R e^{-\lambda t}$ , onde  $\delta, \gamma, \lambda$  e  $R$  são constantes não-negativas. Então, pode-se concluir que:*

(a)  *$r(t)$  é limitado por  $r(t) \leq [r(0) + cR] e^{-\lambda_1 t}$ ,  $\forall t \geq 0$ , onde  $c > 0$  é uma constante apropriada e  $\lambda_1 < \min(\lambda, \gamma)$ ;*

(b) *se  $\delta > 0$ , então  $\exists t_1 < +\infty$  de maneira que  $r(t) = 0$ ,  $\forall t \geq t_1$ .*

*Demonstração.* A prova apresentada em (HSU et al., 2002, Lema 3) é baseada no Teorema da Comparação (FILIPPOV, 1964, Teorema 7). □