



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Felipe da Trindade do Nascimento

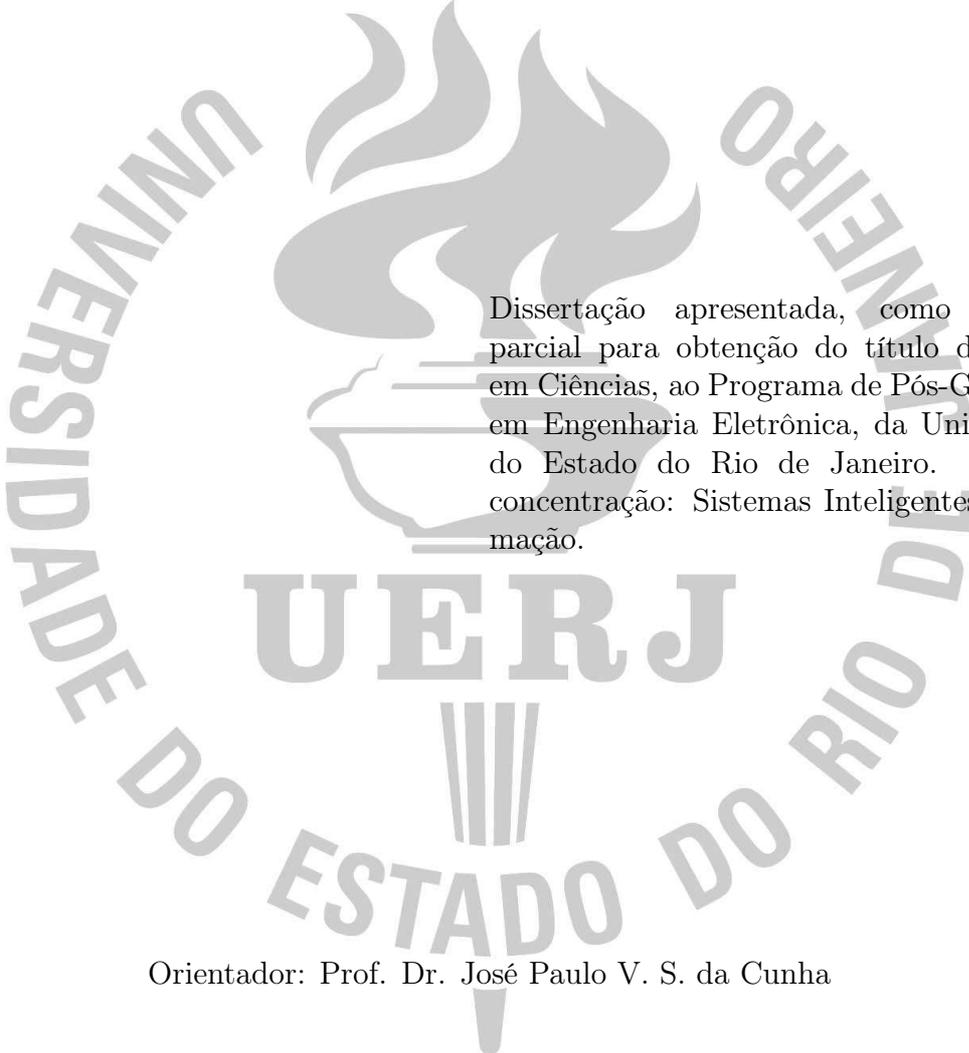
**Algoritmos Genéticos para Síntese de Filtros Aplicados em
Controle por Modo Deslizante**

Rio de Janeiro

2010

Felipe da Trindade do Nascimento

**Algoritmos Genéticos para Síntese de Filtros Aplicados em Controle por
Modo Deslizante**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. José Paulo V. S. da Cunha

Rio de Janeiro

2010

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

N244 Nascimento, Felipe da Trindade do
Algoritmos genéticos para síntese de filtros aplicados em
controle por modo deslizante / Felipe da Trindade do Nascimento. -
2010.
91 f.

Orientador: José Paulo V. S. da Cunha.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de
Janeiro. Faculdade de Engenharia.

1. Sistemas inteligentes de controle - Teses. 2. Controle a
estrutura variável - Teses. 3. Modos deslizantes - Teses. 4.
Algoritmos genéticos – Teses. 5. Engenharia Eletrônica. I. Cunha,
José Paulo V. S. da. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
IV. Título.

CDU 681.511.4

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta
dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Felipe da Trindade do Nascimento

**Algoritmos Genéticos para Síntese de Filtros Aplicados em Controle por
Modo Deslizante**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 20 de julho de 2010.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Paulo Vilela Soares da Cunha (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. José Franco Machado do Amaral

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Ph.D. Ricardo Tanscheit

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-RIO

Rio de Janeiro

2010

AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer ao meu orientador José Paulo pela paciência, dedicação e por acreditar em mim.

DEDICATÓRIA

Dedico esta Dissertação aos meus pais, minha irmã e a minha noiva. Pessoas que, verdadeiramente, me motivaram e me apoiaram em todas as minhas dificuldades.

RESUMO

NASCIMENTO, Felipe da Trindade do. *Algoritmos Genéticos para Síntese de Filtros Aplicados em Controle por Modo Deslizante*. 91 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) — Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2010.

Nesta Dissertação propõe-se a aplicação de algoritmos genéticos para a síntese de filtros para modular sinais de controladores a estrutura variável e modo deslizante. A modulação do sinal de controle reduz a amplitude do sinal de saída e, conseqüentemente, pode reduzir o consumo de energia para realizar o controle e o *chattering*. Esses filtros também são aplicados em sistemas que possuem incertezas paramétricas nos quais nem todas as variáveis de estado são medidas. Nesses sistemas, as incertezas nos parâmetros podem impedir que seus estados sejam estimados com precisão por observadores. A síntese desses filtros necessita da obtenção da envoltória, que é o valor máximo da norma de cada resposta impulsiva admissível no sistema. Após este passo, é sintetizado um filtro que seja um majorante para a envoltória. Neste estudo, três métodos de busca da envoltória por algoritmos genéticos foram criados. Um dos métodos é o preferido, pois apresentou os melhores resultados e o menor tempo computacional.

Palavras-chave: Síntese de filtros. Controle a estrutura variável. Observador de estado. Algoritmos genéticos. Resposta impulsiva. Envoltória. Sinal de modulação.

ABSTRACT

This thesis proposes the application of genetic algorithms for the synthesis of filters which modulate signals of variable structure sliding mode controllers. The modulation of the control signal reduces the amplitude of the output signal and thus can reduce power consumption and chattering. These filters are also applied to systems with parametric uncertainties and unmeasured state variables. In these systems, the uncertainties can impair the accurate estimation of the state by means of observers. For the synthesis of these filters, it is necessary to obtain the envelope which is the maximum norm of each impulse response admissible for the system. After this step, a filter is synthesized to be an upper bound for the envelope. In this study, three methods of search of the envelope by genetic algorithms were developed. One of these methods has been giving the best results and needs the least computational time.

Keywords: Filter synthesis. Variable structure control. State observer. Genetic algorithms. Impulse response. Envelope. Modulation signal.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estado atingindo a superfície de deslizamento no instante t_1	21
Figura 2 - Plano de fase do sistema de controle a estrutura variável (1)–(3).	21
Figura 3 - Sistema (6)–(9) com função modulação $\rho = 1$ e condições iniciais não nulas que satisfazem a desigualdade (14).	24
Figura 4 - Simulação do sistema (6)–(9) com função de modulação $\rho = 1$ e condições iniciais que não satisfazem a desigualdade (14).	24
Figura 5 - Simulação do sistema (6)–(9) com função de modulação (16) gerada com o estado medido x_1	26
Figura 6 - Simulação do sistema (6)–(9) com função de modulação (17) gerada com o estado estimado \hat{x}_1	26
Figura 7 - Resposta impulsiva do FOAF sintetizado através da aplicação de forma quadrática de Lyapunov para realização diagonal por blocos juntamente com a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($ g_1(t) $) (49).	35
Figura 8 - Resposta impulsiva de cada FOAF sintetizado através da aplicação de formas quadráticas de Lyapunov para as realizações canônica controlável e canônica observável, juntamente com a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($ g_1(t) $) (49). Note que a resposta impulsiva quase se confunde com o eixo do tempo.....	36
Figura 9 - Gráfico do valor de pico da resposta impulsiva (c_1) em função do parâmetro ϵ da transformação (55).....	38
Figura 10- Resposta impulsiva de cada FOAF sintetizado através de otimização juntamente com a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($ g_1(t) $).	41
Figura 11- Exemplo da seleção por roleta.	46
Figura 12- Exemplo de cruzamento binário de um ponto.	48
Figura 13- Exemplo de cruzamento de dois pontos.	49
Figura 14- Exemplo de cruzamento uniforme. Para a geração de \mathbf{I}_2^{filho} , a máscara deve ser invertida e o cruzamento será análogo.....	49
Figura 15- Exemplo de mutação binária.	50
Figura 16- Envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) com três iterações. ...	57

Figura 17- Envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) com seis iterações. ...	57
Figura 18- Envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) obtida por força bruta.	58
Figura 19- Envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) obtida pelo primeiro método baseado em algoritmo genético.	60
Figura 20- Evolução da função aptidão para a envoltória da resposta impulsiva de (88) no instante $t = 0,3$ s obtida pelo primeiro método baseado em algoritmo genético.	60
Figura 21- Função aptidão no instante $t_{p_{i-1}} = 0,3$ s da envoltória da resposta impulsiva de (88) obtida pelo segundo método baseado em algoritmo genético.....	62
Figura 22- Envoltória da resposta impulsiva de (88) obtida pelo segundo método baseado em algoritmo genético. Em linha pontilhada é apresentada a envoltória por força bruta. A linha tracejada indica o que seria esperado obter pelo AG.....	62
Figura 23- Função aptidão durante a determinação da envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) obtida pelo terceiro método baseado em algoritmo genético.	64
Figura 24- Envoltórias da norma da resposta impulsiva de (88) obtida pelo terceiro método baseado em algoritmo genético. Utilizou-se três normas diferentes para calcular a aptidão (94).	64
Figura 25- Detalhamento da envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) obtida pelo terceiro método baseado em algoritmo genético. Utilizou-se três normas diferentes para calcular a aptidão (94).	65
Figura 26- Resposta impulsiva dos FOAF, SOAF e TOAF sintetizado através de algoritmos genético juntamente com norma da resposta impulsiva de $G_3(s) (g(t))$ (102).....	70
Figura 27- Resposta impulsiva do TOAF com polos complexos sintetizado através de algoritmos genéticos juntamente com norma da resposta impulsiva de $G_3(s) (g(t))$ (102).....	71
Figura 28- Resposta impulsiva de SOAF, TOAF com polos reais e com polos complexos sintetizados através de algoritmos genéticos juntamente com norma da resposta impulsiva de $G_4(s) (g(t))$ (108).	72

Figura 29- Diagrama do sistema eletromecânico.	78
Figura 30- Envoltória da resposta impulsiva da haste flexível obtida por AG e a envoltória obtida por força bruta.	79
Figura 31- Detalhamento da envoltória da resposta impulsiva da haste flexível obtida por AG e a envoltória obtida por força bruta.	79
Figura 32- Resposta impulsiva dos filtros SOAF e TOAF obtidos por AG.	80
Figura 33- Convergência da função aptidão para o filtro SOAF com polos reais obtido por AG.	80
Figura 34- Convergência da função aptidão para o filtro TOAF com polos reais obtido por AG.	81
Figura 35- Resposta impulsiva do filtro TOAF com polos complexos obtido por AG..	82
Figura 36- Convergência da função aptidão para o filtro TOAF com polos complexos obtido por AG.	82
Figura 37- Velocidade do motor medido (y_p) juntamente com o sinal de saída do modelo de referência (y_M). Sinal de controle u_p . Função de modulação que aplica o SOAF.	83
Figura 38- Velocidade do motor medido (y_p) juntamente com o sinal de saída do modelo de referência (y_M). Sinal de controle u_p . Função de modulação que aplica o TOAF com polos reais.	84
Figura 39- Velocidade do motor medido (y_p) juntamente com o sinal de saída do modelo de referência (y_M). Sinal de controle u_p . Função de modulação que aplica o TOAF com polos complexos.	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Aproximações por filtros de primeira ordem obtidas a partir de diversas realizações da função de transferência $G_1(s)$ (49).	35
Tabela 2 - Resultados da síntese para os três objetivos de otimização aplicados à função de transferência $G_1(s)$ (49).	41
Tabela 3 - Fluxo de um algoritmo genético aplicado em otimização.	44
Tabela 4 - Algoritmo de força bruta para encontrar a envoltória da norma de respostas impulsivas. A resposta impulsiva $g(kh, \alpha)$ é calculada no intervalo $0 \leq k \leq k_f$ e representada por $g(\cdot, \alpha)$	56
Tabela 5 - Parâmetros do AG para determinação da envoltória.	58
Tabela 6 - Algoritmo do primeiro método para determinar a envoltória. A otimização (max) é realizada por um algoritmo genético.	59
Tabela 7 - Algoritmo do segundo método para determinar a envoltória. A otimização (max) é realizada por um algoritmo genético.	61
Tabela 8 - Tabela de comparação entre o algoritmo de força bruta e os métodos baseados em AG.	65
Tabela 9 - Parâmetros do AG para determinação da filtro.	69
Tabela 10- Algoritmo genético para síntese de filtros de ordem superior.	69
Tabela 11- Comparações entre os filtros FOAF, SOAF e TOAF.	70
Tabela 12- Tabela com o ganho DC para cada filtro projetado junto com o tempo médio de processamento	81

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	CONTROLE POR MODO DESLIZANTE	19
1.1	Superfície de Deslizamento	19
1.2	Lei de Controle	20
1.3	O Fenômeno <i>chattering</i>	22
1.4	Função modulação	22
2	APROXIMAÇÕES POR FILTROS DE PRIMEIRA ORDEM	27
2.1	Aproximações por Filtro de Primeira Ordem para Sistemas Lineares	29
2.1.1	<u>Margem de Estabilidade</u>	29
2.1.2	<u>Fundamentos para aproximações por filtros de primeira ordem</u>	30
2.2	Síntese do Filtro	31
2.2.1	<u>Critérios de desempenho</u>	32
2.2.2	<u>Síntese do FOAF por formas quadráticas de Lyapunov</u>	33
2.2.2.1	Cálculo dos coeficientes	33
2.2.2.2	Exemplos de síntese aplicando-se formas quadráticas de Lyapunov	34
2.2.3	<u>Síntese Ótima do FOAF</u>	38
2.2.3.1	Estimação do supremo.....	39
2.2.3.2	Minimização do ganho DC	40
2.2.3.3	Exemplo de síntese ótima	40
3	ALGORITMOS GENÉTICOS APLICADOS EM OTIMIZAÇÃO 42	
3.1	Definições Básicas	43
3.2	Operadores Genéticos	45
3.2.1	<u>Operador de Seleção</u>	45
3.2.1.1	Seleção por Roleta	45
3.2.1.2	Seleção por Torneio	46
3.2.1.3	Elitismo	46
3.2.2	<u>Operador de Cruzamento</u>	46

3.2.2.1	Operador de Cruzamento Binário.....	47
3.2.2.2	Operador de Cruzamento Real.....	49
3.2.3	<u>Operador de Mutação</u>	50
3.2.3.1	Operador de Mutação Binária	50
3.2.3.2	Operador de Mutação Real.....	51
4	ALGORITMOS GENÉTICOS PARA A DETERMINAÇÃO DA ENVOLTÓRIA DE SISTEMAS INCERTOS	53
4.1	Período de Amostragem e Horizonte de busca	54
4.2	Determinação da Envoltória por Busca Exaustiva	55
4.3	Determinação da Envoltória por Algoritmos Genéticos	57
4.3.1	<u>Primeiro método</u>	58
4.3.2	<u>Segundo método</u>	60
4.3.3	<u>Terceiro Método</u>	62
4.3.4	<u>Comparação dos três métodos</u>	64
5	APROXIMAÇÕES POR FILTROS DE ORDEM SUPERIOR	67
5.1	Aproximações por Filtros de Ordem Superior com Polos Reais	67
5.2	Aproximação por Filtros de Ordem Superior com Polos Complexos	71
6	EXEMPLO DE APLICAÇÃO	73
6.1	Controle por Modelo de Referência e Modo Deslizante	73
6.1.1	<u>Controle por Modelo de Referência Linear</u>	74
6.1.2	<u>Equações de Erro</u>	74
6.1.3	<u>Controle a Estrutura Variável</u>	75
6.1.4	<u>Estimador de $\bar{x}_1(t)$</u>	76
6.2	Controle de um Motor Acoplado a uma Haste Flexível	77
6.3	Resultados	81
7	CONCLUSÃO	85
7.1	Propostas para Trabalhos Futuros	85
	REFERÊNCIAS	87

INTRODUÇÃO

A evolução dos métodos matemáticos e o advento dos computadores têm facilitado a análise de sistemas dinâmicos bem como o projeto de controladores. Variações nos parâmetros dos sistemas podem influenciar o desempenho dos controladores. Com o auxílio da matemática moderna e dos computadores podem-se criar cenários com várias condições de operação para o sistema a ser controlado. Depois de mapear inúmeras possibilidades, pode ser desenvolvido o controlador que tenha maior robustez, ou seja, aquele que seja menos influenciado por estas variações de parâmetros e perturbações.

Há vários métodos que são utilizados para testar esses cenários. Pode-se utilizar a busca sucessiva (um a um), onde se procura o pior caso dentre todas as combinações dos parâmetros incertos. Esse método se torna mais demorado à medida que o número de parâmetros incertos aumenta. Outro método é por amostragem, variando somente alguns parâmetros na busca de uma solução. Em cada um dos métodos seleciona-se o melhor resultado.

Com novos métodos de procura e otimização desenvolvidos, pode-se fazer a busca da melhor solução para o sistema mais rapidamente. O Algoritmo Genético (AG) é um deles. Desde seu desenvolvimento por HOLLAND (1975), o algoritmo genético vem sendo utilizado em diversas áreas como método de otimização de cenários estatísticos, populacionais e continuamente está se expandindo para a área de automação em projetos de controles, processamento de sinais e síntese de filtros, dentre outras áreas da engenharia.

Inicialmente HOLLAND (1975) representava os indivíduos por números binários. Com o desenvolvimento do AG para a resolução de problemas de otimização, novos métodos de representação e operadores genéticos foram desenvolvidos. Para a otimização de controladores no domínio do tempo, a representação com números reais mostrou-se mais adequada (JAMSHIDI, KROHLING, COELHO & FLEMING 2003).

Aplicações de Algoritmos Genéticos no Projeto de Controladores

O AG também pode ser utilizado no projeto de controladores clássicos como PI, PD e PID (ações proporcional, integral e derivativa), muito usuais na indústria. Os métodos de sintonia de controladores clássicos são baseados em técnicas heurísticas, tais como:

Ziegler-Nichols, diagramas de resposta em frequência, lugar das raízes e outros.

O artigo publicado por KROHLING & REY (2001) apresenta um algoritmo genético baseado em dois códigos reais para otimização de um controlador PID para um servo-motor. O primeiro minimiza o índice de desempenho *integral of time weighted squared error* (ITSE). O segundo maximiza a rejeição da perturbação. A contribuição de KROHLING & REY (2001) é um projeto de um controle ótimo do tipo H_2/H_∞ com estrutura fixa através da minimização do desempenho ITSE sujeito a uma perturbação, onde o algoritmo genético é aplicado para solucionar o problema.

Em BEVRANI & HIYAMA (2007) é apresentado um algoritmo genético usado para encontrar os parâmetros de controladores PI e PID industriais, que visa a redução da diferença entre os controladores multiobjetivo robustos e os controladores PI/PID industriais. São utilizadas a razão entre a norma Euclidiana (norma 2) e a norma infinita (H_2/H_∞) e o método iterativo de inequações lineares matriciais ou (*iterative linear matrix inequalities* - ILMI). Os resultados obtidos mostram que o desempenho do controlador é atingido para a estratégia de controle proposta.

AMARAL, AMARAL, TANSCHKEIT, PACHECO & MESQUITA (2005) realizaram a sintonia de controladores PID através do algoritmo de seleção clonal, no qual o sistema é sintonizado em malha fechada. O controlador PID é realizado por *hardware* e os ganhos proporcional K_p , integral K_i e derivativo K_d são ajustados pelo algoritmo genético proposto.

Em ALFARO-CID, MCGOOKIN & MURRAY-SMITH (2009) é usada uma combinação entre três diferentes métodos de seleção e busca por AG para achar os parâmetros do controle PID, do propulsor de uma embarcação. É feita uma comparação de desempenho entre os métodos tradicionais de sintonia e a sintonia feita por algoritmos genéticos. ALFARO-CID et al. (2009) chegaram a conclusão que o melhor método para encontrar os parâmetros do controlador PID foi o método roleta, pois foi o que obteve melhor resultado mantendo a robustez e evitando que a convergência do AG fosse prematura.

Em NEENU & POONGODI (2009), a sintonia do controle PID para um motor DC é feita pelo método Ziegler-Nichols e por algoritmos genéticos. A comparação entre os desempenhos dos dois métodos permite concluir que o ajuste do PID por AG resulta na resposta mais rápida que a obtida pelo método tradicional, porém o método clássico

é usado para obter o ponto de partida para os valores dos ganhos PID. O AG, resulta numa resposta mais rápida e com melhor desempenho no tempo de subida, tempo de acomodação e menor erro em regime permanente.

A teoria para controladores clássicos vem sendo bem sucedida para sistemas bem definidos tanto no caso determinístico quanto na descrição estocástica. Em muitas aplicações na engenharia, uma das maiores dificuldades é obter um modelo preciso da planta a ser controlada por falta de detalhes como dinâmicas complexas, não-linearidades e parâmetros variantes no tempo. Por estas dificuldades a engenharia de controle é forçada a usar modelos simplificados e linearizados da planta que possuem imprecisões e vulnerabilidades que reduzem o desempenho do sistema controlado (LI, NG, MURRAY-SMITH, GRAY & SHARMAN 1996).

Atualmente a engenharia de controle está utilizando controladores robustos para reduzir as dificuldades na modelagem do sistema. Um dos métodos mais utilizados é o controle por modo deslizante (*sliding mode control* — SMC), que é usual no controle a estrutura variável (*variable structure control* — VSC ou *variable structure system* — VSS) (LI et al. 1996).

A computação evolucionária juntamente com o projeto de controladores robustos como o controle a estrutura variável, levaram alguns pesquisadores como MOIN, ZINOBER & HARLEY (1995), LI et al. (1996) e ASHARI, YAZDANPANA & SEDIGH (2005) a usar esta união para auxiliar o projeto da superfície de deslizamento. O trabalho de LI et al. (1996) usou um tanque de líquido em escala de laboratório onde o modelo do sistema possui incertezas. O objetivo é transferir o líquido de um tanque para outro o mais rápido possível causando pouco *overshoot* e reduzindo o erro em regime permanente. Como comparação, a superfície de deslizamento foi projetada pelo método tradicional ITKIS (1976), UTKIN (1978), DECARLO, ŽAK & MATTHEWS (1988) e depois o projeto foi realizado por algoritmos genéticos. Os resultados obtidos por LI et al. (1996) mostraram que o AG apresentou alguma melhora no projeto da superfície de deslizamento para erro em regime permanente e melhorou o desempenho do controlador, pois suprimiu os efeitos das incertezas do modelo. A redução no tempo de busca da superfície de deslizamento foi consideravelmente grande, uma vez que o AG fez todo processo heurístico de busca da superfície. Os autores também propõem estudos futuros de novos métodos de busca da superfície de deslizamento.

Aplicações de Algoritmos Genéticos na Síntese de Filtros

Muitos trabalhos também utilizam algoritmos genéticos para o projeto de filtros para processamento de sinais ou outras funções. Na síntese de filtros usando algoritmos genéticos, DEXIANG & MICHAEL (1995) usaram a técnica de algoritmo genético paralelo para projetar um filtro FIR (*Finite Impulse Response*) passa-baixas digital. Usaram como comparação um filtro projetado pela aproximação de Chebyshev. DEXIANG & MICHAEL (1995) concluíram que não há uma diferença significativa entre o filtro projetado pelo AG e o Chebyshev e, segundo os autores, essa pequena diferença se deve ao método de busca utilizado, onde a convergência do AG pode ter sido prematura. Ainda na área de projetos de filtros FIR, há os trabalhos (SUCKLEY 1991), (AL-HASHIMI, SOMERSET & MONIRI 1998), (MERCIER & NOWROUZIAN 2006) e (DER & SHAU 2009). Todos usam métodos semelhantes para o projeto do filtro, exceto AL-HASHIMI et al. (1998) que usa a função cosseno para projetar filtros FIR (*cosine FIR*). Todos os autores concluem que os resultados obtidos são satisfatórios e que o tempo computacional para o projeto do filtro é reduzido em relação a técnicas tradicionais.

Um projeto de filtros analógicos usando algoritmos genéticos é apresentado por GRIMBLEBY (2000), que usa as técnicas tradicionais para síntese de filtros analógicos e faz uma adaptação para o algoritmo genético obtendo um resultado satisfatório e de fácil implementação.

Objetivos

Este trabalho propõe o uso de algoritmos genéticos para a síntese de filtros usados em funções de modulação em controladores a estrutura variável para sistemas com parâmetros incertos. Outro objetivo é sintetizar filtros com ordem superior a um, que poderão resultar em melhor desempenho do controle a estrutura variável do que os filtros de primeira ordem desenvolvidos por (CUNHA, COSTA & HSU 2003).

Estrutura desta Dissertação

O Capítulo 1 apresenta o controle por modo deslizante. No Capítulo 2 são apresentadas aproximações por filtros de primeira ordem e sua síntese para sistemas com parâmetros conhecidos. No Capítulo 3 são apresentados algoritmos genéticos, operadores

de seleção e mutação tendo em vista a aplicação na síntese de filtros. O Capítulo 4 propõe métodos desenvolvidos com algoritmos genéticos para encontrar a envoltória da norma da resposta impulsiva de sistemas incertos. O Capítulo 5 propõe algoritmos genéticos para a síntese de aproximações por filtros de ordem superior (maior que um). No Capítulo 6 é apresentado um exemplo de aplicação usando filtros para realizar a função de modulação do controle por modo deslizante. As conclusões são discutidas no Capítulo 7.

1 CONTROLE POR MODO DESLIZANTE

Os primeiros estudos sobre Controle a Estrutura Variável (*Variable Structure Control* — VSC) foram realizados na Rússia por Emel'yanov e Barbashin nos anos 1960. Porém os estudos só foram difundidos entre os ocidentais em meados dos anos 1970, quando o livro ITKIS (1976) e o artigo UTKIN (1977) foram publicados em inglês (EDWARDS & SPURGEON 1998).

O controle a estrutura variável força o estado do sistema em direção à superfície de deslizamento, que é escolhida pelo projetista de forma que o sistema tenha o desempenho desejado e seja imune a perturbações. Deste modo, ao contrário dos controladores baseados em dinâmica inversa, os efeitos de incertezas paramétricas e perturbações são anulados e o objetivo do controle é alcançado, pois quando o estado atinge a superfície de deslizamento, o VSC funciona idealmente como um controlador de ganho infinito.

Outra característica do controle a estrutura variável é o sinal de controle descontínuo. A realimentação é responsável por chavear entre duas ou mais estruturas, de maneira que um novo sistema é produzido. Este novo sistema é conhecido por ser de alto desempenho, capaz de rejeitar perturbações e praticamente insensível a variações de seus parâmetros internos (YOUNG, UTKIN & ÖZGÜNER 1999). Entretanto, a ocorrência do fenômeno *chattering* dificulta a implementação do controle VSC.

1.1 Superfície de Deslizamento

A superfície de deslizamento é uma região do espaço de estado onde se garante que o sistema tenha um comportamento predefinido e estável (DECARLO et al. 1988). O principal objetivo do VSC é garantir que, uma vez que a superfície tenha sido alcançada, o estado do sistema permaneça nela. Isto ocorre por meio do chaveamento do sinal de controle, denominado operação em *modo deslizante*. A operação em modo deslizante se dá na região vizinha à superfície de deslizamento em que as trajetórias do estado apontam para a superfície. Com esta característica, no projeto de controladores VSC é necessário garantir a existência do modo deslizante. O projeto de VSC divide-se em duas principais etapas (EDWARDS & SPURGEON 1998):

1. Projeto da superfície de deslizamento de modo que, quando a trajetória atingir essa superfície, esta será estável e o sistema irá se comportar da maneira desejada;

2. Projeto de uma lei de chaveamento do controle que garanta a existência do modo deslizante e a alcançabilidade da superfície de deslizamento.

1.2 Lei de Controle

O controlador VSC possui alta velocidade de chaveamento, onde os ganhos de cada realimentação são chaveados entre dois valores segundo uma lei de controle. Este chaveamento é uma técnica eficiente e robusta para o controle de sistemas não-lineares (DECARLO et al. 1988). Uma vez que o controle VSC atinge o modo deslizante o comportamento dinâmico fica independente dos parâmetros internos do sistema ou de perturbações. Esta propriedade, denominada invariância, é bastante interessante para o controle de sistemas incertos, conforme apresentado em (YOUNG et al. 1999, UTKIN, GULDNER & SHI 1999).

Para exemplificar esses conceitos, considere-se um sistema de segunda ordem (duplo integrador) regido pela equação diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (1)$$

Define-se então a lei que gera o sinal de controle como:

$$u = -\text{sign}(\sigma), \quad \text{sign}(\sigma) := \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma > 0, \\ 0, & \text{se } \sigma = 0, \\ -1, & \text{se } \sigma < 0, \end{cases} \quad (2)$$

sendo σ a superfície de chaveamento, defina como

$$\sigma(x) = Sx(t) = 0 \quad (3)$$

na qual S é uma matriz de dimensão 1×2 , para o modelo apresentado na equação (1).

A Figura 1 mostra o comportamento do sistema apresentado na equação (1) quando aplicado o controle VSC (2) e (3). O estado $x(t)$ alcança a superfície de deslizamento no instante t_1 , então para $t > t_1$ o controle passa a chavear entre os dois valores definidos em (2) para manter o estado na superfície deslizante. Uma vez a superfície atingida, o sistema se comporta como um sistema de ordem reduzida.

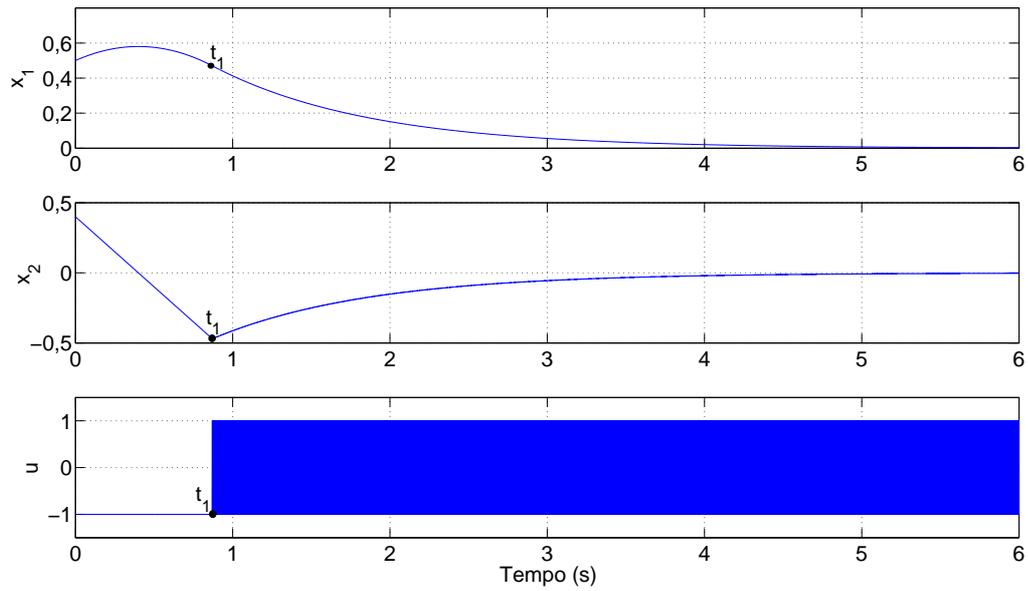


Figura 1 - Estado atingindo a superfície de deslizamento no instante t_1 .

Para ilustrar a robustez do sistema (2) este foi submetido a diferentes condições iniciais, no qual o comportamento é ilustrado na Figura 2, um plano de fase típico de sistemas de segunda ordem com VSC. O estado $x(t)$ é conduzido para a superfície de deslizamento, conforme indicam as setas nessa figura.

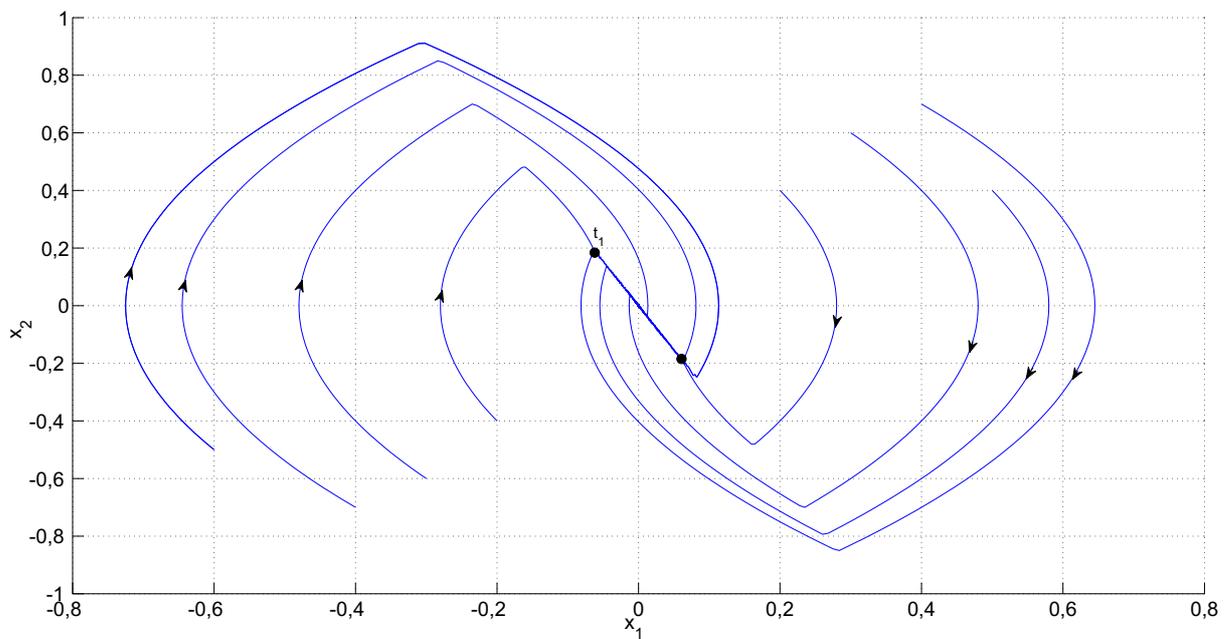


Figura 2 - Plano de fase do sistema de controle a estrutura variável (1)–(3).

1.3 O Fenômeno *chattering*

O VSC usa o chaveamento em alta frequência, porém os sistemas reais possuem dispositivos com imperfeições tais como atraso e histerese. Estas imperfeições tornam a frequência de chaveamento finita e o estado fica oscilando dentro de uma vizinhança à superfície de deslizamento. Este fenômeno é conhecido como *chattering*. Caso a frequência de chaveamento seja muito alta em relação à resposta dinâmica do sistema, estas imperfeições e a lentidão no chaveamento do controle poderão ser desprezadas. Para reduzir ou até mesmo eliminar o *chattering* existem estudos e alternativas BANDYOPADHYAY & THAKAR (2008), ZHANG & DEMIN (1992), dentre as quais destaca-se a redução da amplitude do sinal de controle UTKIN & LEE (2006) que pode ser realizada por uma função de modulação apresentada a seguir.

1.4 Função modulação

Para apresentar o conceito *função de modulação*, considera-se o sistema dinâmico (UTKIN et al. 1999, Seção 1.1)

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4)$$

com estado $x \in \mathbb{R}^n$ e uma entrada $u \in \mathbb{R}$ fornecida pela lei de controle a estrutura variável

$$u = \begin{cases} -\rho & \text{se } \sigma > 0, \\ \rho & \text{se } \sigma < 0, \end{cases} \quad (5)$$

que também pode ser representada como

$$u = -\rho \text{sign}(\sigma), \quad (6)$$

na qual a *função sinal* é definida na equação (2).

A variável ρ , denominada *função de modulação* ou *sinal de modulação*, é a amplitude do sinal de controle. O sinal σ é denominado *função de chaveamento* (EDWARDS & SPURGEON 1998, p. 3).

Seja o exemplo em que o sistema possui a seguinte dinâmica linear e invariante no

tempo

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \quad (8)$$

$$\sigma = x_2, \quad (9)$$

em que a função de chaveamento é o sinal de saída σ .

O sistema (7)–(9) pode ser representado no espaço de estado como $\dot{x} = Ax + Bu$ e $y = Cx$ com $x = [x_1, x_2]^T$, $y = \sigma$ e as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

A condição de existência do modo deslizante é $\sigma\dot{\sigma} < 0$ (EDWARDS & SPURGEON 1998, Capítulo 1), então

$$\begin{aligned} \sigma\dot{\sigma} &= x_2\dot{x}_2 \\ &= x_2(x_1 + x_2 + u) \\ &= x_1x_2 + x_2^2 - x_2\rho\text{sign}(x_2) < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Esta condição de existência do modo deslizante para o sistema de controle a estrutura variável (6)–(9) pode ser reescrita como

$$x_1x_2 + x_2^2 < \rho|x_2|, \quad \forall t \geq 0. \quad (12)$$

Então, a estabilidade do sistema (6)–(9) fica condicionada à seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \rho &> \frac{x_1x_2}{|x_2|} + \frac{x_2^2}{|x_2|} \\ &= x_1\text{sign}(x_2) + |x_2|, \quad x_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Se a função de modulação for $\rho = 1$, $\forall t$, então esta condição será satisfeita se

$$1 > x_1\text{sign}(x_2) + |x_2|. \quad (14)$$

Se no sistema (7)–(8) as condições iniciais satisfazem a desigualdade (14), o estado poderá convergir para a superfície deslizando e, então, terá comportamento estável. A

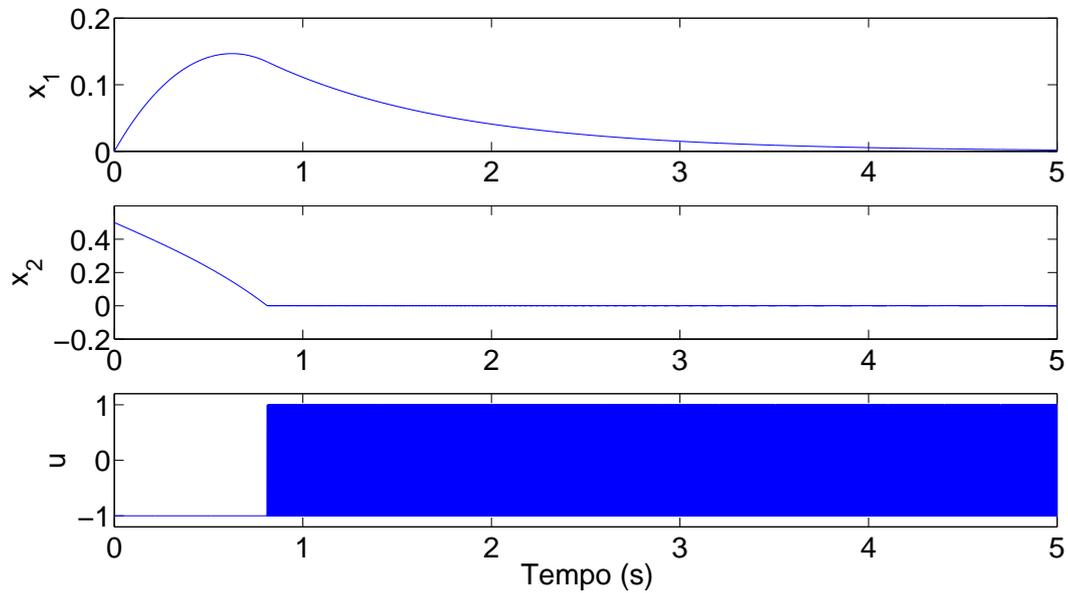


Figura 3 - Sistema (6)–(9) com função modulação $\rho = 1$ e condições iniciais não nulas que satisfazem a desigualdade (14).

Figura 3 ilustra o estado juntamente com o sinal de controle e, neste caso, as condições iniciais satisfazem a desigualdade (14) e o estado do sistema converge para a superfície de deslizamento em menos de um segundo.

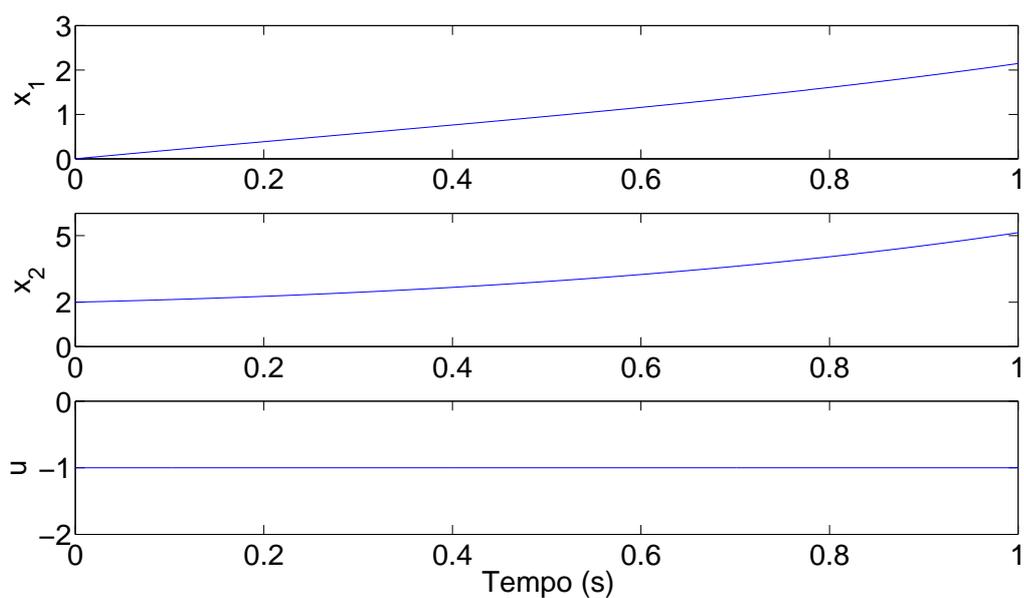


Figura 4 - Simulação do sistema (6)–(9) com função de modulação $\rho = 1$ e condições iniciais que não satisfazem a desigualdade (14).

Caso a desigualdade (14) não seja satisfeita, o sistema poderá se comportar de forma instável e não convergirá para o modo de deslizamento. A Figura 4 apresenta uma simulação em que as condições iniciais não satisfazem a desigualdade (14). A ação do sinal de controle não consegue levar o sistema para o modo deslizante e o estado diverge.

Nos exemplos anteriores pode-se concluir que mesmo que o estado do sistema seja medido este é localmente estável, pois se a desigualdade (14) não for satisfeita o sistema se torna instável. Para solucionar o problema, a seguir serão mostradas duas abordagens. No primeiro exemplo, o estado x_1 do sistema (7)–(9) será medido e será usado para realizar o controle. No segundo exemplo, o estado x_1 será estimado por um estimador de estado ou observador. Na maioria dos casos, o observador é uma réplica do sistema ou um estimador de ordem reduzida como (EDWARDS & SPURGEON 1998, Capítulo 6)

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + y, \quad (15)$$

obtido da equação de estado (7), no qual somente o estado x_1 é estimado (\hat{x}_1) e $x_2 = y$. O estado medido ou estimado é usado na função modulação do controlador (ρ) e terá que satisfazer a desigualdade (13). A princípio o controle será simulado com o estado x_1 medido e depois o mesmo controle será simulado com o estado x_1 estimado, uma comparação entre os dois controles será feita. As condições iniciais para os estados x_1 e x_2 serão as mesmas para ambos os exemplos, já o estado estimado \hat{x}_1 terá a condição inicial diferente de x_1 .

Na Figura 5 e Figura 6 pode-se observar que o estado medido e o estimado convergem, uma vez que a desigualdade (13) será satisfeita globalmente, pois o ganho

$$\rho = |x_1| + |x_2| + 1 \quad (16)$$

será a função de modulação do controle e terá ganho variável o que resultará na estabilidade global do sistema. Na Figura 6 a função modulação usa o estado estimado, ou seja

$$\rho = |\hat{x}_1| + |x_2| + 1, \quad (17)$$

e ainda assim o sistema é globalmente estável.

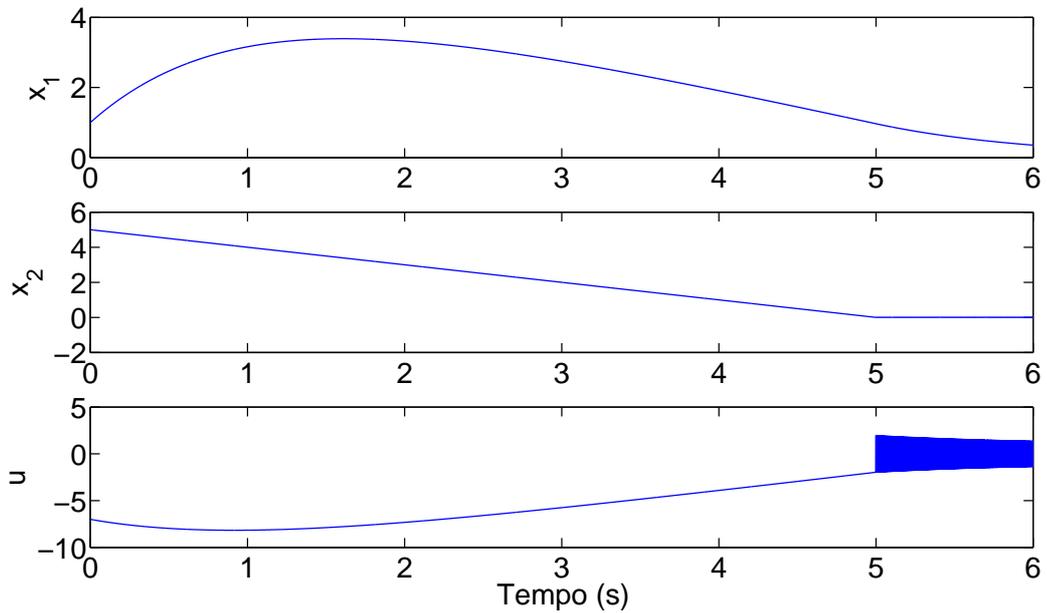


Figura 5 - Simulação do sistema (6)–(9) com função de modulação (16) gerada com o estado medido x_1 .

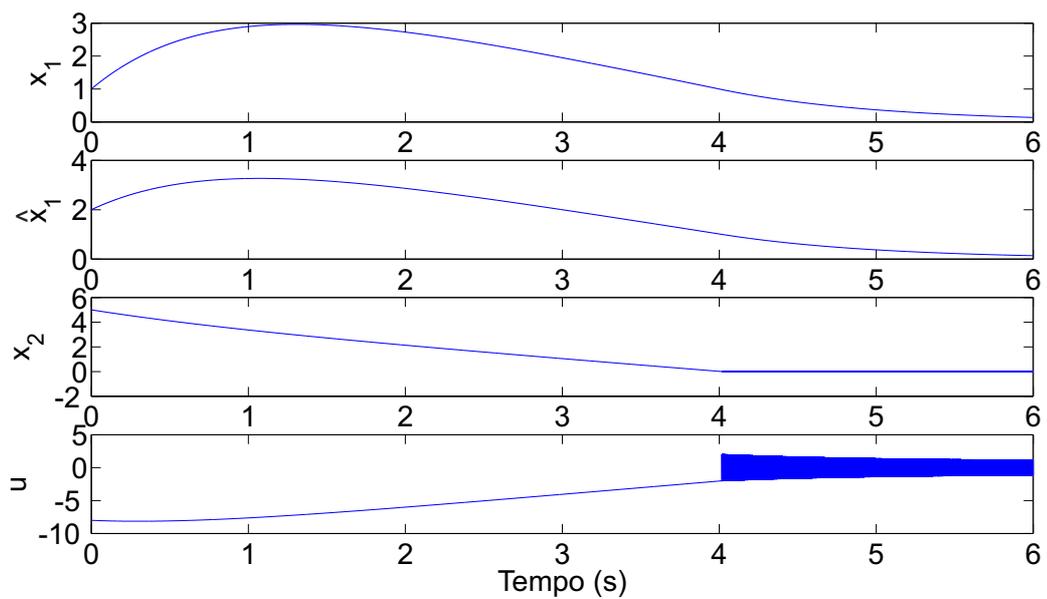


Figura 6 - Simulação do sistema (6)–(9) com função de modulação (17) gerada com o estado estimado \hat{x}_1 .

2 APROXIMAÇÕES POR FILTROS DE PRIMEIRA ORDEM

Aproximações por filtros de primeira ordem podem ser aplicadas para gerar funções de modulação para controladores por modo deslizante baseados na realimentação dos sinais de saída (CUNHA 2004). Para ilustração, considera-se o sistema linear representado na forma regular (YOUNG 1977, UTKIN 1992):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \Phi_{11}x_1 + \Phi_{12}y_p, \\ \dot{y}_p &= \Phi_{21}x_1 + \Phi_{22}y_p + \Gamma_2u_p,\end{aligned}\tag{18}$$

onde $y_p \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída, $x_p = [x_1^T, y_p^T]^T$ é o vetor de estado e $u_p \in \mathbb{R}^m$ é o sinal gerado pela lei de controle vetorial unitário (EDWARDS & SPURGEON 1998, Capítulo 3, Seção 3.6)

$$u_p = -\Gamma_2^{-1}\rho(y_p, t)\frac{y_p}{\|y_p\|}.\tag{19}$$

A função de modulação $\rho(y_p, t) \geq 0$ ($\forall y_p, \forall t$) deve ser projetada para levar o estado do sistema (18) para a superfície de deslizamento $y_p = 0$. Se o sistema (18) for de fase mínima e a função modulação satisfizer a desigualdade

$$\rho(y_p, t) \geq c_y\|y_p(t)\| + \|\phi(t) * y_p(t)\|,\tag{20}$$

onde $\phi(t) = \Phi_{21}e^{(\Phi_{11}t)}\Phi_{12}$ e $c_y \geq 0$ é uma constante apropriada. Satisfazendo essas condições, a lei de controle (19) estabiliza globalmente e exponencialmente o ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada ($x_p = 0$), como se pode concluir da aplicação do Lema 2.2 de (CUNHA 2004, p. 30). Para que o filtro com resposta impulsiva $\phi(t)$ seja BIBO (*Bounded-Input-Bounded-Output*) estável, a matriz Φ_{11} deve ser Hurwitz CUNHA (2004), o que é garantido pela hipótese de fase mínima.

Uma solução para obter um majorante para o sinal $\|\phi(t) * y_p(t)\|$ que satisfaça a desigualdade (20) é a utilização de uma aproximação por filtro de primeira ordem (*first-order approximation filter* — FOAF), conforme foi discutido em (CUNHA et al. 2003). O problema se reduz a calcular valores para os parâmetros c_1 e γ_1 que satisfaçam a inequação

$$\|\Phi(t) * y_p(t)\| \leq c_1e^{-\gamma_1 t} * \|y_p(t)\|, \quad \forall t \geq 0.\tag{21}$$

O FOAF já foi aplicado com sucesso em controles adaptativos IOANNOU & TSAKALIS (1986) e em controle por modo deslizante sem considerar o projeto dos coeficientes c_1 e γ_1 . A técnica do projeto de FOAFs para sistemas incertos apresentada em HSU, COSTA & CUNHA (2003) gera resultados conservadores para os parâmetros c_1 e γ_1 . O projeto de FOAFs para sistemas lineares invariantes no tempo (*linear time invariant* — LTI) com parâmetros conhecidos foi desenvolvido por dois diferentes métodos em CUNHA et al. (2003), que são revisados neste capítulo:

1. A *síntese baseada em formas quadráticas de Lyapunov*, que é bastante simples de ser implementada.
2. A *otimização dos coeficientes* para melhorar o desempenho do FOAF.

Esses métodos são revistos nas seções a seguir.

Outros métodos de aproximação para síntese de funções modulação são baseados em observadores (EDWARDS & SPURGEON 1998). Nessa abordagem, a função deve satisfazer $\rho(\hat{x}_p) \geq c_x \|\hat{x}_p(t)\|$, onde $\hat{x}_p(t)$ é uma estimativa para o estado $x_p(t)$ gerada por um observador e $c_x \geq 0$ é uma constante adequada. Em geral no projeto de observadores para sistemas incertos, muitas restrições na estrutura do sistema são impostas caso seja usado observador por modo deslizante (EDWARDS & SPURGEON 1998). Outra alternativa é o uso de observadores de alto ganho ESFANDIARI & KHALIL (1992), que produzem picos indesejados no sinal de controle (OH & KHALIL 1995, CUNHA, COSTA, LIZARRALDE & HSU 2009). Por isto, o uso do FOAF se torna mais vantajoso pelas razões a seguir:

1. sua estrutura é mais simples que a de um observador;
2. a síntese por FOAF pode não ser baseada no modelo do sistema, tornado-se mais natural para sistemas incertos;
3. o projeto do FOAF independe da ordem do sistema (CUNHA, COSTA & HSU 2006);
4. os FOAFs não produzem picos que são gerados por observadores de alto ganho.

Nas seções a seguir serão descritas aproximações por filtros de primeira Ordem para sistemas com parâmetros conhecidos, conforme foi proposto por (CUNHA et al. 2003, CUNHA 2004).

2.1 Aproximações por Filtro de Primeira Ordem para Sistemas Lineares

A fim de desenvolver um FOAF para um sistema com matriz de transferência racional e estritamente própria $G(s)$ e resposta impulsiva $g(t)$, a desigualdade (21) também pode ser expressa como

$$\|g(t) * u(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t} * \|u(t)\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (22)$$

Assume-se que o sinal de entrada $u(t)$ seja contínuo por partes. Uma realização do FOAF para sistemas lineares é:

$$\dot{\bar{y}}(t) = -\gamma_1 \bar{y}(t) + c_1 \|u(t)\|, \quad (23)$$

onde $\bar{y}(t) \geq \|g(t) * u(t)\|, \forall t \geq 0$, desde que $\bar{y}(0) \geq 0$ (CUNHA, COSTA & HSU 2008).

O filtro de primeira ordem com função de transferência

$$F(s) = \frac{c_1}{s + \gamma_1} \quad (24)$$

é um FOAF da matriz de transferência estritamente própria e estável $G(s)$ se

$$\|g(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (25)$$

onde $c_1, \gamma_1 > 0$ são constantes apropriadas.

2.1.1 Margem de Estabilidade

Margem de estabilidade é um conceito fundamental para *aproximações por filtros de primeira ordem*. O termo *margem de estabilidade* foi utilizado por IOANNOU & TSAKALIS (1986) para os polos de uma função de transferência. A seguir define-se a margem de estabilidade de matrizes de transferência, de matrizes reais e de polinômios, conforme (CUNHA 2004, Seção 1.2.1).

Definição 2.1. *A margem de estabilidade da matriz de transferência $G(s)$ é dada por*

$$\gamma_0 := \min_j \{-\mathcal{R}(p_j)\}, \quad (26)$$

onde $\{p_j\}$ são os polos de $G(s)$.

Fato: o sistema com matriz de transferência $G(s)$ é BIBO estável se e somente se $\gamma_0 > 0$ (KAILATH 1980, Seção 2.6.1).

Definição 2.2. A margem de estabilidade de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dada por

$$\lambda_0 := \min_j \{-\mathcal{R}(\lambda_j)\}, \quad (27)$$

onde $\{\lambda_j\}$ são os autovalores de A . Se $\lambda_0 > 0$, então A é denominada matriz Hurwitz.

Definição 2.3. A margem de estabilidade de um polinômio $p(s)$ é dada por

$$\gamma_0 := \min_j \{-\mathcal{R}(z_j)\}, \quad (28)$$

onde $\{z_i\}$ são as raízes de $p(z_j) = 0$. Se $\gamma_0 > 0$, então $p(s)$ é denominado polinômio Hurwitz.

2.1.2 Fundamentos para aproximações por filtros de primeira ordem

As margens de estabilidade são de extrema importância para o Teorema 2.1 a seguir (CUNHA 2004, Lema 3.1).

Teorema 2.1. FOAF para sistemas com parâmetros conhecidos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (29)$$

onde $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Seja γ_0 a margem de estabilidade da matriz de transferência $G(s) := C(sI - A)^{-1}B$, λ_0 a margem de estabilidade da matriz A e seja $\gamma_1 := \gamma_0 - \delta$ com $\delta > 0$ sendo uma constante arbitrária. Seja $\bar{u}(t)$ um majorante instantâneo de $u(t)$, i.e., $\|u(t)\| \leq \bar{u}(t), \forall t \geq 0$. Então $\exists c_1, c_2 > 0$ tais que a resposta impulsiva $g(t)$ do sistema (29) satisfaça

$$\|g(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad (30)$$

e as desigualdades sejam satisfeitas

$$\|g(t) * u(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t} * \bar{u}(t), \quad (31)$$

$$\|y(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t} * \bar{u}(t) + c_2 e^{[-(\lambda_0 - \delta)t]} \|x(0)\|, \quad (32)$$

$\forall t \geq 0$.

Prova: A resposta impulsiva do sistema (29) é dada por

$$g(t) = \begin{cases} Ce^{At}B & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (33)$$

A exponencial matricial e^{At} e a resposta impulsiva $g(t)$ podem ser representadas como somas de termos exponenciais $A_{ji}t^l e^{(\lambda_j t)}$ e $G_{jl}t^l e^{(\lambda_j t)}$, respectivamente, $j \in \{1, \dots, n\}$, $l \in \{0, \dots, m_j - 1\}$, m_j é a multiplicidade do autovalor λ_j de A e $A_{jj} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $G_{jl} \in \mathbb{C}^{p \times m}$. Assim pode-se concluir que $\exists c_1, c_3 > 0$ tais que $\|e^{At}\| \leq c_3 e^{-(\lambda_0 - \delta)t}$, $\|g(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t} \forall t \geq 0$, validando a seguinte desigualdade

$$\|g(t) * u(t)\| \leq \|g(t)\| * \|u(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t} * \bar{u}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (34)$$

resultando na desigualdade (31).

Uma vez que o sinal de saída do sistema (29) é dado por

$$y(t) = g(t) * u(t) + Ce^{At}x(0), \quad t \geq 0, \quad (35)$$

então a norma do sinal de saída $\|y(t)\|$ pode ser majorada pela soma dos majorantes (31) e $\{\|C\|c_3 e^{-(\lambda_0 - \delta)t} \|x(0)\|\}$. Escolhendo $c_2 = \|C\|c_3$, obtém-se a desigualdade (32), completando-se a prova. \square

2.2 Síntese do Filtro

O Teorema 2.1 estabelece condições de existência para as constantes c_1 e c_2 e um majorante para γ_1 de forma adequada à análise de estabilidade de sistemas de controle através da aplicação dos limites superiores (31) e (32). No entanto, isto é insuficiente para a síntese dos FOAFs. No projeto de controladores por modo deslizante, os valores

das constantes c_1 e γ_1 devem ser escolhidos para se manter as amplitudes dos sinais em níveis moderados.

2.2.1 Critérios de desempenho

A síntese do FOAF deve ser baseada em critérios orientados pela aplicação do filtro. Na síntese do FOAF são consideradas três características a seguir (CUNHA 2004, Seção 3.3.1):

- a) A velocidade da dinâmica do filtro, dada por γ_1 .
- b) O ganho DC, dado por c_1/γ_1 .
- c) O valor de pico da resposta impulsiva do filtro, dado por c_1 .

Para obter uma resposta rápida no transitório, um critério natural é escolher um valor grande para o parâmetro γ_1 , respeitando-se as restrições $\gamma_1 \leq \gamma_0 - \delta_u$, imposta pelo Teorema 2.1 com $\delta \geq \delta_u > 0$, e $\gamma_1 \geq \delta_l$, uma vez que o FOAF deve respeitar alguma margem de estabilidade especificada $\delta_l > 0$.

Aplicações que não suportam picos de grande amplitude em resposta a pulsos rápidos de entrada (semelhantes a impulsos) requerem que o valor escolhido para a constante c_1 seja o menor possível, sujeito à restrição

$$c_1 e^{-\gamma_1 t} \geq \|g(t)\|, \quad \forall t \geq 0, \quad (36)$$

que é equivalente à

$$c_1 \geq C_1(\gamma_1), \quad C_1(\gamma_1) := \sup_{0 \leq t < +\infty} \{\|g(t)\| e^{\gamma_1 t}\}. \quad (37)$$

O ganho DC do FOAF é uma característica relevante pelos seguintes aspectos:

- (i) O ganho DC coincide com a área da resposta impulsiva do FOAF.
- (ii) O ganho DC deve ser pequeno para se manter pequena a amplitude da função de modulação do controlador por modo deslizante gerada pelo FOAF.

O ganho DC do FOAF (23) é dado por

$$S(c_1, \gamma_1) = \int_0^{+\infty} c_1 e^{-\gamma_1 t} dt = \frac{c_1}{\gamma_1}. \quad (38)$$

2.2.2 Síntese do FOAF por formas quadráticas de Lyapunov

Considerando que a matriz A do sistema (29) seja Hurwitz, então existe uma solução positiva definida $P = P^T$ para a equação de Lyapunov

$$A^T P + P A = -2Q, \quad (39)$$

para cada $Q = Q^T > 0$ (KHALIL 1996, Teorema 3.6). A melhor estimativa para a margem de estabilidade de $A(\lambda_0)$ calculada através da equação de Lyapunov é obtida com $Q = I$ e é igual a

$$\gamma_1 = \frac{1}{\lambda_{\max}(P)}, \quad (40)$$

conforme (EDWARDS & SPURGEON 1998, pp. 22-23). Pode-se concluir que $0 < \gamma_1 \leq \lambda_0$ a partir de (VAN LOAN 1985, Teorema 1.1).

2.2.2.1 Cálculo dos coeficientes

Para computar as constantes c_1 e γ_1 da desigualdade (30), aplica-se a forma quadrática $V(x) = x^T P x$ cuja derivada é limitada por

$$\dot{V} = -2\|x\|^2 + 2x^T P B u \leq -2\|x\|^2 + 2\|P B\| \|x\| \|u\|. \quad (41)$$

Aplicando-se a desigualdade de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2, \quad (42)$$

obtem-se

$$\dot{V} \leq -\frac{2}{\lambda_{\max}(P)}V + \frac{2\|P B\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|u\|. \quad (43)$$

Então, definindo-se $r := \sqrt{V}$, pode-se obter

$$\dot{r} \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}r + \frac{\|P B\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|u\|. \quad (44)$$

Um majorante $\bar{r}(t)$ para $r(t)$ é dado pela solução da equação diferencial

$$\dot{\bar{r}} = -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}\bar{r} + \frac{\|PB\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|u\|, \quad (45)$$

que é

$$\bar{r}(t) = \frac{\|PB\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}e^{-\gamma t} * \|u(t)\|, \quad t \geq 0, \quad (46)$$

onde se assumiu $\bar{r}(0) = r(0) = 0$ para $x(0) = 0$.

Através da aplicação da desigualdade de Rayleigh-Ritz (42) à solução (46) e lembrando-se que $\|y\| \leq \|C\|\|x\|$ conclui-se que

$$\|y(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t} * \|u(t)\|, \quad (47)$$

com

$$c_1 = \frac{\|C\|\|PB\|}{\lambda_{\min}(P)}, \quad (48)$$

que é uma estimativa para essa constante em (30), (31) e (32).

2.2.2.2 Exemplos de síntese aplicando-se formas quadráticas de Lyapunov

Exemplo 1: O exemplo a seguir mostra a síntese do FOAF através de formas quadráticas de Lyapunov para a norma do sinal de saída do sistema com função de transferência dada por

$$G_1(s) = \frac{(s+2)}{(s+5)(s+2-5i)(s+2+5i)}. \quad (49)$$

Com o intuito de avaliar a dependência da síntese através de formas quadráticas de Lyapunov em relação à realização do filtro, consideram-se as três realizações para o sistema (49) apresentadas na Tabela 1: Canônica controlável, Canônica observável e Diagonal por blocos.

Para cada realização foi sintetizado um filtro, através de formas quadráticas de Lyapunov, e os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 1. Observa-se que em cada realização os valores da velocidade da dinâmica do sistema ($\gamma_1(s^{-1})$), de pico (c_1) e do ganho DC (S) sofrem grandes variações. Nas realizações Canônica Controlável e Canônica Observável, a dinâmica do filtro é lenta e os valores de pico e o ganho DC são

Tabela 1 - Aproximações por filtros de primeira ordem obtidas a partir de diversas realizações da função de transferência $G_1(s)$ (49).

Realização	Matrizes da realização			Características do FOAF		
	A	B	C	γ_1 (rad/s)	c_1	S
Canônica controlável	$\begin{pmatrix} -9 & -49 & -145 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$(0 \ 1 \ 2)$	0,012	10,76	909,61
Canônica observável	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -145 \\ 1 & 0 & -49 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$(0 \ 0 \ 1)$	0,012	97,40	$8,18 \times 10^3$
Diagonal por blocos	$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,35 \\ -0,59 \\ 0,83 \end{pmatrix}$	$(-0,12 \ -0,22 \ -0,11)$	2	0,52	0,26

muito grandes. Já para a realização Diagonal por blocos, a dinâmica do filtro é mais rápida e os valores de pico e ganho DC são menores, ou seja, o resultado obtido é mais razoável, mas ainda sim conservador.

A Figura 7 e Figura 8 ilustram a resposta impulsiva do FOAF para cada realização na Tabela 1 e verificam-se as observações feitas acima.

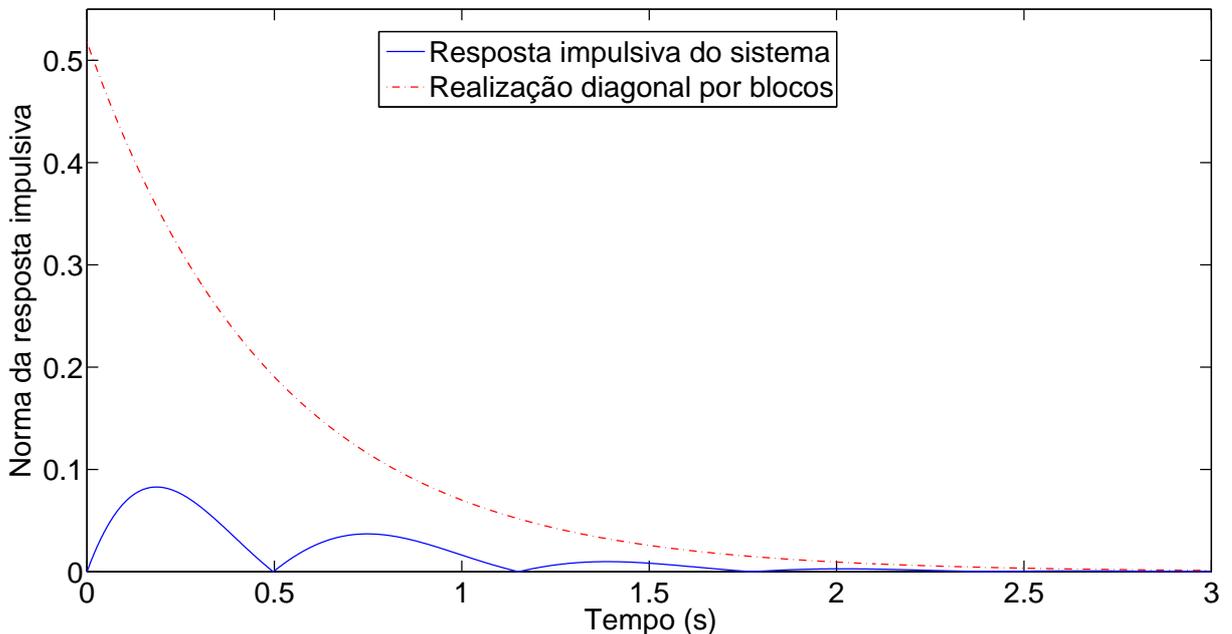


Figura 7 - Resposta impulsiva do FOAF sintetizado através da aplicação de forma quadrática de Lyapunov para realização diagonal por blocos juntamente com a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($|g_1(t)|$) (49).

Exemplo 2: O Exemplo 1 mostrou que a síntese do FOAF através de formas quadráticas de Lyapunov é dependente da realização do sistema. Dependendo da realização escolhida pode-se obter um filtro consideravelmente conservador ou, em outras

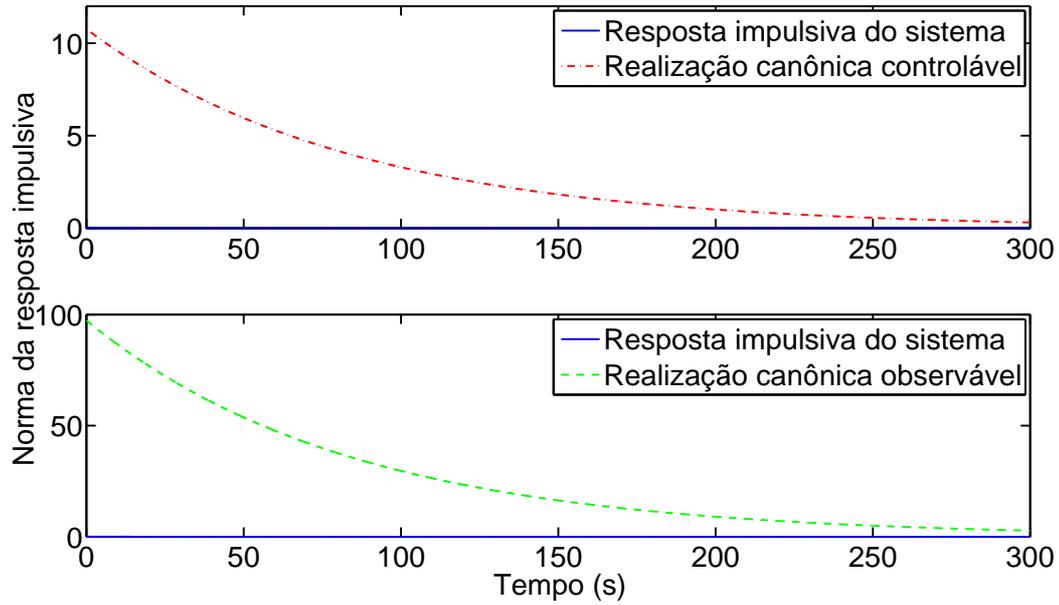


Figura 8 - Resposta impulsiva de cada FOAF sintetizado através da aplicação de formas quadráticas de Lyapunov para as realizações canônica controlável e canônica observável, juntamente com a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($|g_1(t)|$) (49). Note que a resposta impulsiva quase se confunde com o eixo do tempo.

palavras, um filtro ruim. Para mostrar essa dependência de um ponto de vista mais geral, uma transformação será aplicada ao estado do sistema. Se $\bar{x}(t) = Tx(t)$ e aplicando-se a matriz de transformação $T(\epsilon)$ no sistema (29) obtém-se a seguinte equação de estado (CHEN 1999, Seção 3.4)

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= TAT^{-1}\bar{x}(t) + TBu(t), \\ \bar{y}(t) &= CT^{-1}\bar{x}(t).\end{aligned}\tag{50}$$

Definindo-se as matrizes

$$\begin{aligned}\bar{A} &= TAT^{-1}, \\ \bar{B} &= TB, \\ \bar{C} &= CT^{-1},\end{aligned}\tag{51}$$

pode-se reescrever a equação (50) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \\ \bar{y}(t) &= \bar{C}\bar{x}(t).\end{aligned}\tag{52}$$

Para ilustrar o efeito da transformação acima, esta é aplicada ao exemplo extraído de (CUNHA 2004, Seção 3.3.2.2). Neste exemplo considera-se a função de transferência

$$G_2(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} \quad (53)$$

e sua realização paralela

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

A este sistema aplica-se a matriz de transformação $T(\epsilon)$ dada por

$$T(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad \epsilon > 0, \quad (55)$$

que aplicada em (51) resulta na realização

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10\epsilon \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Nota-se que a matriz A não será alterada e, conseqüentemente, a matriz P da equação de Lyapunov também não sofrerá alteração. Conseqüentemente, o valor de γ_1 , que somente depende da matriz P , será mantido constante. Já o valor de pico da resposta impulsiva do filtro (constante c_1) é dependente das matrizes \bar{B} e \bar{C} e pode sofrer alteração na síntese do filtro, o que se conclui da equação (48).

Variando ϵ e sintetizando o FOAF por Lyapunov, obtém-se a curva do pico da resposta impulsiva c_1 apresentada na Figura 9. Pode-se observar que c_1 tende ao infinito à medida que $\epsilon \rightarrow 0$ ou $\epsilon \rightarrow +\infty$.

Assim conclui-se que a síntese do FOAF por Lyapunov é dependente da realização da função de transferência considerada e pode ser arbitrariamente conservadora, o que justifica descartar este método.

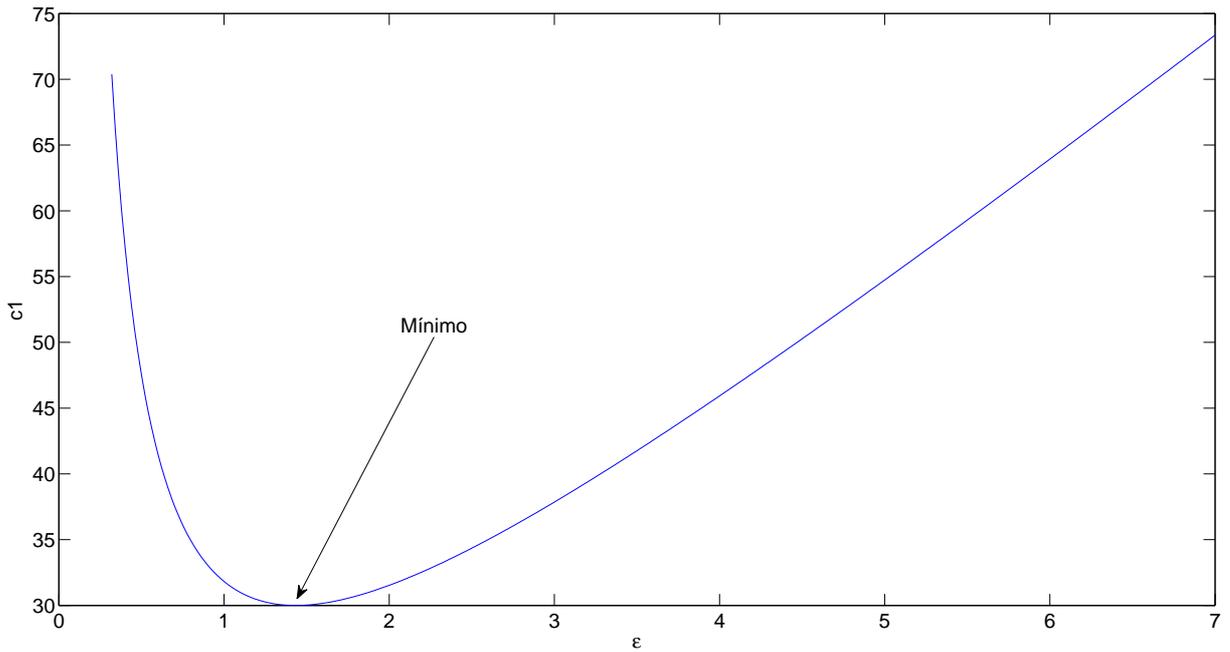


Figura 9 - Gráfico do valor de pico da resposta impulsiva (c_1) em função do parâmetro ε da transformação (55).

2.2.3 Síntese Ótima do FOAF

A síntese do FOAF pode ser formulada como um problema de otimização restrita à região viável definida pelas restrições na Seção 2.2.1 (CUNHA 2004, Seção 3.3.3)

$$\mathcal{V} = \{(c_1, \gamma_1) : c_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}^+, \quad (57)$$

$$c_1 \geq C_1(\gamma_1), \quad (58)$$

$$\gamma_1 \leq \gamma_0 - \sigma_u, \quad (59)$$

$$\gamma_1 \geq \sigma_l\}. \quad (60)$$

São formulados três problemas de otimização:

- a) *Maximizar a velocidade da dinâmica do filtro γ_1 e manter pequeno o valor de pico da resposta impulsiva c_1 . A máxima velocidade é $\gamma_1 = \gamma_0 - \delta_u$, como se pode concluir do Teorema 2.1 e da restrição (59). Assim a solução deste problema é*

$$c_1 = C_1(\gamma_0 - \delta_u), \quad \gamma_1 = \gamma_0 - \delta_u. \quad (61)$$

b) *Minimizar o ganho DC do filtro.* Este problema pode ser formulado como

$$\text{minimizar } S(c_1, \gamma_1), \quad (62)$$

$$\text{sujeito a } (c_1, \gamma_1) \in \mathcal{V}. \quad (63)$$

A resolução deste problema pode ser simplificada através da substituição da restrição do tipo desigualdade (58) pela restrição do tipo igualdade $c_1 = C_1(\gamma_1)$, uma vez que, para o valor fixo de γ_1 em (38), pode-se afirmar que $S(c_1, \gamma_1)$ será mínimo se e somente se c_1 for mínimo.

c) *Minimizar o valor de pico da resposta impulsiva.* Formula-se este problema como

$$\text{minimizar } c_1, \quad (64)$$

$$\text{sujeito a } (c_1, \gamma_1) \in \mathcal{V}. \quad (65)$$

A resolução deste problema é simplificada pela substituição da restrição do tipo desigualdade (58) pela restrição do tipo igualdade $c_1 = C_1(\gamma_1)$, assim como é feito no problema de otimização anterior. A função custo (64) decresce à medida que γ_1 decresce; então as restrições do tipo desigualdade (59) e (60) são substituídas pela restrição do tipo igualdade $\gamma_1 = \delta_l$, que é mais simples.

2.2.3.1 Estimação do supremo

Um problema encontrado nos três problemas de otimização formulados anteriormente é a computação do *supremo* $C_1(\gamma_1)$ definido em (37). A computação do *supremo* resolve diretamente os problemas de otimização (a) e (c). Os problemas encontrados são:

1. A função $\|g(t)\|e^{\gamma_1 t}$ pode possuir um número infinito de *extremos* no intervalo $t \in [0, +\infty)$. Assim, a computação de $C_1(\gamma_1)$ é geralmente um problema de otimização não-convexo.
2. A função $\|g(t)\|$ pode ser não analítica em todo intervalo $t \in [0, +\infty)$, o que dificulta a aplicação de métodos de otimização baseados em derivadas.
3. O horizonte de busca é irrestrito unilateralmente.

Algumas simplificações são adotadas para resolver essas dificuldades:

- (i) Adota-se um horizonte de busca finito, i.e., $t \in [0, t_f]$, $0 < t_f < +\infty$. Esta simplificação é baseada na BIBO estabilidade de $G(s)$, que implica em $g(t) \rightarrow 0$ exponencialmente à medida que $t \rightarrow +\infty$.
- (ii) A busca do máximo é restrita a amostras periódicas no intervalo $t \in [0, t_f]$. O intervalo de amostragem $h \in \mathbb{R}^+$ deve ser escolhido de forma que o máximo possa ser computado.

Finalmente, o valor estimado para $C_1(\gamma_1)$ é dado por

$$\hat{C}_1(\gamma_1, h, k_f) := \max_{k \in [0, \dots, k_f]} \{ \|\hat{g}(kh)\| e^{\gamma_1 kh} \}, \quad (66)$$

no qual $k, k_f \in \mathbb{N}$, $t_f = k_f h$ e $\hat{g}(kh)$ é a resposta impulsiva amostrada periodicamente.

2.2.3.2 Minimização do ganho DC

A minimização do ganho DC consiste em encontrar o valor ótimo de γ_1 que minimiza $S(\hat{C}_1(\gamma_1, h, k_f), \gamma_1)$. A minimização do ganho DC formulada na Seção 2.2.3 pode ser redefinida como

$$\min_{\delta_1 \leq \gamma_1 \leq \gamma_0 - \delta_u} \hat{S}(\gamma_1, h, k_f), \quad (67)$$

com

$$\hat{S}(\gamma_1, h, k_f) := \gamma_1^{-1} \hat{C}_1(\gamma_1, h, k_f), \quad (68)$$

resultando numa solução ótima em algum ponto (c_1^*, γ_1^*) , sendo $c_1^* = \hat{C}_1(\gamma_1^*, h, k_f)$.

2.2.3.3 Exemplo de síntese ótima

A fim de realizar comparações, será aplicado ao sistema (49) a síntese ótima do FOAF desenvolvida por (CUNHA 2004). Os resultados obtidos na síntese ótima estão apresentados na Tabela 2. Comparando-se os resultados da Tabela 1 e Tabela 2, observa-se que os valores de γ_1 , c_1 e ganho DC na síntese de constante de tempo e ganho DC mínimos são menores do que na síntese por formas quadráticas de Lyapunov. A exceção está na síntese de valor de pico mínimo, na qual o ganho DC é maior do que na síntese por formas quadráticas de Lyapunov para a realização diagonal por blocos. Ainda assim,

o ganho DC é menor do que nas realizações canônicas controlável e observável. A Figura 10 mostra a resposta impulsiva de cada síntese ótima do FOAF.

Tabela 2 - Resultados da síntese para os três objetivos de otimização aplicados à função de transferência $G_1(s)$ (49).

Objetivo	Características do FOAF		
	γ_1 (rad/s)	c_1	S
Minimizar constante de tempo	1,9	0,16	0,09
Minimizar ganho DC	1,41	0,11	0,08
Minimizar valor de pico	0,1	0,08	0,84

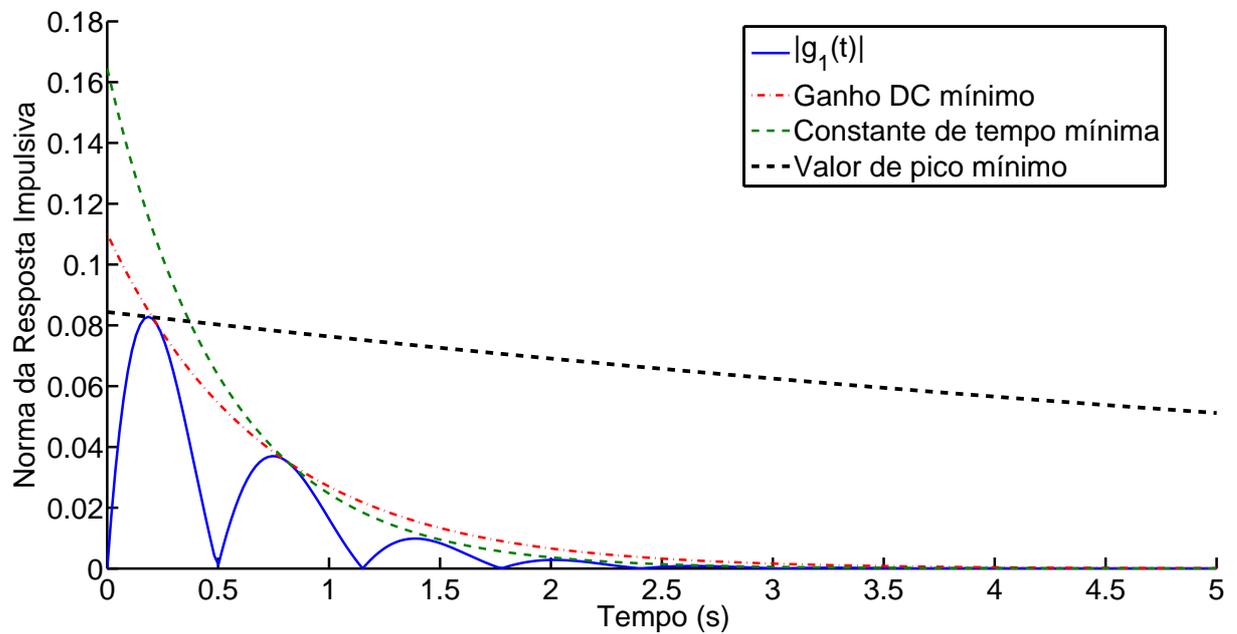


Figura 10 - Resposta impulsiva de cada FOAF sintetizado através de otimização juntamente com a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($|g_1(t)|$).

3 ALGORITMOS GENÉTICOS APLICADOS EM OTIMIZAÇÃO

A teoria da evolução e o princípio de seleção natural de Darwin, — *sobrevivência dos mais aptos* — e a lei genética de Mendel sobre a transferência hereditária dos parentes para os descendentes levaram cientistas da computação a criarem a computação evolucionária.

Um dos algoritmos da computação evolucionária é o *algoritmo genético* (AG), originalmente criado por HOLLAND (1975) para otimização global e busca. Atualmente é utilizado em diversas áreas como engenharia, administração, estatística, etc.

O AG é iniciado com uma população arbitrária e a solução ótima do problema pode estar em um indivíduo dentro dessa população. A *aptidão* (*fitness*) JAMSHIDI et al. (2003, Seção 1.4) de cada indivíduo é avaliada para determinar quais indivíduos irão se reproduzir e criar uma nova população. A aptidão de um indivíduo é um grau que indica o quanto aquele indivíduo é bom para a solução de um determinado problema.

A população é renovada, toda ou em parte, a cada iteração. Essa renovação da população é denominada geração. Cada nova geração é criada basicamente por três operadores genéticos: *seleção*, *cruzamento* e *mutação*. A *seleção* se dá através da avaliação dos melhores indivíduos que, seguindo o princípio de Darwin, têm mais chance de sobreviver deixar descendentes. O *cruzamento* faz a troca de material genético entre dois indivíduos criando dois novos indivíduos. A *mutação* altera o material genético de um indivíduo somente. A aplicação dos operadores genéticos continua até que uma solução suficientemente boa seja alcançada ou o máximo de gerações seja alcançado. Quanto maior for o número de iterações, espera-se que haja na população indivíduos que sejam soluções cada vez melhores.

Na busca de uma solução para o problema, o AG usa métodos heurísticos e probabilísticos, mas também explora de forma inteligente as informações disponíveis na busca de novos indivíduos. Todos os indivíduos estão dentro de um espaço de busca. A *função objetivo*, também denominada *função de avaliação de aptidão*, é utilizada para avaliar as soluções produzidas, associando a cada uma delas um índice de aptidão.

Pode-se apresentar o AG fazendo uma analogia à biologia da seguinte forma (FERREIRA 2009):

- *Cromossomos* – na biologia são formados por genes e se combinam para formar

as características genéticas básicas de um indivíduo. No AG representam uma estrutura de dados que codifica a solução de um problema.

- *Indivíduo* – na biologia é um simples membro da população, enquanto que no AG é formado pelo cromossomo e sua aptidão.
- *Alelo* – na biologia é a unidade de hereditariedade transmitida pelos cromossomos que controla as características de um organismo; no AG é um parâmetro codificado no sistema.
- *Genótipo* – na biologia representa a composição genética contida no genoma, sendo o conjunto completo de genes de um organismo; no AG é a informação contida no cromossomo.
- *Fenótipo* – na biologia é o conjunto de características físicas observáveis de um organismo; no AG representa o objeto, estrutura ou organismo construído a partir das informações do genótipo, ou seja, o cromossoma decodificado. Exemplo: considere o cromossomo que codifica parâmetros de um sistema dinâmico, como a constante do torque e a resistência elétrica de um motor, no intuito de obter a melhor resposta impulsiva do sistema. O fenótipo seria o resultado com a maior resposta impulsiva do sistema.

A otimização consiste em encontrar o máximo ou o mínimo de uma função objetivo. Uma representação do fluxo de um AG usualmente aplicado em otimização é apresentada na Tabela 3 (JAMSHIDI et al. 2003, Seção 1.3.2).

3.1 Definições Básicas

Para o AG, o foco principal é a população. A população (P) é formada por indivíduos (I_i) com $i = 1, \dots, \mu$:

$$P = \{I_1, \dots, I_i, \dots, I_\mu\}.$$

O tamanho da população (μ) pode variar durante o processo de otimização ou busca.

A representação binária é a mais utilizada e consiste de bits 0 e 1. Neste caso, podem-se utilizar dois tipos de codificação, binária ou Gray. Porém, a demanda cada

Tabela 3 - Fluxo de um algoritmo genético aplicado em otimização.

<p>Entradas: tamanho da população, população inicial (opcional), codificação e normalização dos valores superiores e inferiores, número de gerações máximo.</p> <p>Início: Criação da população inicial</p> <p> Enquanto (número de gerações menor ou igual ao número de gerações máximo) faça</p> <p> Cálculo da aptidão</p> <p> Seleção</p> <p> Cruzamento e Mutação</p> <p> Fim do enquanto</p> <p>Retorna a melhor solução encontrada</p> <p>Fim</p>

vez maior em obter soluções com grande precisão numérica motivou o desenvolvimento de novas técnicas de Cruzamento e Mutação em representação por números reais. Na representação binária as cadeias de bits se tornam maiores proporcionalmente à precisão, tornando o processo de otimização mais lento. Segundo HERRERA, LOZANO & VERDEGAY (1998), a utilização de parâmetros reais permite que os algoritmos genéticos façam melhor a busca dentro do universo de soluções, possibilitando uma melhor otimização para problemas com soluções desconhecidas. Isto torna útil a representação real na otimização nesta Dissertação.

A cadeia de dados de cada indivíduo é denominada cromossomo. O cromossomo representa o conjunto de parâmetros da função objetivo que será otimizada.

Um indivíduo da população pode ser a solução da otimização ou busca. Todo o valor que o cromossomo pode assumir representa seu espaço de busca. A função objetivo $f(x)$ JAMSHIDI et al. (2003, Seção 1.3.1) é um valor escalar que é função do vetor x com n dimensões, ou seja, se o cromossomo representa n parâmetros de uma função objetivo, então seu espaço de busca é um espaço com n dimensões. O vetor x que tem um conjunto de n variáveis x_j ($j = 1, \dots, n$) representa um ponto no espaço vetorial \mathbb{R}^n . As variáveis x_j são denominadas genes. Assim um indivíduo é constituído de n genes. Essa constituição também pode ser denominada genótipo.

Normalmente a representação dos genótipos de um indivíduo é feita por um vetor de números binários, inteiros ou reais, onde a combinação dos elementos de cada vetor determina a maior ou a menor relevância de um indivíduo dentro da população.

Dependendo do grau de relevância, pode-se chegar à solução ou otimização de um problema, ou seja, o fenótipo do melhor indivíduo.

3.2 Operadores Genéticos

O princípio básico dos operadores genéticos é transformar a população através de sucessivas gerações, estendendo a busca até chegar a um resultado satisfatório. Os operadores genéticos são necessários para que a população se diversifique mas também mantenha características de adaptação adquiridas pelas gerações anteriores. A seguir são apresentados os principais operadores genéticos: (1) *operador de seleção*, (2) *operador de cruzamento* e (3) *operador de mutação* (JAMSHIDI et al. 2003).

3.2.1 Operador de Seleção

O processo de seleção faz a escolha dos melhores indivíduos dentro da população para que estes continuem na próxima geração. Baseado no princípio de Darwin de seleção natural, os indivíduos mais aptos à otimização do problema terão mais chances de se reproduzirem e, através da hereditariedade, deixar em suas características genéticas para as próximas gerações. A seleção faz a comparação de um indivíduo em relação a outro e decide qual é o melhor. O melhor indivíduo terá a maior probabilidade de sobreviver. Por outro lado, o pior indivíduo terá a menor probabilidade de se reproduzir e de passar para a próxima geração.

Roleta e torneio são alguns dos métodos de seleção descritos nas seções a seguir.

3.2.1.1 Seleção por Roleta

Devido à sua simplicidade, este é um dos métodos mais utilizados (GOLDBERG 1989). A população de indivíduos será distribuída proporcionalmente dentro de uma roleta conforme a probabilidade atribuída a cada indivíduo. Assim, os indivíduos que têm a melhor representação dentro da roleta serão aqueles que possuem as melhores características para a solução ou otimização do problema, enquanto que os indivíduos que tiverem menor representação na roleta serão aqueles que possuem as piores características. O número de campos na roleta é correspondente ao tamanho da população, cada indivíduo é posicionado dentro de um campo da roleta. O tamanho do campo é proporcional

à aptidão do indivíduo dentro da população. A Figura 11 mostra um exemplo de distribuição. Neste exemplo, o indivíduo I_3 terá 20% de chances de ser selecionado.

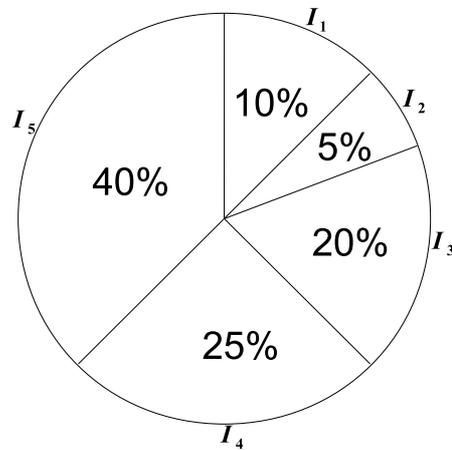


Figura 11 - Exemplo da seleção por roleta.

3.2.1.2 Seleção por Torneio

Nesta técnica um grupo de z indivíduos são pré-selecionados aleatoriamente (sendo $z \ll \mu$) e o melhor dentro desse grupo é selecionado. O ciclo é repetido μ/z vezes até que o número de indivíduos por geração seja alcançado para a população da nova geração. Uma característica é que nenhuma probabilidade individual é aplicada aos indivíduos, diferentemente da técnica de seleção por roleta. Em seguida, a geração de uma nova população é completada usando-se o operador de cruzamento (ALMEIDA & KAGAN 2010).

3.2.1.3 Elitismo

O elitismo é uma técnica utilizada para melhorar o desempenho do AG. Este armazena os melhores indivíduos para serem usados na próxima geração, fazendo com que estes não sejam destruídos pelos operadores de cruzamento ou de mutação.

3.2.2 Operador de Cruzamento

No processo de seleção somente pode ocorrer a transferência do indivíduo para a próxima geração. De outra forma, o cruzamento gera novos indivíduos fazendo a troca

de material genético entre dois indivíduos da população. Nessa operação, dois novos indivíduos são criados e irão para a nova população substituindo os dois indivíduos que serviram de base para fazer a troca genética. Pode-se denominar de pais os dois indivíduos que foram selecionados para a troca genética e filhos os herdeiros dessa troca.

No processo de cruzamento, um ou mais pontos da cadeia de genes do par de indivíduos é escolhido para fazer a troca genética entre eles. Essa troca pode ou não criar melhores indivíduos. Nas seções a seguir serão descritos os dois tipos principais de cruzamentos.

3.2.2.1 Operador de Cruzamento Binário

O cruzamento binário é realizado entre indivíduos representados por números binários. Cruzamentos deste tipo podem ser realizados por três diferentes maneiras:

- Cruzamento de um ponto:

Primeiramente dois indivíduos são escolhidos aleatoriamente, por exemplo \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 , os pais. Na sequência os pais serão divididos em dois em um ponto de cruzamento i onde haverá a permuta de material genético gerando novos indivíduos \mathbf{I}_1^{filho} e \mathbf{I}_2^{filho} , os filhos. Podem-se representar os pais da seguinte forma (JAMSHIDI et al. 2003):

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= [I_{1,1}, I_{1,2}, \dots, I_{1,i}, I_{1,i+1}, \dots, I_{1,n}], \\ \mathbf{I}_2 &= [I_{2,1}, I_{2,2}, \dots, I_{2,i}, I_{2,i+1}, \dots, I_{2,n}].\end{aligned}\tag{69}$$

Após a operação de cruzamento, dois filhos são gerados a partir do ponto de cruzamento i resultando:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1^{filho} &= [I_{1,1}, I_{1,2}, \dots, I_{1,i}, I_{2,i+1}, \dots, I_{2,n}], \\ \mathbf{I}_2^{filho} &= [I_{2,1}, I_{2,2}, \dots, I_{2,i}, I_{1,i+1}, \dots, I_{1,n}].\end{aligned}\tag{70}$$

Nota-se que a primeira parte do \mathbf{I}_1^{filho} é formada pela primeira parte do \mathbf{I}_1 antigo e a segunda parte é formada pela segunda parte do \mathbf{I}_2 . De forma semelhante, a primeira parte do \mathbf{I}_2^{filho} é formada pela primeira parte do \mathbf{I}_2 antigo e a segunda parte é formada pela segunda parte do \mathbf{I}_1 . Isto é ilustrado na Figura 12.

- Cruzamento de dois pontos:

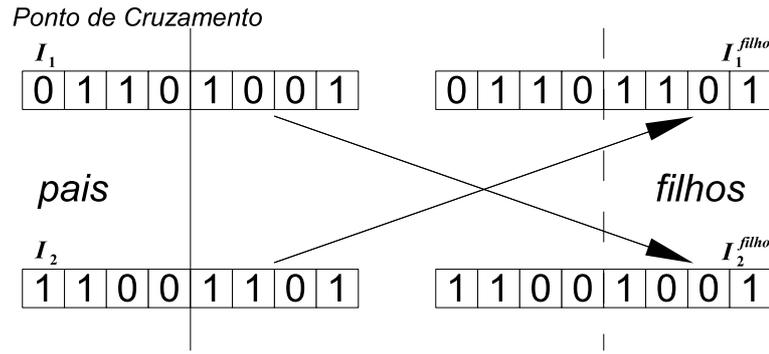


Figura 12 - Exemplo de cruzamento binário de um ponto.

O conceito é basicamente o mesmo do cruzamento de um ponto. Neste método, dois pontos de corte i e j são escolhidos aleatoriamente para definir os pontos de permuta entre os dois indivíduos. A representação do problema pode se dar da seguinte forma:

$$\mathbf{I}_1 = [I_{1,1}, I_{1,2}, \dots, I_{1,i}, I_{1,i+1}, \dots, I_{1,j}, I_{1,j+1}, \dots, I_{1,n}], \quad (71)$$

$$\mathbf{I}_2 = [I_{2,1}, I_{2,2}, \dots, I_{2,i}, I_{2,i+1}, \dots, I_{2,j}, I_{2,j+1}, \dots, I_{2,n}].$$

Após a operação de cruzamento, dois filhos são gerados a partir dos pontos de cruzamento i e j resultando:

$$\mathbf{I}_1^{filho} = [I_{1,1}, I_{1,2}, \dots, I_{1,i}, I_{2,i+1}, \dots, I_{2,j}, I_{1,j+1}, \dots, I_{1,n}], \quad (72)$$

$$\mathbf{I}_2^{filho} = [I_{2,1}, I_{2,2}, \dots, I_{2,i}, I_{1,i+1}, \dots, I_{1,j}, I_{2,j+1}, \dots, I_{2,n}].$$

Note que a primeira parte do \mathbf{I}_1^{filho} é formada pela primeira parte do \mathbf{I}_1 antigo, a parte do meio é formada pela parte do meio do \mathbf{I}_2 e a parte final volta a ser formada pela parte final do \mathbf{I}_1 antigo. O \mathbf{I}_2^{filho} é formado de forma análoga conforme a Figura 13 que descreve um exemplo. Nota-se que somente a parte central foi permutada.

- Cruzamento Uniforme:

Neste método é gerado um indivíduo aleatório \mathbf{I}_m que servirá de máscara para cada par de cromossomos pais. Se o *bit* ($\mathbf{I}_{m,1,n}$) de \mathbf{I}_m possuir valor 1, então o *bit* do pai \mathbf{I}_1 é copiado para \mathbf{I}_1^{filho} . Caso o *bit* de $\mathbf{I}_{m,1,n}$ seja 0, o *bit* do pai \mathbf{I}_2 será copiado. Para a geração do segundo filho o processo é invertido. Se o *bit* de $\mathbf{I}_{m,1,n}$ for igual a 0, o *bit* do pai \mathbf{I}_1 será copiado para \mathbf{I}_2^{filho} e se o *bit* for 1, o *bit* do pai \mathbf{I}_2 será copiado.

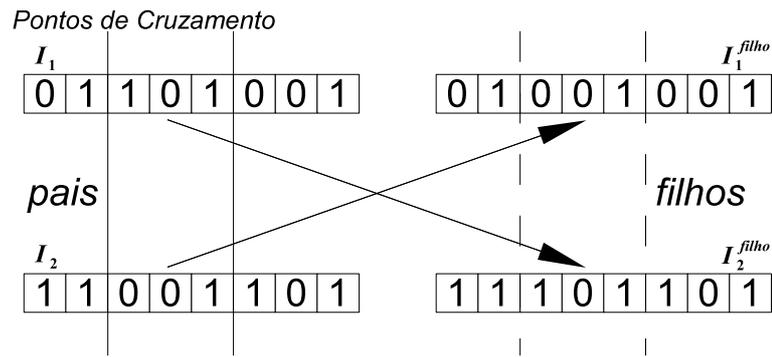


Figura 13 - Exemplo de cruzamento de dois pontos.

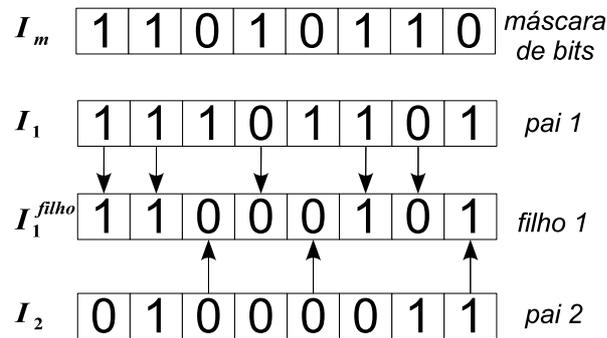


Figura 14 - Exemplo de cruzamento uniforme. Para a geração de I_2^{filho} , a máscara deve ser invertida e o cruzamento será análogo.

A Figura 14 descreve um exemplo de cruzamento uniforme.

3.2.2.2 Operador de Cruzamento Real

Como a própria denominação sugere, a representação do indivíduo é feita por um número real. A seguir serão apresentados alguns dos métodos de cruzamento real.

- Cruzamento por média: efetua o cruzamento entre os indivíduos I_1 e I_2 usando a média aritmética, dada pela equação

$$I_1^{filho} = I_2^{filho} = \frac{I_1 + I_2}{2}.$$

- Cruzamento por média geométrica: de forma análoga à média aritmética, o cruzamento dos pais será feito pela equação

$$I_1^{filho} = I_2^{filho} = \sqrt{I_1 I_2}.$$

- Cruzamento por combinação linear: sendo I_1 e I_2 os pais que irão se reproduzir, os filhos serão reproduzidos seguindo as seguintes equações (JAMSHIDI et al. 2003, Seção 1.5.2.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1^{filho} &= \lambda \mathbf{I}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{I}_2, \\ \mathbf{I}_2^{filho} &= (1 - \lambda) \mathbf{I}_1 + \lambda \mathbf{I}_2. \end{aligned} \quad (73)$$

Portanto, os filhos \mathbf{I}_1^{filho} e \mathbf{I}_2^{filho} serão combinações lineares dos pais. O peso $\lambda \in [0, 1]$ é um número aleatório gerado com distribuição uniforme.

3.2.3 Operador de Mutação

O processo de mutação se dá na variação aleatória de um dos genes de um indivíduo. A mutação é feita com base na probabilidade p_m , a probabilidade de mutação. O valor de p_m é fixado antes da otimização. Um número entre 0 e 1 é calculado para cada indivíduo e é comparado com a probabilidade de mutação. Se o número aleatório for menor do que a probabilidade da mutação, o gene é mudado. Este processo é utilizado para que a população não se torne homogênea ao longo das gerações. Essa homogeneidade acontece com a utilização do operador de cruzamento. A seguir serão descritos os dois tipos principais de mutação (JAMSHIDI et al. 2003, Seção 1.5.3): (1) *mutação binária* e (2) *mutação real*.

3.2.3.1 Operador de Mutação Binária

Na representação binária um *bit* do gene de um indivíduo é selecionado aleatoriamente e é alterado. Exemplo: um bit que tem o valor 0 tem seu valor alterado para 1, e vice versa. Um exemplo é mostrado na Figura 15.

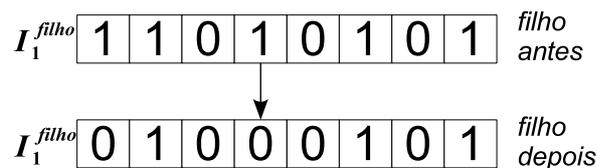


Figura 15 - Exemplo de mutação binária.

3.2.3.2 Operador de Mutação Real

Originalmente, o operador de mutação foi desenvolvido para representação binária. Desde então, outros métodos vêm sendo desenvolvidos possibilitando uma representação real através de modificações nos genes. Estes métodos possibilitam aplicar uma distribuição probabilística atribuindo valores sobre cada um dos genes no domínio. Um novo valor de gene é calculado após a distribuição probabilística. O operador de mutação altera aleatoriamente um ou mais genes para cada indivíduo selecionado.

Se cada indivíduo $\mathbf{I}_1 = [\mathbf{I}_{i1}, \dots, \mathbf{I}_{ij}, \dots, \mathbf{I}_{in}]$ e \mathbf{I}_{ij} for o gene selecionado para mutação. O domínio da variável \mathbf{I}_{ij} é dado por $\mathbf{I}_{ij} \in [\mathbf{I}_{ij,\min}, \mathbf{I}_{ij,\max}]$, onde $\mathbf{I}_{ij,\min}$ e $\mathbf{I}_{ij,\max}$ são denominados limite inferior e limite superior da variável \mathbf{I}_{ij} , respectivamente. Existem dois tipos de mutação com números reais: mutação uniforme e mutação não uniforme (JAMSHIDI et al. 2003).

Mutação Uniforme: A aplicação deste operador resulta em um novo indivíduo

$$\mathbf{I}_i^{\text{nov}} = [\mathbf{I}_{i1}, \dots, \tilde{\mathbf{I}}_{ij}, \dots, \mathbf{I}_{in}], \quad (74)$$

em que $\tilde{\mathbf{I}}_{ij}$ é um valor aleatório com distribuição probabilística uniforme e no domínio de \mathbf{I}_{ij} . Ao operador de mutação é aplicada a probabilidade p_m .

Mutação Não uniforme: A aplicação deste operador em um indivíduo resulta em um novo indivíduo

$$\mathbf{I}_i^{\text{nov}} = [\mathbf{I}_{i1}, \dots, \tilde{\mathbf{I}}_{ij}, \dots, \mathbf{I}_{in}], \quad (75)$$

no qual $\tilde{\mathbf{I}}_{ij}$ é um valor calculado por

$$\tilde{\mathbf{I}}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{I}_{ij} + \Delta(g, \mathbf{I}_{ij,\max} - \mathbf{I}_{ij}), & \text{se } h = 0, \\ \mathbf{I}_{ij} + \Delta(g, \mathbf{I}_{ij} - \mathbf{I}_{ij,\min}), & \text{se } h = 1, \end{cases} \quad (76)$$

no qual h é um valor binário escolhido aleatoriamente. A função $\Delta(g, \mathcal{Y})$ retorna valores no intervalo $[0, \mathcal{Y}]$ sendo que a probabilidade de $\Delta(g, \mathcal{Y})$ inicia em zero e é incrementada de acordo com o número de gerações (g) conforme

$$\Delta(g, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}r_a \left[1 - \frac{g}{g_{\max}} \right]^b, \quad (77)$$

na qual r_a é um número aleatório gerado no intervalo $[0, 1]$, b é um parâmetro escolhido pelo projetista que determina o grau de dependência do número de gerações e g_{\max} é o máximo número de gerações.

4 ALGORITMOS GENÉTICOS PARA A DETERMINAÇÃO DA ENVOLTÓRIA DE SISTEMAS INCERTOS

A síntese de aproximações por filtros de primeira ordem é baseada na resposta impulsiva do sistema. Para sistemas que não possuem incertezas, a síntese do filtro se torna mais fácil pois basta projetar um filtro cuja resposta impulsiva seja maior que a norma da resposta impulsiva do sistema de interesse, conforme o Capítulo 2. Se o sistema possuir parâmetros incertos que influenciam a resposta impulsiva, antes de projetar o filtro é necessário obter um majorante para todas as respostas impulsivas admissíveis. A determinação do majorante consiste em encontrar o maior valor da norma da resposta impulsiva variando-se os parâmetros do sistema.

O Teorema 2.1 é aplicado em sistemas com parâmetros conhecidos. Deve-se estender este Teorema para sistemas com parâmetros incertos que pertençam a um conjunto de sistemas incertos Σ . Por exemplo, sejam $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ e $C(\alpha)$ as matrizes que definem o sistema no espaço de estado e que são funções dos parâmetros incertos no vetor $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_q]^T$, que satisfaz as restrições (CUNHA et al. 2008)

$$\alpha_{\min i} \leq \alpha_i \leq \alpha_{\max i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}. \quad (78)$$

Então pode-se definir o conjunto de sistemas incertos como

$$\Sigma := \{\{A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)\} : \alpha_{\min i} \leq \alpha_i \leq \alpha_{\max i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}\}. \quad (79)$$

A resposta impulsiva $g(t, \alpha) = C(\alpha)e^{A(\alpha)t}B(\alpha)$, com $t > 0$ e $g(0, \alpha) = 0$, pertencerá ao conjunto das respostas impulsivas do sistema incerto

$$\mathcal{G} := \{g(t, \alpha) : \alpha_{\min i} \leq \alpha_i \leq \alpha_{\max i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}\}. \quad (80)$$

Considerando-se estes conceitos, pode-se escrever o Teorema a seguir (CUNHA et al. 2008).

Teorema 4.1. FOAF e envoltória para sistemas incertos

Considere o conjunto de sistemas LTI com parâmetros incertos Σ definidos por matrizes reais incertas $\{A, B, C\}$ limitadas e com dimensões compatíveis e a sua resposta

impulsiva dada por

$$g(t) = \begin{cases} Ce^{At}B, & \forall t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad (81)$$

pertencente ao conjunto \mathcal{G} . Seja γ_0 a margem de estabilidade de $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ e seja λ_0 a margem de estabilidade da matriz A , que corresponde a algum elemento específico dentro do conjunto Σ . Assume-se que as margens de estabilidade

$$\bar{\gamma}_0 := \inf_{\Sigma} \gamma_0, \quad \bar{\lambda}_0 := \inf_{\Sigma} \lambda_0, \quad (82)$$

são finitas e todas as respostas impulsivas $g(t) \in \mathcal{G}$ são limitadas pela função envoltória

$$\bar{g}(t) = \sup_{\mathcal{G}} \|g(t)\|, \quad (83)$$

que é uniformemente limitada, i.e., $\bar{g}(t) \leq g_{\text{sup}} < +\infty, \forall t \geq 0$. Seja $\gamma_1 := \bar{\gamma}_0 - \delta$ com $\delta > 0$ uma constante arbitrária. Seja $\bar{u}(t)$ um majorante instantâneo para $u(t)$, i.e., $\|u(t)\| \leq \bar{u}(t), \forall t \geq 0$. Então, $\exists c_1, c_2 > 0$ tais que qualquer resposta impulsiva $g(t) \in \mathcal{G}$ satisfaça $\|g(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t}$ e as inequações

$$\|g(t) * u(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t} * u(t), \quad (84)$$

$$\|y(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma_1 t} * \bar{u}(t) + c_2 e^{-(\bar{\lambda}_0 - \delta)t} \|x(0)\|, \quad (85)$$

serão satisfeitas $\forall t \geq 0$ por qualquer sistema pertencente ao conjunto Σ .

Prova: este teorema é provado através da aplicação do Teorema 2.1 aplicado a cada sistema pertencente ao conjunto Σ . \square

Neste teorema nota-se que a determinação da envoltória $\bar{g}(t)$ é a chave para a síntese de FOAFs para sistemas incertos, o que será desenvolvido nas próximas seções.

4.1 Período de Amostragem e Horizonte de busca

De forma análoga à síntese de FOAFs para sistemas com parâmetros conhecidos desenvolvida no Capítulo 2, a determinação da envoltória $\bar{g}(t)$ será realizada num horizonte de tempo finito $[0, t_f]$ em instantes de tempo amostrados.

Para reduzir o tempo computacional e obter a envoltória é necessário especificar valores adequados para o período de amostragem e para a região de busca da resposta impulsiva (CUNHA et al. 2008). Baseando-se nas frequências naturais do sistema, pode-se escolher valores recomendáveis para o período de amostragem h e para o horizonte de busca $k_f = t_f/h$ através das equações

$$h = \frac{\epsilon_1}{\max_{j,\Sigma} \{|\lambda_j|\}}, \quad k_f = \text{int} \left(0,5 + \frac{h_0}{h\bar{\gamma}_0} \right), \quad (86)$$

onde $\{\lambda_j\}$ são os autovalores de A , $\epsilon_1 > 0$ estabelece a resolução da região de busca, $h_0 > 0$ define o horizonte de busca e a função $\text{int}(\cdot)$ retorna a parte inteira. O limite superior $\epsilon_1 > \pi$ possibilita a reconstrução de $g(t)$ através das suas amostras, o que pode ser concluído pelo *Teorema da Amostragem* aplicado ao pior caso, i.e., um par de autovalores complexos conjugados que tenha uma frequência natural grande com baixo fator de amortecimento, resultando em oscilações senoidais. Por outro lado, o horizonte de busca deve ser grande o suficiente ($h_0 \gg 1$) para possibilitar a avaliação do efeito de modos naturais lentos.

CUNHA et al. (2008) sugeriram $\epsilon_1 = 0,1$ e $h_0 = 5$ que costumam dar bons resultados com custo computacional aceitável.

4.2 Determinação da Envoltória por Busca Exaustiva

O método de *busca exaustiva*, também denominado *força bruta*, consiste em calcular muitas normas de respostas impulsivas admissíveis variando-se gradualmente todos os parâmetros incertos do sistema de interesse.

Para realizar a busca dos pontos da envoltória $\bar{g}(kh)$ ($k = 0, \dots, k_f$), o algoritmo baseado em busca exaustiva em grade é apresentado na Tabela 4. O passo de busca $\alpha_{\text{passo } i} > 0$, é definido conforme a necessidade do refinamento da envoltória. O número de vezes que a resposta impulsiva $g(kh, \alpha)$ é computada é dado por

$$\bar{n} = \prod_{i=1}^q n_i, \quad n_i = \frac{\alpha_{\text{max } i} - \alpha_{\text{min } i}}{\alpha_{\text{passo } i}} + 1. \quad (87)$$

de onde se conclui que, se $\alpha_{\text{passo } i} = \alpha_{\text{passo}} \forall i \in \{1, \dots, q\}$, então o número de ciclos computacionais é da ordem $\mathcal{O}(\alpha_{\text{passo}}^{-q})$. Portanto, não se deve escolher α_{passo} muito pequeno pois o tempo computacional para obter a envoltória cresceria exageradamente.

Tabela 4 - Algoritmo de força bruta para encontrar a envoltória da norma de respostas impulsivas. A resposta impulsiva $g(kh, \alpha)$ é calculada no intervalo $0 \leq k \leq k_f$ e representada por $g(\cdot, \alpha)$.

```

início
 $\bar{g}(\cdot) = [0, \dots, 0]$ 
para  $\alpha_1$  de  $\alpha_{\min 1}$  até  $\alpha_{\max 1}$  faça
  para  $\alpha_2$  de  $\alpha_{\min 2}$  até  $\alpha_{\max 2}$  faça
    :
    para  $\alpha_q$  de  $\alpha_{\min q}$  até  $\alpha_{\max q}$  faça
      calcule  $\|g(\cdot, \alpha)\|$ 
       $\bar{g}(\cdot) = \max(\bar{g}(\cdot), \|g(\cdot, \alpha)\|)$ 
       $\alpha_q = \alpha_q + \alpha_{\text{passo } q}$ 
    fim do para
  :
   $\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_{\text{passo } 2}$ 
  fim do para
   $\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_{\text{passo } 1}$ 
fim do para
fim

```

Como exemplo, considera-se o sistema com função de transferência

$$G_3(s) = \frac{(s + 2)^2}{(s + \alpha_1)(s + 2 + \alpha_2 j)(s + 2 - \alpha_2 j)}, \quad (88)$$

com parâmetros incertos α_1 e α_2 pertencentes aos intervalos $2 \leq \alpha_1 \leq 5$ rad/s e $5 \leq \alpha_2 \leq 10$ rad/s.

Para mostrar a necessidade de um número grande de buscas para obter uma envoltória aceitável, toma-se como exemplo a evolução da envoltória com três iterações (Figura 16) e seis iterações (Figura 17).

Nessas figuras observa-se que quanto maior o número de buscas melhor será a envoltória obtida. No entanto, deve-se reduzi-las para que o tempo e o trabalho computacional não sejam muito grandes. Então, para diminuir o tempo computacional e obter uma envoltória adequada, calculam-se os valores de h e k_f considerando que os valores nominais dos parâmetros do sistema sejam $\alpha_1 = 2$ rad/s e $\alpha_2 = 5$ rad/s. Com $\epsilon_1 = 0,1$ e $h_0 = 2,5$, tem-se, a partir de (86), $h = 0,02$ s, $k_f = 150$ e $t_f = 3$ s.

Computando-se a envoltória através do algoritmo na Tabela 4 com $\alpha_{\min 1} = 2$ rad/s, $\alpha_{\max 1} = 5$ rad/s, $\alpha_{\text{passo } 1} = 0,02$ rad/s, $\alpha_{\min 2} = 5$ rad/s, $\alpha_{\max 2} = 10$ rad/s e $\alpha_{\text{passo } 2} = 0,2$ rad/s, obtém-se a envoltória apresentada na Figura 18. Neste caso, o número de vezes

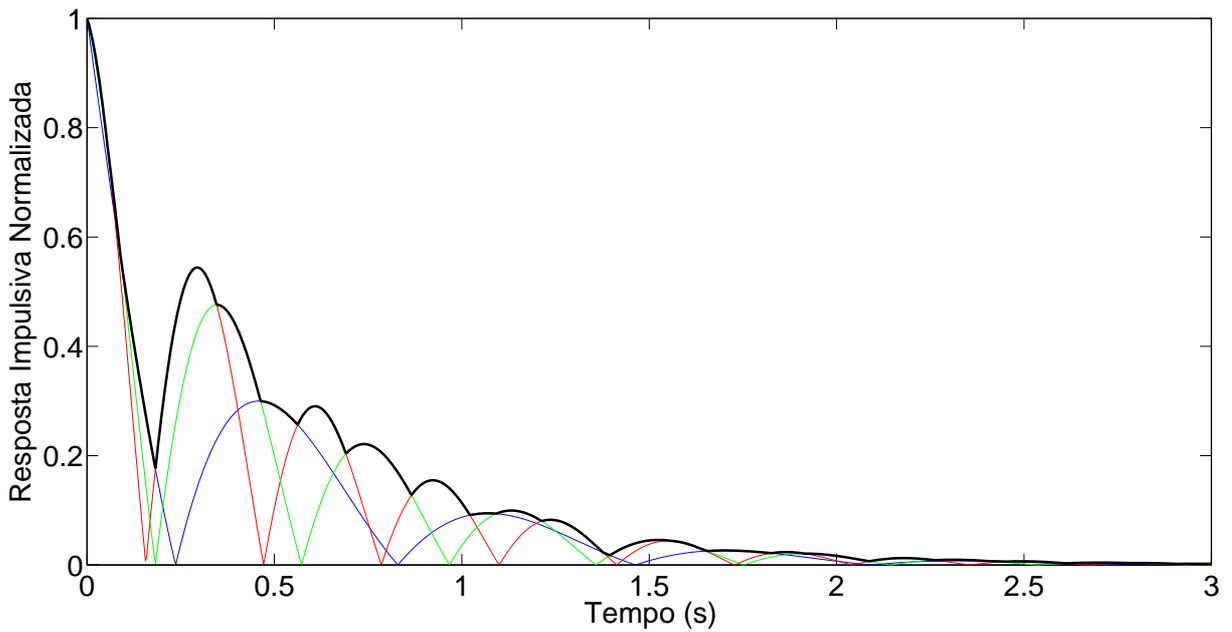


Figura 16 - Envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) com três iterações.

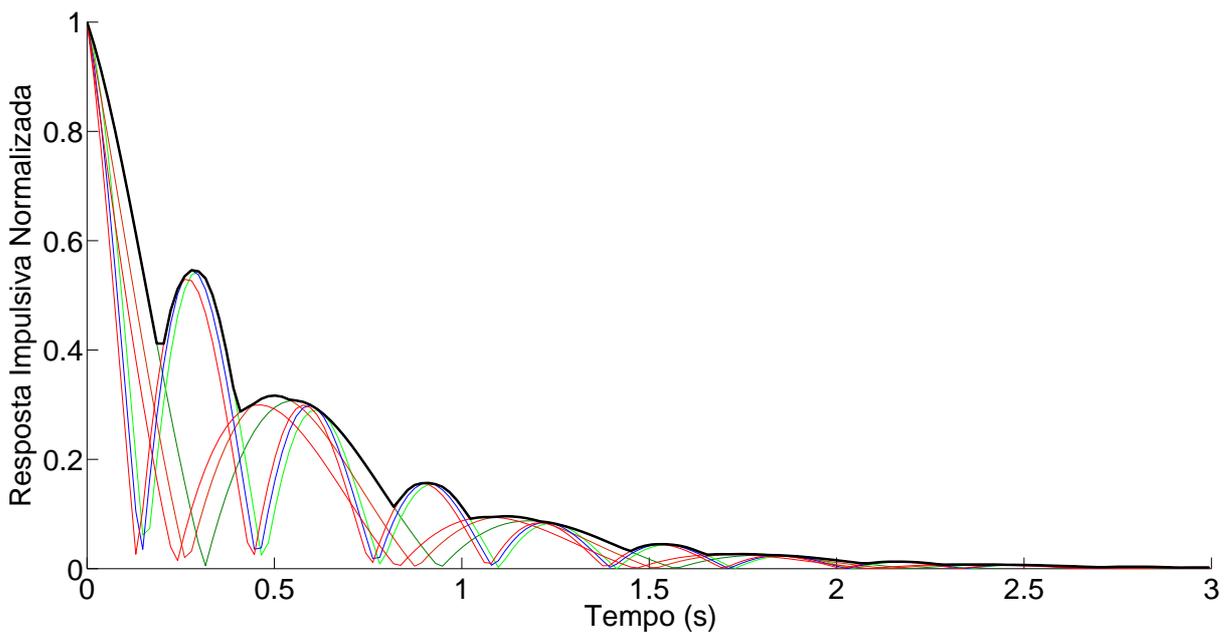


Figura 17 - Envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) com seis iterações.

que a resposta impulsiva é computada é $\bar{n} = 3926$, conforme a equação (87).

4.3 Determinação da Envoltória por Algoritmos Genéticos

Outra forma de se obter a envoltória da norma da resposta impulsiva de um sistema é maximizando-a por AG. Para isto, três métodos foram desenvolvidos para a sua determinação. Como forma de comparação, os três métodos serão aplicados no sistema

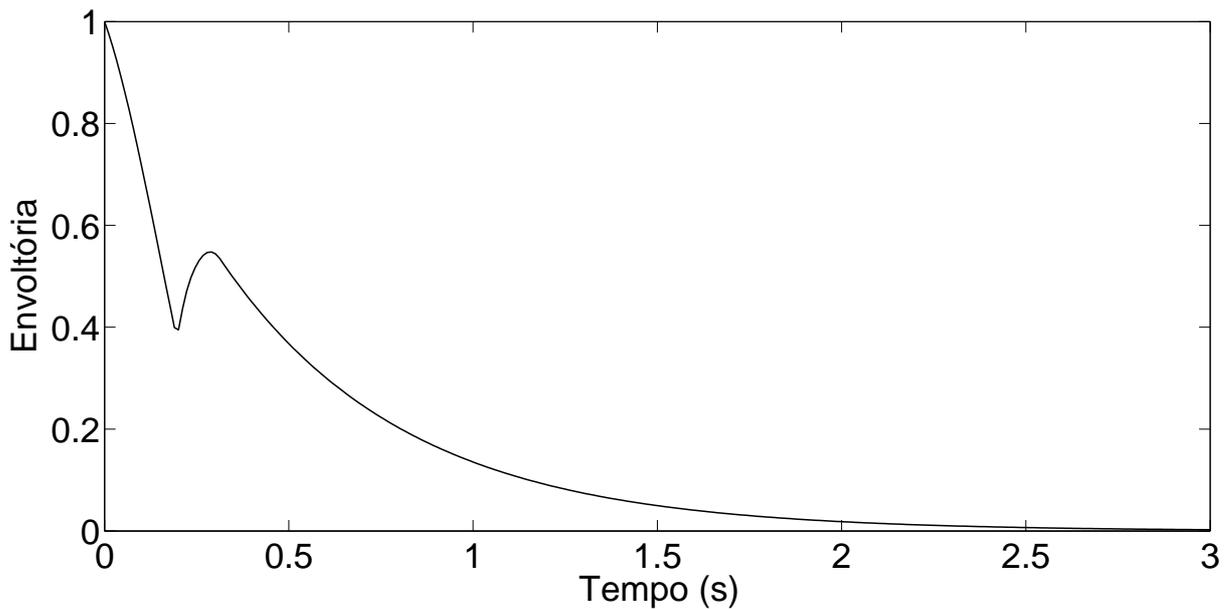


Figura 18 - Envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) obtida por força bruta.

(88).

Foi utilizado como ferramenta o TOOLBOX de algoritmos genéticos do MATLAB versão 7.7.0.471 (R2008b).

Após inúmeros ajustes, os parâmetros utilizados para a inicialização do AG para os três métodos de determinação da envoltória, são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Parâmetros do AG para determinação da envoltória.

População inicial	100 indivíduos
Taxa de cruzamento uniforme	90%
Taxa de elitismo	2 indivíduos
Operador de seleção	roleta
Operador de mutação	uniforme
Critérios de parada	
Máximo número de gerações	100
Máximo número de gerações sem evolução (<i>stall generations</i>)	35
Tolerância da função aptidão (<i>function tolerance</i>)	10^{-6}

4.3.1 Primeiro método

Como visto no Capítulo 3, o AG pode ser usado para buscar o valor escalar máximo de uma função objetivo. Baseando-se neste conceito, não seria possível obter a envoltória das respostas impulsivas de uma só vez, já que a envoltória é composta pelos máximos

de um conjunto de respostas impulsivas em um horizonte de tempo. Porém, se em vez de maximizar o conjunto, a função for maximizada a cada instante $t = kh$, pode-se definir o intervalo de busca a ser otimizado pelo AG como $0 \leq k \leq k_f$. A partir das equações (81) e (83), pode-se obter a função objetivo

$$\|g(kh)\| = \|Ce^{Akh}B\|, \quad (89)$$

que deve ser maximizada para obter a envoltória. Os limites superiores ($\alpha_{\max i}$) e inferiores ($\alpha_{\min i}$) dos parâmetros do sistema são aplicados no AG para que uma população inicial com valores dos parâmetros entre estes extremos seja criada. A partir do instante $kh = 0$, o AG fará a maximização da função objetivo (89) a cada instante kh até atingir o horizonte $t_f = k_f h$, conforme o algoritmo na Tabela 6.

Tabela 6 - Algoritmo do primeiro método para determinar a envoltória. A otimização (max) é realizada por um algoritmo genético.

início
para $k = 0$ até k_f faça
$\bar{g}(kh) = \max_{\mathcal{G}}(\ g(kh)\)$
$k = k + 1$
fim do para
fim

Este método mostrou-se ineficiente pois consome bastante tempo computacional uma vez que para cada instante kh o AG fará a maximização da resposta impulsiva. Se a obtenção do máximo de um ponto da envoltória demandar em média o tempo computacional t_m , então para obter toda a envoltória o tempo total será $(k_f + 1)t_m$.

A Figura 19 apresenta a envoltória da resposta impulsiva do sistema com função de transferência (88) obtida por este método. Nota-se que é muito semelhante à envoltória obtida por força bruta apresentada na Figura 18.

Para este método seria inviável ilustrar o gráfico de convergência da função aptidão, pois para cada instante kh ter-se-ia um gráfico. Então, um instante $t = 0,3$ s foi escolhido para mostrar a convergência. Na Figura 20 verifica-se que a função aptidão $\|g(0,3)\|$ converge para o valor máximo em aproximadamente 50 gerações. Para outros instantes de tempo, o número de gerações pode variar.

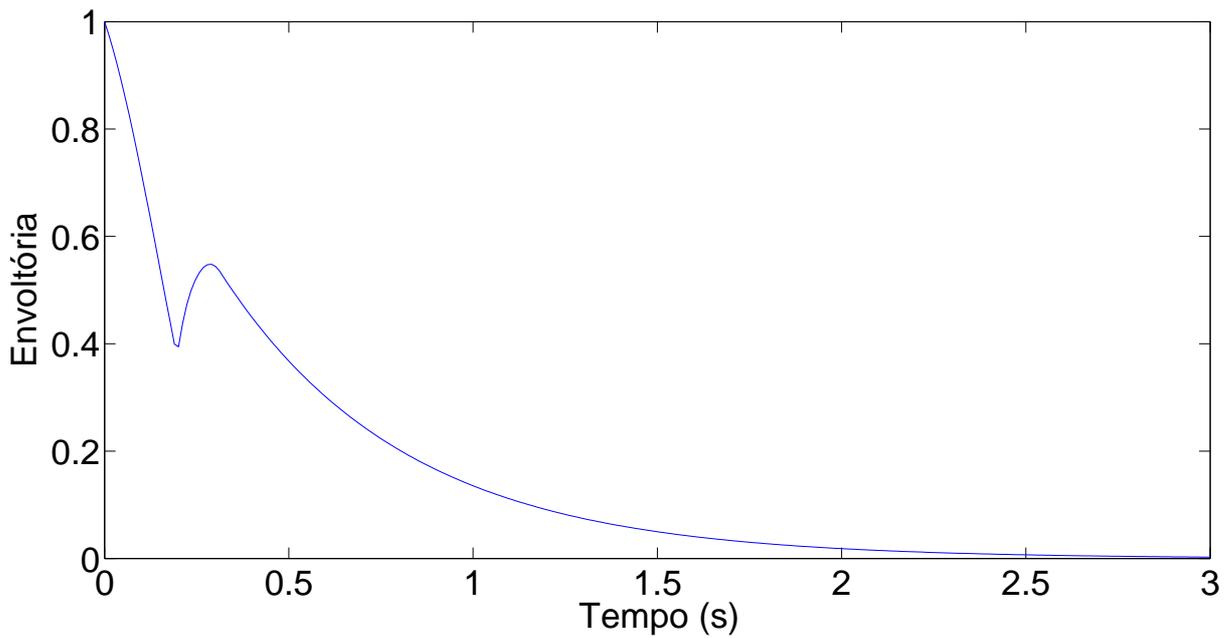


Figura 19 - Envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) obtida pelo primeiro método baseado em algoritmo genético.

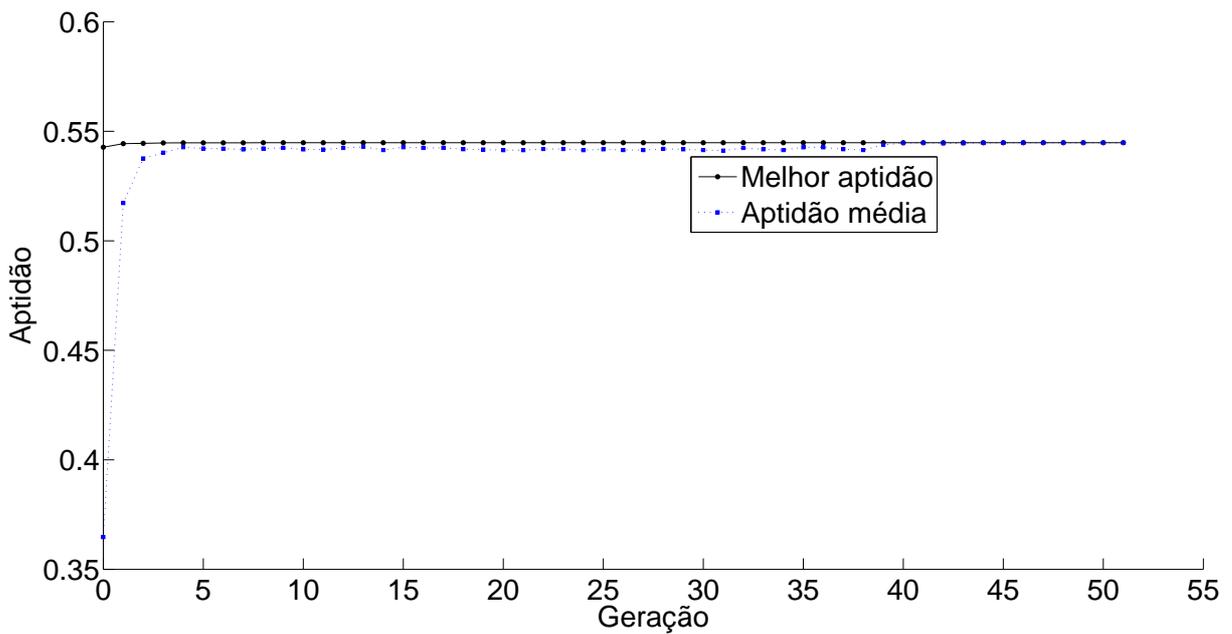


Figura 20 - Evolução da função aptidão para a envoltória da resposta impulsiva de (88) no instante $t = 0,3$ s obtida pelo primeiro método baseado em algoritmo genético.

4.3.2 Segundo método

O primeiro método mostrou-se eficaz porém ineficiente devido ao tempo computacional muito grande para a obtenção da envoltória. Para reduzir o tempo computacional, criou-se um novo método onde os parâmetros calculados pelo AG irão

servir de modo recursivo como novos parâmetros para o próximo cálculo do AG, conforme é descrito a seguir.

Seja um horizonte de tempo t_f onde as respostas impulsivas admissíveis serão consideradas no intervalo $0 \leq t \leq t_f$. Definido-se o tempo de pico t_{p_i} como um dos parâmetros a serem determinados pelo AG, a otimização é formulada como

$$\bar{g}(t_{p_0}) = \max_{\substack{g(t) \in \mathcal{G} \\ t \in [0, t_f]}} (\|g(t)\|), \quad (90)$$

$$\bar{g}(t_{p_i}) = \max_{\substack{g(t) \in \mathcal{G} \\ t \in [t_{p_{(i-1)}} + h, t_f]}} (\|g(t)\|), \quad i = \{1, 2, \dots\}. \quad (91)$$

Após o cálculo do primeiro máximo do conjunto de repostas impulsivas, tem-se o instante do primeiro pico t_{p_0} , que será utilizado na próxima execução do AG, quando um novo intervalo de tempo será definido somando-se o intervalo de tempo h a t_{p_0} . Genericamente, o novo intervalo é escrito $t_{p_{i-1}} + h \leq t \leq t_f$ e repetido até que $t_{p_{i-1}} + h > t_f$, conforme o algoritmo na Tabela 7.

Tabela 7 - Algoritmo do segundo método para determinar a envoltória. A otimização (max) é realizada por um algoritmo genético.

$t_{p_{(i-1)}} = -h$ $i = 0$ <p>enquanto $t_{p_{(i-1)}} + h \leq t_f$ faça</p> $\bar{g}(t_{p_i}) = \max_{\substack{g(t) \in \mathcal{G} \\ t \in [t_{p_{(i-1)}} + h, t_f]}} (\ g(t)\)$ $i = i + 1$ <p>fim do enquanto</p>
--

A Figura 21 ilustra a convergência do valor máximo da função aptidão para o instante $t = 0,3$ s. Pelo gráfico verifica-se que a função aptidão converge para o valor máximo em aproximadamente 50 gerações.

A Figura 22 apresenta a envoltória obtida pelo algoritmo apresentado na Tabela 7 com $h = 0,02$ s. Nota-se que esta envoltória é sempre decrescente e, por isso, superestimada devido ao segundo algoritmo só detectar os picos máximos. Comparando-se a Figura 22 com a Figura 18 e a Figura 19, observa-se que a envoltória esperada seria aquela representada pela linha tracejada na Figura 22. Isto ocorre porque ao variar a janela de busca não se garante a resolução da envoltória (h).

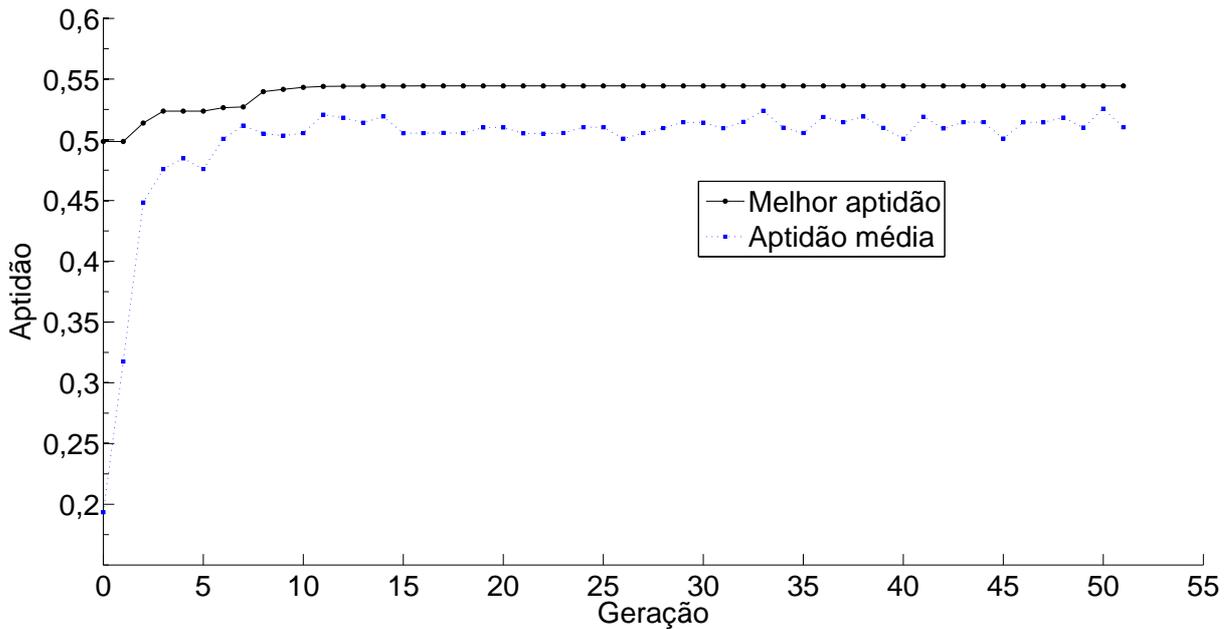


Figura 21 - Função aptidão no instante $t_{p_{i-1}} = 0,3$ s da envoltória da resposta impulsiva de (88) obtida pelo segundo método baseado em algoritmo genético.

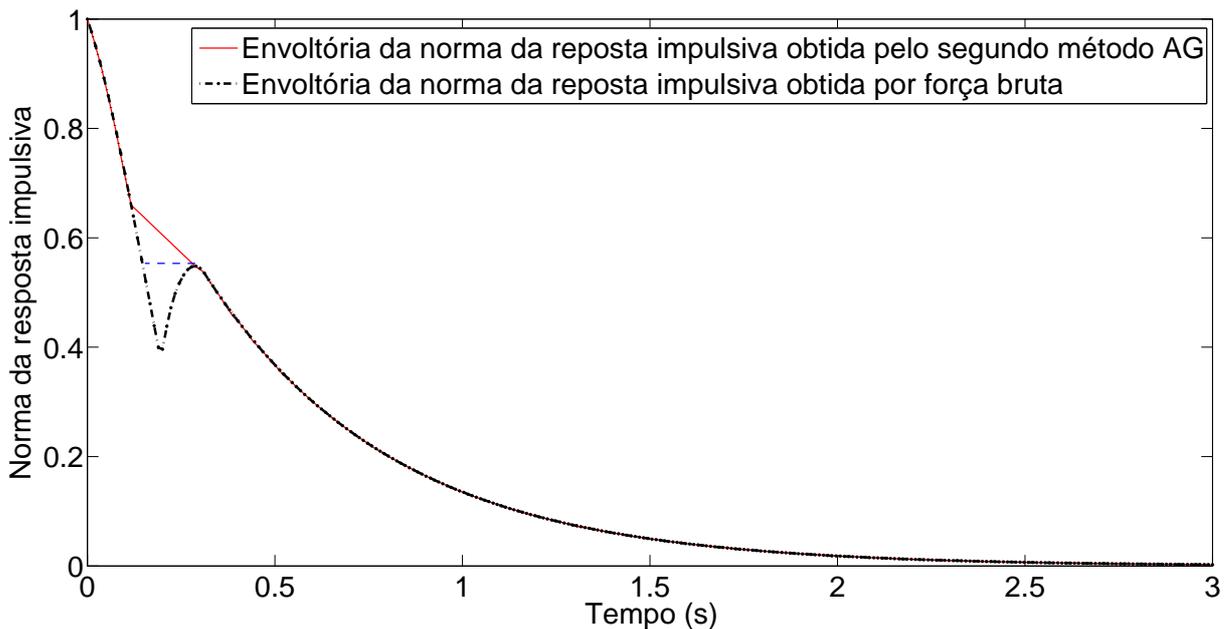


Figura 22 - Envoltória da resposta impulsiva de (88) obtida pelo segundo método baseado em algoritmo genético. Em linha pontilhada é apresentada a envoltória por força bruta. A linha tracejada indica o que seria esperado obter pelo AG.

4.3.3 Terceiro Método

Os métodos usados até agora para obter a envoltória consistem em calcular o máximo da norma da resposta impulsiva para a envoltória em cada instante amostrado.

O método descrito a seguir utiliza a evolução para toda a resposta impulsiva em um intervalo de tempo finito $0 \leq kh \leq k_f h$. Uma vez que o resultado é uma sequência (vetor) em tempo discreto, é necessário que cada ponto da resposta impulsiva atual seja comparado com a envoltória anterior e somente o maiores valores serão mantidos. A envoltória evoluída é dada por

$$\bar{g}_i(kh) = \max\{\bar{g}_{i-1}(kh), \|g_i(kh)\|\}, \quad (92)$$

$\forall k \in \{0, 1, \dots, k_f\}$ e $i = 1, 2, \dots$. A envoltória inicial é nula, ou seja, $\bar{g}_0(kh) = 0$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, k_f\}$.

Um valor escalar tem que ser atribuído à aptidão a fim de orientar o AG. Para isto, a evolução é obtida pela diferença entre a norma da resposta impulsiva atual e a anterior, conforme

$$\Delta\bar{g}_i(kh) = \|\bar{g}_i(kh)\| - \bar{g}_{i-1}(kh), \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, k_f\} \quad \text{e} \quad i = 1, 2, \dots \quad (93)$$

Nota-se que $\Delta\bar{g}_i(kh) \geq 0$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, k_f\}$ e $i = 1, 2, \dots$. Então, pode-se escolher como *função aptidão* a norma da evolução da envoltória (93) dada por

$$F = \beta\|\Delta\bar{g}_i(kh)\|_1 + (1 - \beta)\|\Delta\bar{g}_i(kh)\|_\infty, \quad (94)$$

na qual $\beta \in [0, 1]$ é o peso que permite combinar a *norma um* ($\|\cdot\|_1$) com a *norma infinita* ($\|\cdot\|_\infty$).

A Figura 23 ilustra que a função aptidão segue um padrão para majorar toda envoltória, e em aproximadamente 70 gerações chega-se à convergência. Neste caso, a função aptidão indica a evolução da envoltória, que naturalmente é reduzida na medida em que a envoltória atual se aproxima da envoltória final. O critério de parada é o erro máximo permitido que é igual 10^{-6} . A Figura 24 ilustra as envoltórias obtidas por três combinações das normas. A Figura 25 mostra em detalhe que para este exemplo não há muita diferença nos resultados obtidos entre as combinações das normas.

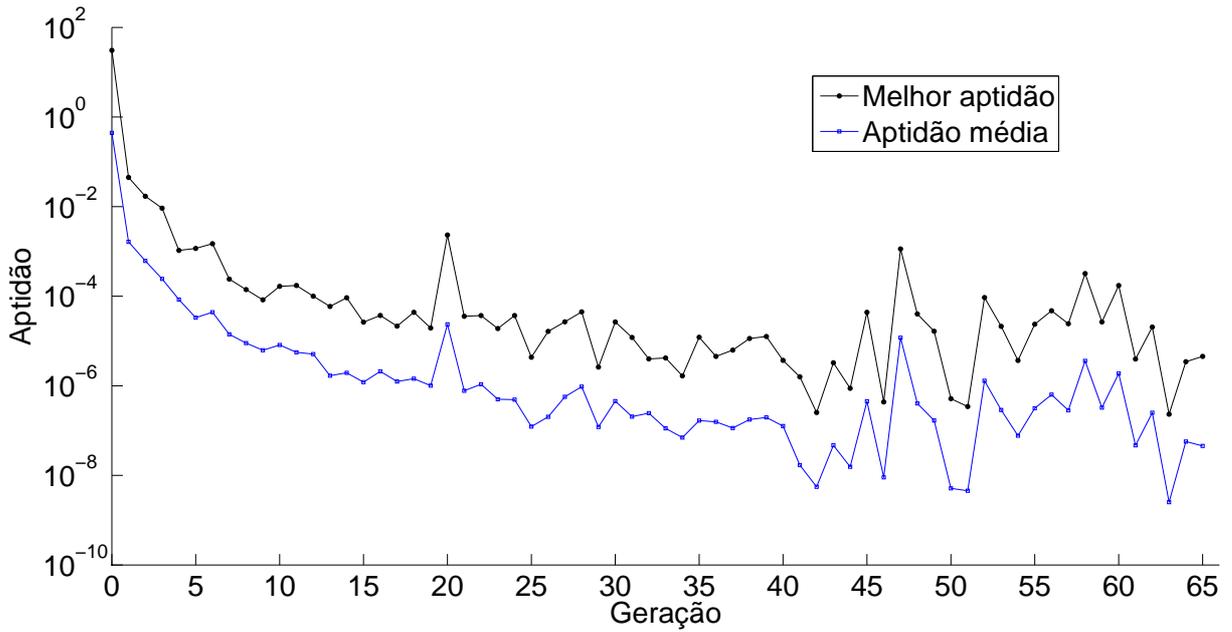


Figura 23 - Função aptidão durante a determinação da envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) obtida pelo terceiro método baseado em algoritmo genético.

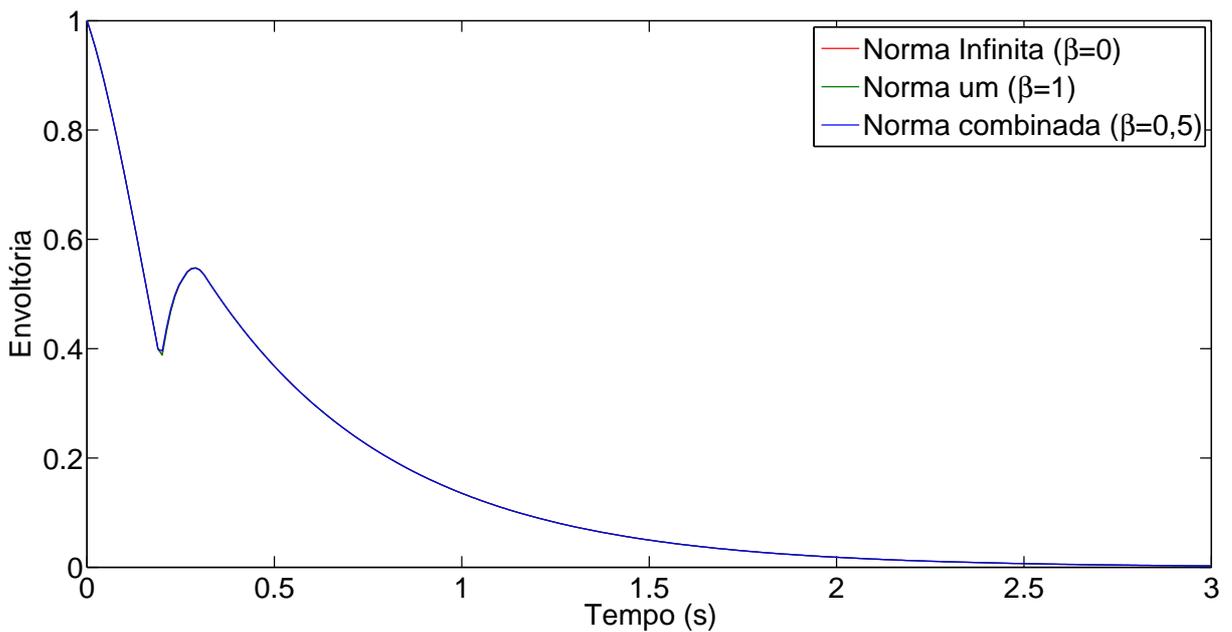


Figura 24 - Envoltórias da norma da resposta impulsiva de (88) obtida pelo terceiro método baseado em algoritmo genético. Utilizou-se três normas diferentes para calcular a aptidão (94).

4.3.4 Comparação dos três métodos

No final da avaliação, um método foi o mais eficiente, pois foi o que obteve melhores resultados em menos tempo de computação. E o mesmo será comparado com o método tradicionalmente utilizado da força bruta. Para comparação, o tempo de execução de cada

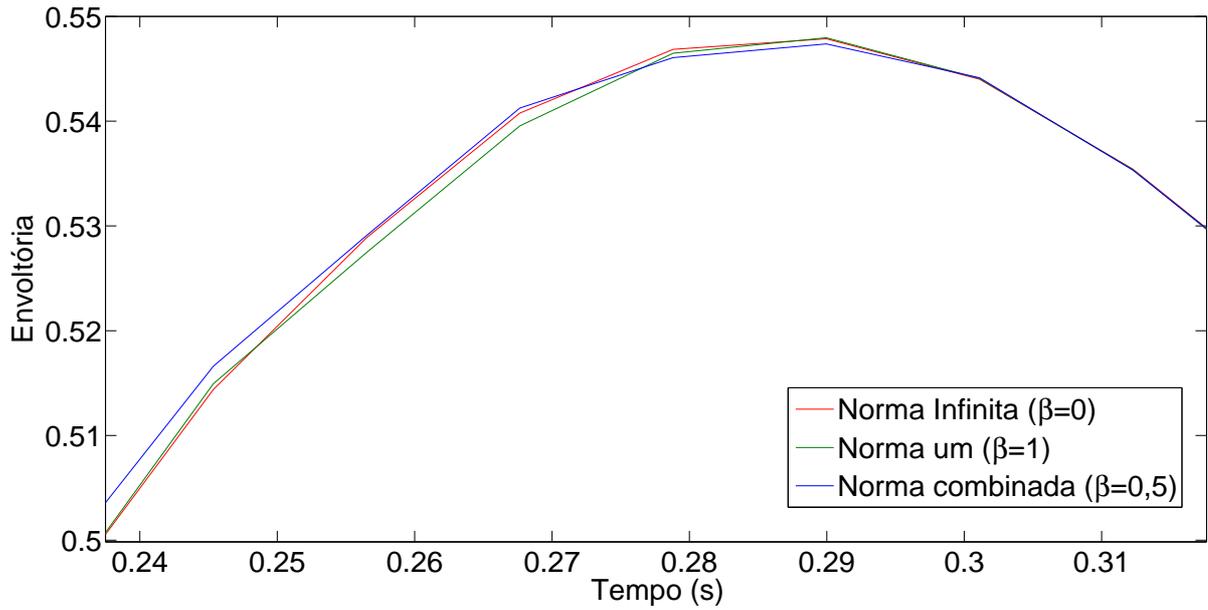


Figura 25 - Detalhamento da envoltória da norma da resposta impulsiva de (88) obtida pelo terceiro método baseado em algoritmo genético. Utilizou-se três normas diferentes para calcular a aptidão (94).

método foi medido. Para cada método o algoritmo foi aplicado seis vezes para o mesmo exemplo e uma média dos tempos é mostrada na Tabela 8. Nota-se que, para cada método, há uma redução no tempo de determinação da envoltória. A quantidade de iterações em cada método, varia porque o primeiro método realiza uma otimização para cada ponto da envoltória, no segundo há uma otimização para cada janela de tempo e no último a otimização é realizada simultaneamente para toda envoltória simultaneamente. A Tabela 8 também mostra a quantidade de iterações para cada método, ou seja, a quantidade de vezes em que a função aptidão foi calculada.

Tabela 8 - Tabela de comparação entre o algoritmo de força bruta e os métodos baseados em AG.

Métodos	Tempo Mínimo (s)	Tempo médio (s)	Tempo máximo (s)	Iterações	$\ \bar{g}(kh)\ _1$
Força bruta	30,77	31,38	32,72	3926	42,20
Primeiro AG	449,79	451,16	463,53	1404100	42,21
Segundo AG	241,75	246,91	252,23	762700	–
Terceiro AG	30,95	36,16	41,06	3900	42,16

Nesta Tabela 8, a qualidade da envoltória pode ser avaliada pela norma da envoltória

$$\|\bar{g}(kh)\|_1 := |\bar{g}(0)| + |\bar{g}(h)| + \dots + |\bar{g}(k_f h)|, \quad (95)$$

ou seja, quanto maior o valor da norma melhor será sua qualidade. Nota-se que o terceiro

método proposto não obteve a melhor envoltória nem foi o mais rápido, pois neste exemplo o número de parâmetros incertos é pequeno. Porém, o terceiro método mostrou-se mais eficiente para um sistema que possui mais parâmetros incertos apresentado no Capítulo 6.

5 APROXIMAÇÕES POR FILTROS DE ORDEM SUPERIOR

O uso de filtros em controle por modo deslizante pode ter diversos fins como: filtragem de perturbações, redução do *chattering* e na modulação do sinal de controle.

Filtros de primeira ordem já foram utilizados com sucesso por CUNHA et al. (2008) para realizar a modulação do sinal de controle. A modulação tem como objetivo reduzir a amplitude do sinal de controle, reduzindo o consumo de energia e o *chattering* no sistema mantendo-se a robustez. O projeto de FOAFs a partir da envoltória pode ser realizado por métodos de otimização convexa.

Tendo em vista reduzir ainda mais a amplitude das funções de modulação, aqui se propõe o projeto de filtros de ordem superior a um. Uma vez que este novo problema pode recair em otimização não-convexa, serão utilizados algoritmos genéticos.

Outros pesquisadores também utilizam filtros de ordem superior como estimadores de perturbações não modeladas no sistema (SHENDGE & PATRE 2007) e (SHENDGE, SURYAWANSHI & PATRE 2010). Neste caso usa-se o filtro para reduzir o efeito de perturbações no sistema como forma de melhorar o desempenho de um controlador por modo deslizante. Os resultados obtidos utilizando filtros como estimadores são satisfatórios para o que foi proposto.

5.1 Aproximações por Filtros de Ordem Superior com Polos Reais

Os filtros de aproximações de ordem superior (*higher order approximation filters* – HOAFs) são generalizações dos filtros de primeira ordem que satisfazem condições similares àsquelas dos Teoremas 2.1 e 4.1. Então, é possível representar o HOAF de ordem \bar{n} com polos reais como:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}}_1(t) &= -\gamma_1 \bar{y}_1(t) + c_1 \|u(t)\|, \\ &\vdots \\ \dot{\bar{y}}_{\bar{n}}(t) &= -\gamma_{\bar{n}} \bar{y}_{\bar{n}}(t) + c_{\bar{n}} \|u(t)\|, \end{aligned} \tag{96}$$

$$\bar{y}(t) = \dot{\bar{y}}_1(t) + \dots + \dot{\bar{y}}_{\bar{n}}(t), \tag{97}$$

onde $\gamma_i > 0$ e $c_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, \bar{n}$). O sinal de saída do HOAF deve satisfazer $\bar{y}(t) \geq \|g(t) * u(t)\|$, $\forall t \geq 0$, excluindo-se os efeitos das condições iniciais.

As *margens de estabilidade* definidas na Seção 2.1.1 também servem para o caso geral.

Definição 5.1. *O filtro com função de transferência*

$$F(s) = \frac{c_1}{s + \gamma_1} + \frac{c_2}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{c_{\bar{n}}}{s + \gamma_{\bar{n}}}, \quad (98)$$

e resposta impulsiva

$$\bar{f}(t) = c_1 e^{-\gamma_1 t} + c_2 e^{-\gamma_2 t} + \dots + c_{\bar{n}} e^{-\gamma_{\bar{n}} t}, \quad t > 0, \quad (99)$$

com constantes $c_i \in \mathbb{R}$ e $\gamma_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, \bar{n}$) é um HOAF da matriz de transferência estritamente própria e estável $G(s)$ se a desigualdade

$$\bar{g}(t) \leq \bar{f}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (100)$$

for satisfeita, onde $\bar{g}(t)$ é a envoltória definida em (83).

Uma vez que a envoltória $\bar{g}(kh)$ tenha sido determinada, pode-se formular a função escalar para a aptidão do filtro (99)

$$\Delta \mathcal{H} = \|\bar{f}(\cdot) - \bar{g}(\cdot)\|_1, \quad (101)$$

que deve ser minimizada pelo algoritmo genético tendo-se em vista a minimização do ganho DC, condicionada ao atendimento da desigualdade (100).

O ganho DC de um filtro é proporcional à área da sua resposta impulsiva, então a minimização será feita através da diferença entre a área da envoltória e a área da resposta impulsiva do filtro. Para obter a área, a *norma um* será utilizada por ser proporcional à área.

A inicialização do AG na síntese dos filtros de ordem superior é apresentada na Tabela 9. O algoritmo proposto para a síntese do filtro é descrito na Tabela 10.

Para exemplificar o algoritmo proposto acima, considera-se a função de

Tabela 9 - Parâmetros do AG para determinação da filtro.

População inicial	300 indivíduos
Taxa de cruzamento uniforme	90%
Taxa de elitismo	2 indivíduos
Operador de seleção	roleta
Operador de mutação	uniforme

Critérios de parada	
Máximo número de gerações	100
Máximo número de gerações sem evolução (<i>Stall generations</i>)	50
Tolerância da função aptidão (<i>function tolerance</i>)	10^{-6}

Tabela 10 - Algoritmo genético para síntese de filtros de ordem superior.

$\begin{aligned} &\text{minimize } \Delta\mathcal{H} = \ f(\cdot) - \bar{g}(\cdot)\ _1 \\ &\text{se } \exists \bar{g}(\cdot) \geq \bar{f}(\cdot) \text{ faça} \\ &\quad \text{descarte } \bar{f}(\cdot) \\ &\text{fim do se} \end{aligned}$

transferência extraída de (CUNHA 2004):

$$G_3(s) = \frac{(s+7)(s-1+4j)(s-1-4j)}{(s+1)^3(s+0,5+10j)(s+0,5-10j)}. \quad (102)$$

A função de transferência para o filtro de segunda (SOAF) projetado por AG para a função de transferência (102) é

$$F(s) = \frac{0,05922s + 0,8158}{s^2 + 1,525s + 0,4658}, \quad (103)$$

sendo os coeficientes $c_1 = -1,11$, $c_2 = 1,16$, $\gamma_1 = 1,10$ rad/s e $\gamma_2 = 0,42$ rad/s.

A síntese do filtro de terceira ordem (TOAF) é realizada de forma análoga a síntese de filtros de segunda ordem. A função de transferência para o TOAF projetado por AG para a função de transferência (102) é

$$F(s) = \frac{0,02142s^2 + 0,8321s + 0,8817}{s^3 + 2,56s^2 + 2,088s + 0,5306}, \quad (104)$$

sendo os coeficientes $c_1 = -1,63$, $c_2 = 1,75$, $c_3 = -0,097$, $\gamma_1 = 0,95$ rad/s, $\gamma_2 = 0,51$ rad/s e $\gamma_3 = 1,10$ rad/s.

Observando as respostas impulsivas na Figura 26 nota-se que não há muita

diferença entre o SOAF e o TOAF e isto se torna mais evidente nos valores dos seus ganhos DC mostrados na Tabela 11. O tempo de processamento também se torna maior.

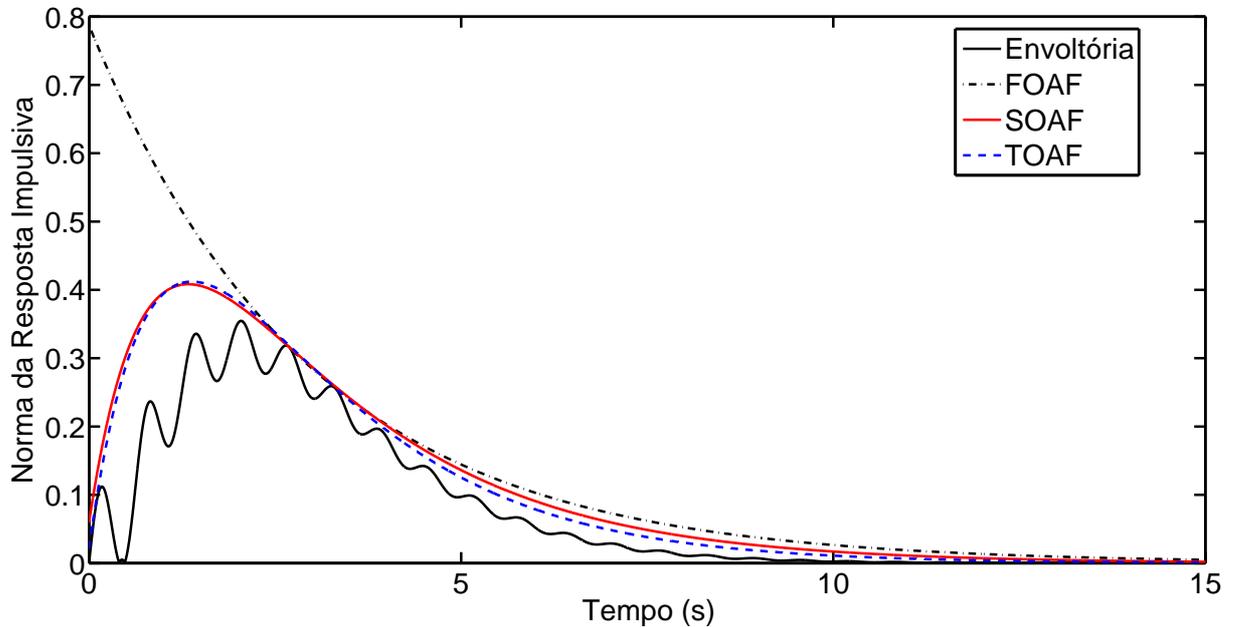


Figura 26 - Resposta impulsiva dos FOAF, SOAF e TOAF sintetizado através de algoritmos genético juntamente com norma da resposta impulsiva de $G_3(s)$ ($|g(t)|$) (102).

Tabela 11 - Comparações entre os filtros FOAF, SOAF e TOAF.

Filtro	Ganho DC	Tempo de Processamento (s)
FOAF	2,32	1,35
SOAF	1,75	98,43
TOAF	1,68	143,26

Pela Tabela 11 pode-se concluir que neste exemplo a diferença entre o FOAF e o SOAF é muito significativa, cerca de 25% de redução no ganho DC. A diferença entre o SOAF e o TOAF é pequena em relação ao ganho DC e o tempo computacional é quase o dobro para sintetizar o TOAF. Assim pode-se concluir que um filtro de segunda ordem seria satisfatório para este sistema. Nota-se ainda que o tempo de processamento para sintetizar o FOAF é muito menor que os tempos demandados pelos HOAFs, pois foi utilizado para o FOAF o método de otimização convexa pela *razão áurea* (CUNHA 2004).

5.2 Aproximação por Filtros de Ordem Superior com Polos Complexos

O uso de filtros de segunda ordem com polos complexos é impossível pois sua resposta impulsiva seria negativa em alguns intervalos de tempo contrariando a restrição (100), uma vez que a envoltória é sempre positiva.

Uma função de transferência para o filtro de terceira ordem com dois polos complexos pode ser da forma

$$F(s) = \frac{c_1 s^2 + c_2 s + c_3}{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)(s + \gamma_2^*)}, \quad (105)$$

na qual $\gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 j$ e $\gamma_2^* = \alpha_1 - \alpha_2 j$ formam um par de polos complexos conjugados.

Sintetizando-se o exemplo (102) um filtro de terceira ordem com polos complexos, obtém-se o TOAF com a função de transferência

$$F(s) = \frac{0,09s^2 + 0,65s + 0,63}{s^3 + 2,22s^2 + 1,58s + 0,37}. \quad (106)$$

Sua resposta impulsiva é ilustrada na Figura 27. Para este exemplo o ganho DC obtido

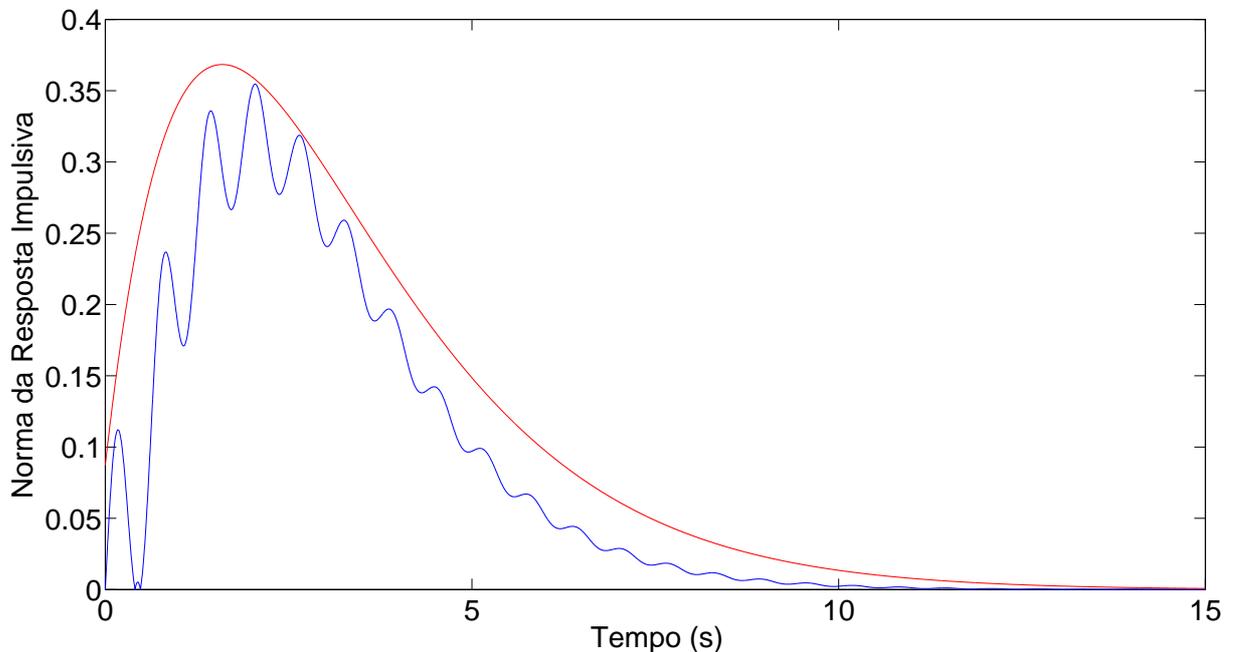


Figura 27 - Resposta impulsiva do TOAF com polos complexos sintetizado através de algoritmos genéticos juntamente com norma da resposta impulsiva de $G_3(s)$ ($|g(t)|$) (102).

é igual a 1,69. Analisando a Figura 27 nota-se que a diferença entre o filtro com polos reais e com polos complexos é pequena. Neste caso, o ganho DC ainda é um pouco maior

que o obtido com o TOAF com pólos reais, que é 1,68 conforme a Tabela 11. Porém há casos em que o filtro de terceira ordem mostra-se melhor.

Para ilustrar a aplicabilidade de filtros com polos complexos, considera-se a função de transferência G_4

$$G_4(s) = \frac{s^2 + 4s + 4}{s^3 + 9s^2 + 49s + 145}. \quad (107)$$

O TOAF com polos complexos projetado por AG possui a função de transferência

$$F(s) = \frac{s^2 + 2,642s + 72,3}{s^3 + 6,687s^2 + 126,1s + 222,1}. \quad (108)$$

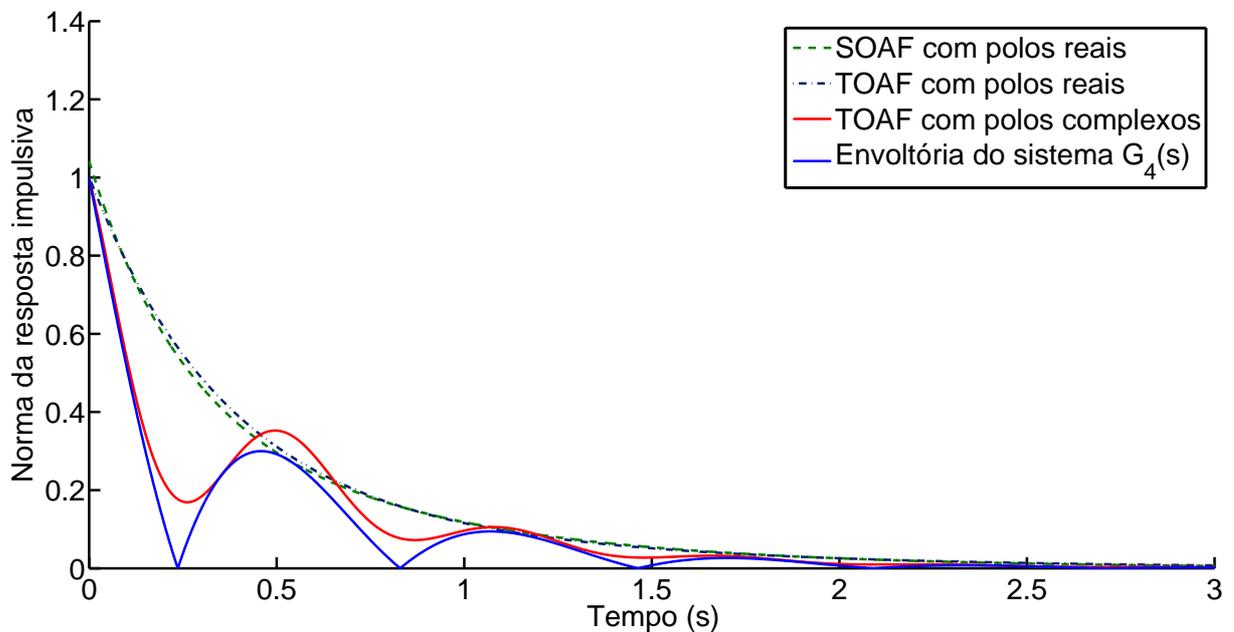


Figura 28 - Resposta impulsiva de SOAF, TOAF com polos reais e com polos complexos sintetizados através de algoritmos genéticos juntamente com norma da resposta impulsiva de $G_4(s)$ ($|g(t)|$) (108).

A Figura 28 apresenta a resposta impulsiva do TOAF com polos complexos comparado a outros filtros. Nota-se que o uso de polos complexos, para certos casos, é melhor se comparado ao uso do SOAF ou TOAF com polos reais. Neste caso, se um FOAF for projetado para o sistema $G_4(s)$, seu ganho DC será maior que o do filtro de terceira ordem com polos complexos.

6 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Neste capítulo será apresentada a aplicação dos conceitos descritos nos Capítulos 4 e 5 em um exemplo de sistema de controle. Respectivamente estes capítulos descrevem como obter a envoltória e projetar um filtro de ordem superior utilizando algoritmos genéticos. Neste capítulo usa-se como exemplo o sistema dinâmico apresentado em CUNHA et al. (2008), o controle para o modelo de referência de um motor de corrente contínua que aciona uma haste flexível.

6.1 Controle por Modelo de Referência e Modo Deslizante

Nesta seção será apresentada uma introdução ao modelo de referência para controle por modo deslizante e mostra a aplicação do filtro no projeto. Para simplificar a apresentação, o sistema a ser controlado possui uma entrada e uma saída (*single-input-single-output*) (SISO) é linear e está representado na forma regular:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}y_p, \quad (109)$$

$$\dot{y}_p = A_{21}x_1 + A_{22}y_p + K_p u_p, \quad (110)$$

na qual $y_p \in \mathbb{R}$ é o sinal de saída, $x_p = [x_1^T, y_p]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, e $u_p \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle. Somente o sinal de saída y_p é medido. As matrizes A_{ij} e a de ganho de alta frequência $K_p > 0$ são incertos. Uma vez que o sistema está na forma regular, a função de transferência de u_p para y_p possui grau relativo um. Assume-se que A_{11} é uma matriz Hurwitz, o que implica que o sistema (109) e (110) é de fase mínima. Essa propriedade é fundamental para o controle por modelo de referência (IOANNOU & SUN 1996).

O modelo de referência é definido por

$$\dot{y}_M = A_M y_M + K_M r(t), \quad (111)$$

com $y_M \in \mathbb{R}$ sendo o sinal de saída, $A_M < 0$, e $K_M > 0$. O sinal de referência $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo por partes e uniformemente limitado. O modelo de referência escolhido tem função de transferência $K_M/(s - A_M)$, que possui grau relativo um, o mesmo grau relativo

do sistema (109) e (110).

O objetivo do controle é obter a convergência assintótica do erro de saída

$$e(t) = y_p(t) - y_M(t) \quad (112)$$

para zero.

6.1.1 Controle por Modelo de Referência Linear

Se o sistema não possuir perturbações, a lei de controle linear que iguala a função de transferência do sistema em malha fechada ao modelo de referência é dada por

$$\dot{\hat{x}} = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}y_p, \quad (113)$$

$$\dot{y}_p = K_p^{-1}[A_M y_p + K_M r - (A_{21}\hat{x}_1 + A_{22}y_p)]. \quad (114)$$

O estado $\hat{x}_1(t)$, estimado por um observador em malha aberta (113), tenderá exponencialmente para o estado atual $x_1(t)$ desde que A_{11} seja Hurwitz.

6.1.2 Equações de Erro

As equações de erro são necessárias para o desenvolvimento do controle a estrutura variável e modelo de referência ou (*variable structure model-reference adaptative controller*—VS-MRAC) na subseção 6.1.3. Para análise, considere a realização não mínima do modelo de referência:

$$\dot{x}_{1M} = A_{11}x_{1M} + A_{12}y_M, \quad x_{1M}(0) = 0, \quad (115)$$

$$\dot{y}_M = A_M y_M + K_M r. \quad (116)$$

O sinal de controle

$$u_p^* = -K_p^{-1}[A_{21}x_1 + (A_{22} - A_M)y_p - K_M r], \quad (117)$$

é aplicado no sistema (109) e (110) de tal forma que a equação de estado em malha fechada se torne uma realização do modelo de referência. Subtraindo (115) e (116) da equação de estado do sistema (109) e (110), o estado do erro $\tilde{x}_1 := x_1 - x_{1M}$ e o erro de saída satisfaz

em

$$\dot{\tilde{x}}_1 = A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}e, \quad \tilde{x}_1(0) = x_1(0), \quad (118)$$

$$\dot{e} = A_M e + K_p[u_p - u_p^*]. \quad (119)$$

6.1.3 Controle a Estrutura Variável

O VS-MRAC é dado pela lei de controle

$$u_p = u_p^{\text{nom}} + U, \quad (120)$$

$$U = -\rho \text{sign}(e), \quad (121)$$

$$u_p^{\text{nom}} = (K_p^{\text{nom}})^{-1}[(A_M - A_{22}^{\text{nom}})y_p + K_M r], \quad (122)$$

na qual A_{22}^{nom} e K_p^{nom} são valores nominais correspondentes aos parâmetros do sistema em malha aberta. O sinal de controle nominal u_p^{nom} permite redução da amplitude da função modulação ρ se as incertezas ($|A_{22} - A_{22}^{\text{nom}}|, |K_p^{-1} - (K_p^{\text{nom}})^{-1}|$) e o sinal $|A_{21}x_1(t)|$ forem pequenos.

O teorema a seguir é necessário para a síntese do controle e análise de estabilidade. Este possibilita a análise do transiente do filtro aplicado na síntese de ρ , representado pelo sinal $\pi_2(t)$ a seguir (CUNHA et al. 2008).

Teorema 6.1. *Considere o sistema*

$$\dot{e}(t) = A_M e(t) + K[U + d(t) + \pi_1(t)], \quad (123)$$

$$U = -\rho(t) \text{sign}(e), \quad (124)$$

no qual $e \in \mathbb{R}$ é o sinal de saída, $U \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle, $A_M < 0$ e $K > 0$ são constantes. O sinal $\rho(t)$ é localmente integrável (locally integrable-LI). Os sinais $\pi_1(t)$ e $\pi_2(t)$ são LI e exponencialmente decrescentes, i.e., $|\pi_1(t)| \leq R e^{-\lambda t}, \forall t \geq 0, i = 1, 2$, para certos escalares positivos R e λ . Se a função modulação satisfizer

$$\rho(t) \geq \delta + d(t) + \pi_2(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (125)$$

no qual $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária, então $\exists k_1, k_2, \lambda_1 > 0$ tais que

$$|e(t)| \leq (k_1|e(0)| + k_2R)e^{-\lambda_1 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (126)$$

Então, o sistema é exponencialmente e globalmente estável quando $\pi_1(t) \equiv 0$ e $\pi_2(t) \equiv 0$. Além disso, se $\delta > 0$, o modo de deslizamento no ponto $e = 0$ é alcançado após algum tempo finito $t_s \geq 0$.

Aplicando o Teorema 6.1 na equação de erro (118), conclui-se que o erro convergirá exponencialmente para zero e o modo deslizante será alcançado se o sinal de modulação satisfizer a inequação

$$\rho \geq \delta + |u_p^{\text{nom}} - u_p^*|, \quad (127)$$

na qual $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária. Uma função modulação que satisfaz (127)

$$\rho = \delta + c_2|y_p| + c_3|r| + \bar{x}_1(t), \quad (128)$$

na qual as constantes c_i satisfazem

$$\begin{aligned} c_2 &\geq |(K_p^{\text{nom}})^{-1}(A_M - A_{22}^{\text{nom}}) - K_p^{-1}(A_M - A_{22})| \\ c_3 &\geq |(K_p^{\text{nom}})^{-1} - K_p^{-1}|K_M, \end{aligned} \quad (129)$$

e o sinal escalar $\tilde{x}_1(t)$ é algum majorante para $|K_p^{-1}A_{21}x_1(t)|$. Satisfazendo a inequação

$$\bar{x}_1(t) \geq |g_y(t) * y_p(t)|, \quad (130)$$

no qual

$$g_y(t) = \frac{A_{21}e^{A_{11}t}A_{12}}{K_p}, \quad (131)$$

é uma resposta impulsiva.

6.1.4 Estimador de $\bar{x}_1(t)$

O estado $x_1(t)$ não pode ser medido para ser usado na função modulação, por isto é substituído pela estimativa $\bar{x}_1(t)$. Algumas alternativas são o uso de observadores lineares como (113) ou um observador por modo deslizante (EDWARDS & SPURGEON 1998,

Capítulo 7). No entanto, o projeto de observadores pode ser difícil se os parâmetros do sistema são incertos. Em CUNHA et al. (2008) o sinal $\bar{x}_1(t)$ é aproximado por um filtro de primeira ordem (FOAF).

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\gamma_1 \bar{x}_1(t) + c_1 |y_p(t)|. \quad (132)$$

O escalar $\gamma_1 > 0$ é o limite inferior para a margem de estabilidade de A_{11} , definida na subseção 2.1.1. Ressalta-se que a fase mínima é necessária uma vez que a resposta impulsiva $g_y(t)$ deve ser BIBO estável e a equação de erro (118) deve ser estável, i.e., A_{11} deve se uma matriz Hurwitz.

6.2 Controle de um Motor Acoplado a uma Haste Flexível

Seja o sistema dinâmico um motor em conjunto com uma haste flexível ilustrado na Figura 29 onde o objetivo é girar a haste sem que haja muita perturbação causada pelas incertezas paramétricas do sistema, exemplo extraído de (CUNHA et al. 2008). O controle por modo deslizante é muito útil para este tipo de problema com incertezas paramétricas, pois permite rejeitar perturbações tornando-as quase nulas. Mesmo em presença de perturbações o controlador mantém o estado na superfície de deslizamento. O emprego do FOAF no controle realimentado já foi utilizado com sucesso em CUNHA et al. (2008) e visa modular o sinal de controle para que tenha a mesma eficiência com menor consumo.

Considera-se o sistema LTI representado no espaço de estado por (109) e (110) com $y_p := \omega_\theta$ rad/s, que é a velocidade do rotor, u_p (V) é a tensão aplicada a armadura e $x_1 := [\alpha, \omega_\psi]^T$. Então as matrizes do sistema são:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_s}{J_\theta} & \frac{-B_d}{J_\alpha} \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} \frac{k_s}{J_\theta} & 0 \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{-K_g^2 k_m^2}{J_\theta R_m} \end{bmatrix}, & K_p &= \frac{K_g k_m}{J_\theta R_m}. \end{aligned} \quad (133)$$

O sistema possui os seguintes parâmetros incertos:

- Momento de inércia do rotor $1,9 \leq J_\theta \leq 2,4$ ($g \cdot m^2$)
- Momento de inércia da haste $20 \leq J_\alpha \leq 32$ ($g \cdot m^2$)

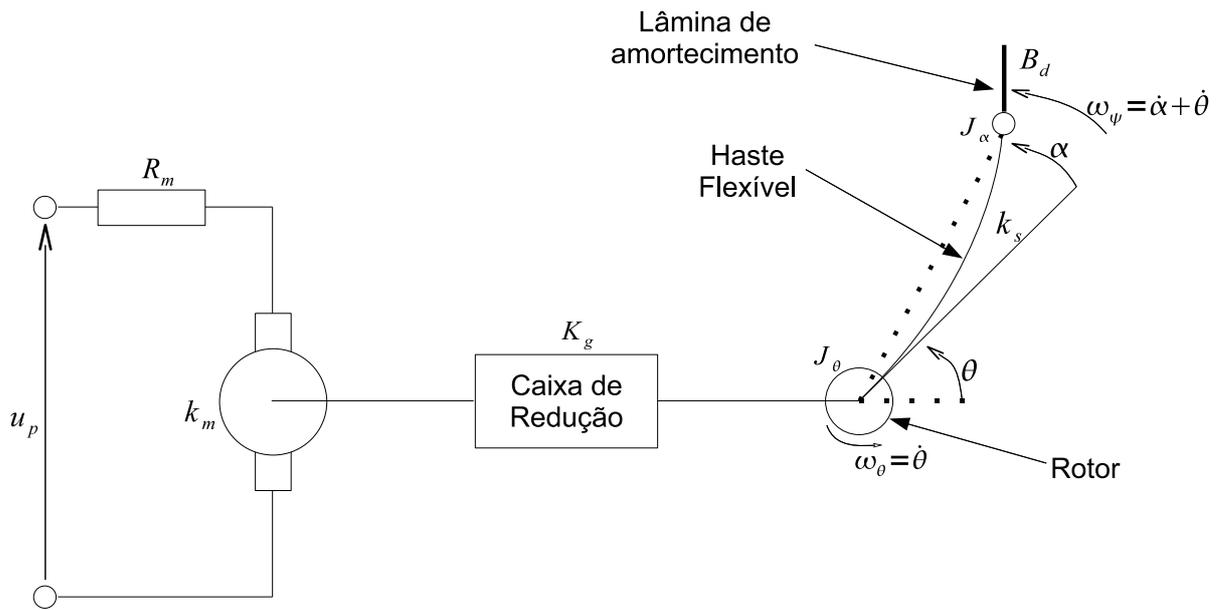


Figura 29 - Diagrama do sistema eletromecânico.

- Atrito viscoso $0,014 \leq B_d \leq 0,022$ ($N \cdot m \cdot s/rad$)
- Resistência da armadura $2,0 \leq R_m \leq 3,0$ (Ω)

Os seguintes parâmetros são conhecidos precisamente:

- Relação das engrenagens: $K_g = 70 : 1$
- Rigidez do elo flexível: $K_s = 1,18$ Nm/rad
- Coeficiente de torque do motor: $0,00767$ Nm/A

Aplicando o terceiro método do AG para encontrar a envoltória da resposta impulsiva dada pela equação (131), obteve-se a envoltória apresentada na Figura 30, na qual também é apresentada a envoltória obtida por força bruta. Comparando-se as duas envoltórias, percebe-se que a envoltória obtida pelo AG é mais uniforme e maior do que a obtida por força bruta. Um detalhe das duas envoltórias é ilustrado na Figura 31. Para avaliar a qualidade da envoltória, calculou-se a norma pela equação (95) (vide Capítulo 4) foi aplicada às duas envoltórias obtendo-se: $1,314 \times 10^4$ para a envoltória obtida por força bruta e $1,332 \times 10^4$ para a envoltória obtida pelo terceiro método do AG. Portanto, o terceiro método baseado em AG mostrou-se o melhor neste exemplo.

Aplicando a síntese de filtros SOAF e TOAF com polos reais para a envoltória na Figura 30, obtém-se as funções de transferência para os filtros obtidos pelo AG que são

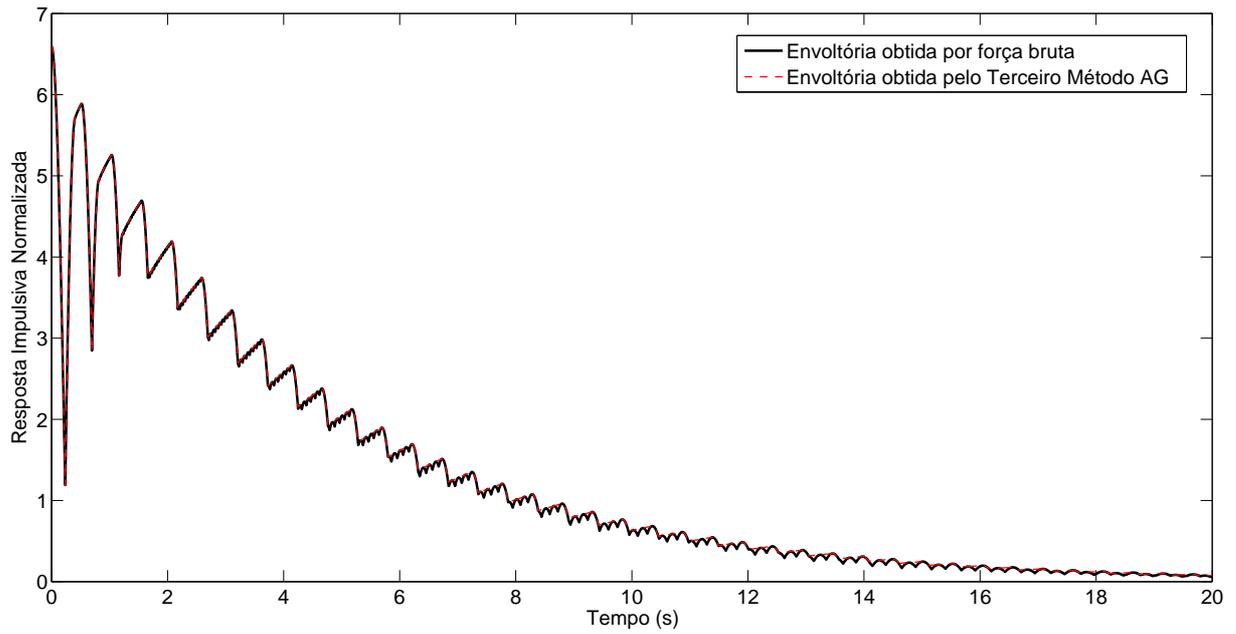


Figura 30 - Envoltória da resposta impulsiva da haste flexível obtida por AG e a envoltória obtida por força bruta.

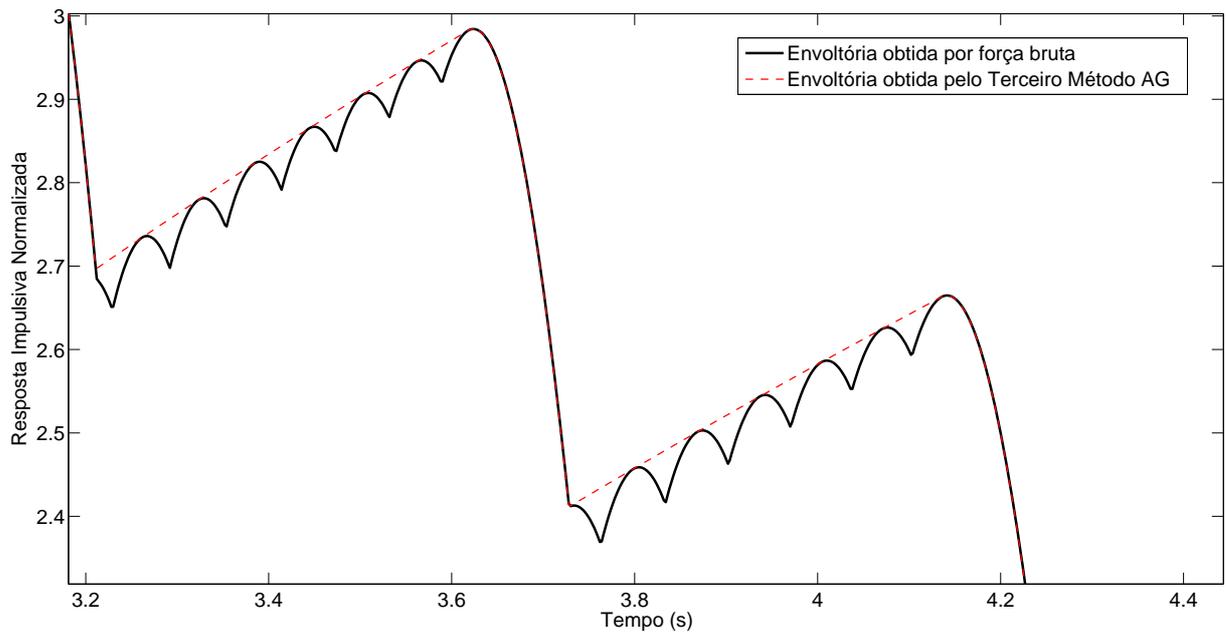


Figura 31 - Detalhamento da envoltória da resposta impulsiva da haste flexível obtida por AG e a envoltória obtida por força bruta.

dadas por

$$F_{soaf}(s) = \frac{7,591s + 32,89}{s^2 + 5,21s + 1,053}, \quad (134)$$

$$F_{toa}(s) = \frac{6,641s^2 + 2,002s + 0,1189}{s^3 + 0,5246s^2 + 0,08377s + 0,003779}. \quad (135)$$

As respostas impulsivas desses filtros SOAF e TOAF são apresentadas na Figura 32.

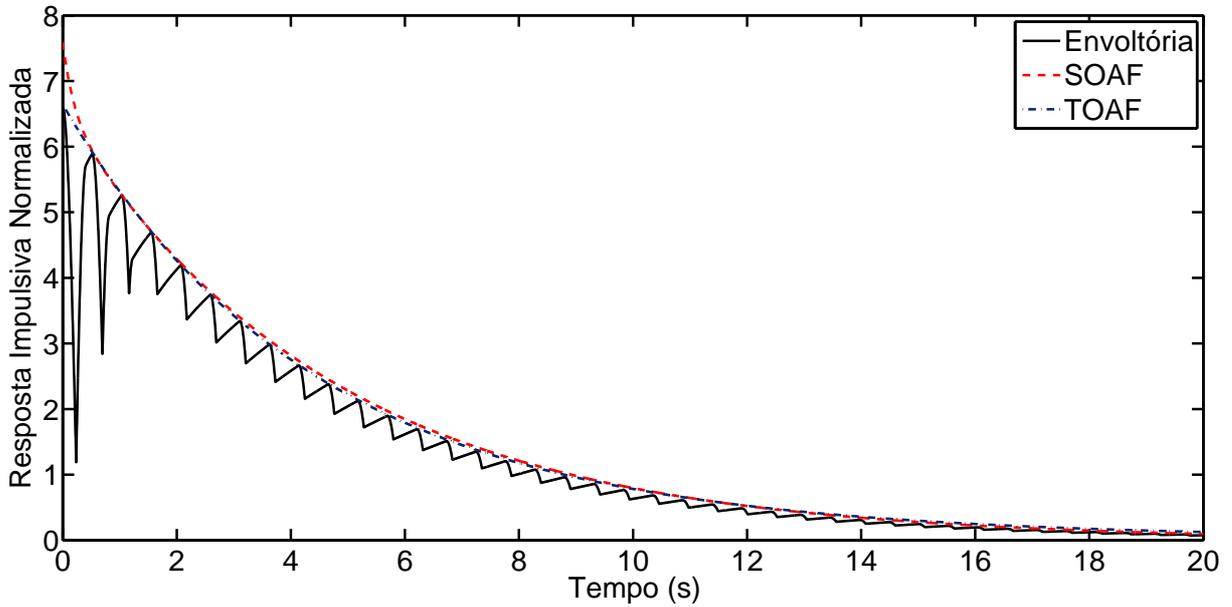


Figura 32 - Resposta impulsiva dos filtros SOAF e TOAF obtidos por AG.

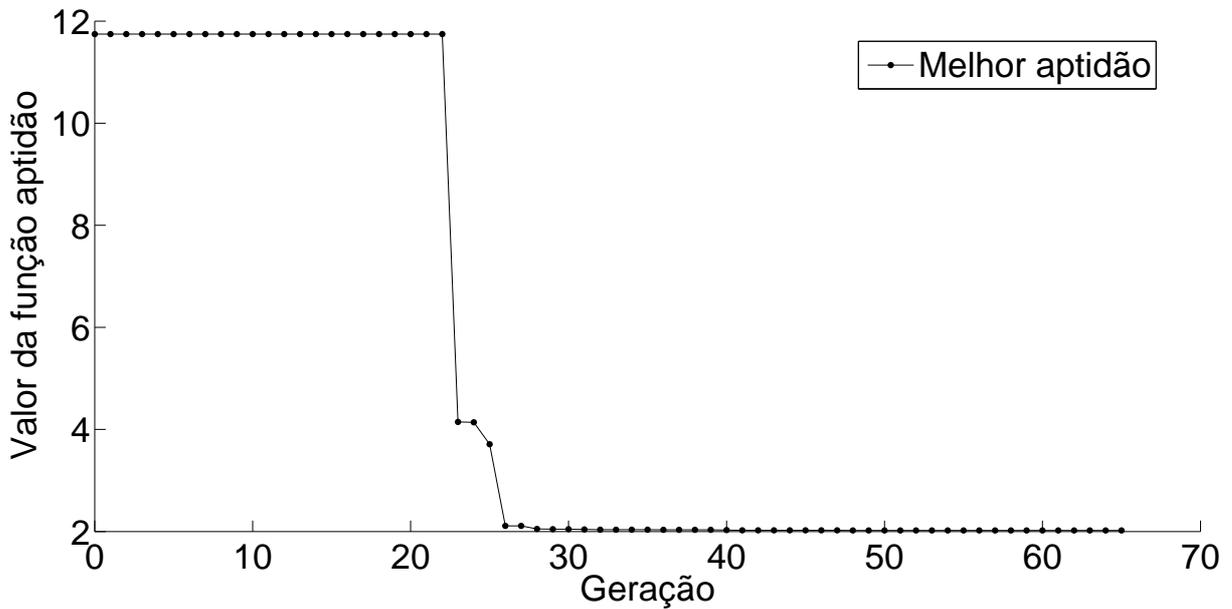


Figura 33 - Convergência da função aptidão para o filtro SOAF com polos reais obtido por AG.

A Figura 36 ilustra a convergência da função aptidão para o filtro TOAF que deve ser minimizada.

Para este exemplo conclui-se que o uso do filtro de primeira ordem é admissível pois a Tabela 12 indica que a diminuição do ganho DC é marginal.

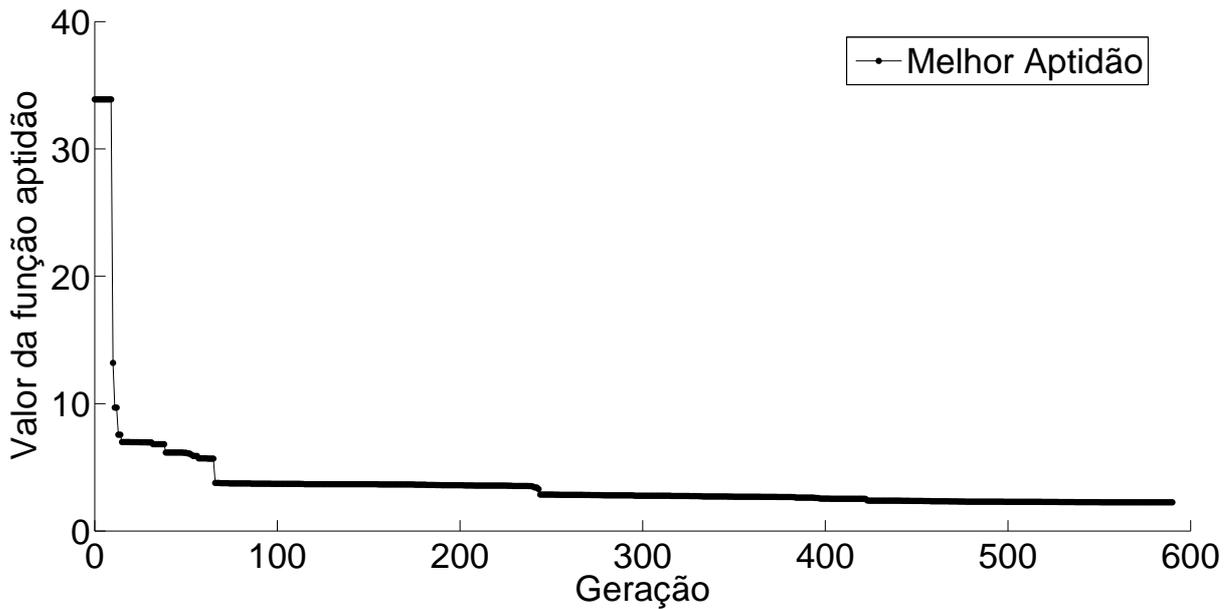


Figura 34 - Convergência da função aptidão para o filtro TOAF com polos reais obtido por AG.

Tabela 12 - Tabela com o ganho DC para cada filtro projetado junto com o tempo médio de processamento

Filtros	Ganho DC	Tempo médio de processamento
FOAF	31,73	2,53
SOAF	31,25	23,18
TOAF com polos reais	31,45	33,77
TOAF com polos complexos	31,50	38,63

Para o mesmo exemplo, o projeto de um filtro TOAF com polos complexos resulta na seguinte função de transferência

$$F_{toaf}(s) = \frac{8,479s^2 + 20,9s + 17,61}{s^3 + 3,152s^2 + 3,173s + 0,5589}, \quad (136)$$

que possui ganho DC igual a 31,50, conforme a Tabela 12.

6.3 Resultados

Para avaliar o desempenho dos filtros de aproximação projetados para o sistema com a haste flexível, estes serão aplicados, segundo a equação (132), no controlador por modo deslizante (120), (121), (122) e (128).

Para o modelo de referência escolheu-se os valores de $K_M = -A_M = 60$ rad/s. O

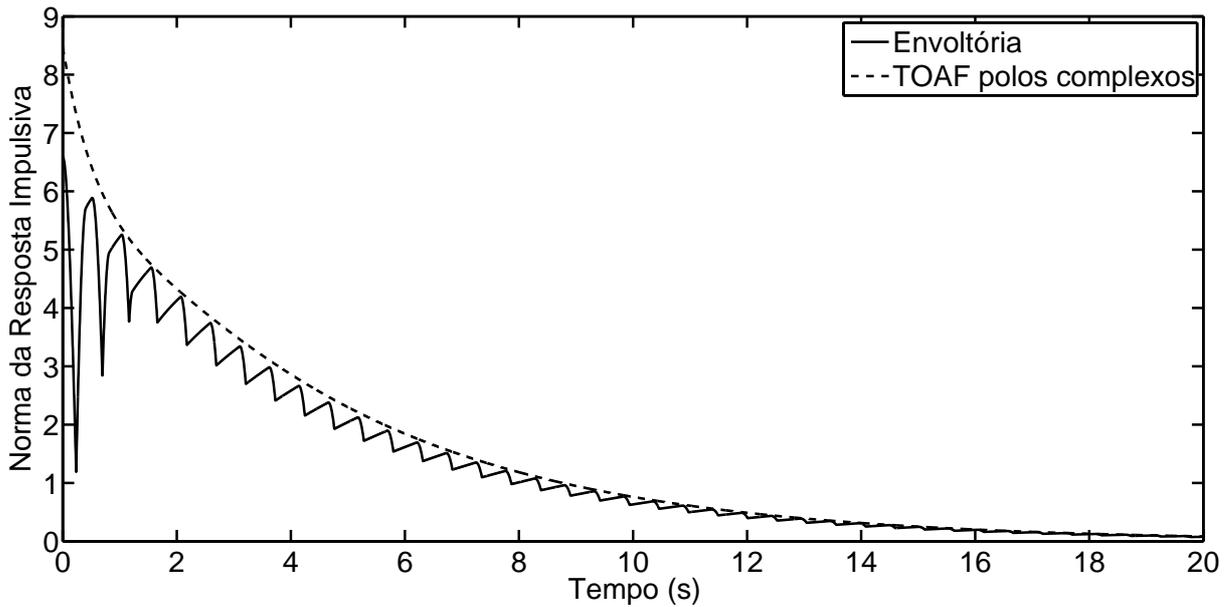


Figura 35 - Raposta impulsiva do filtro TOAF com polos complexos obtido por AG.

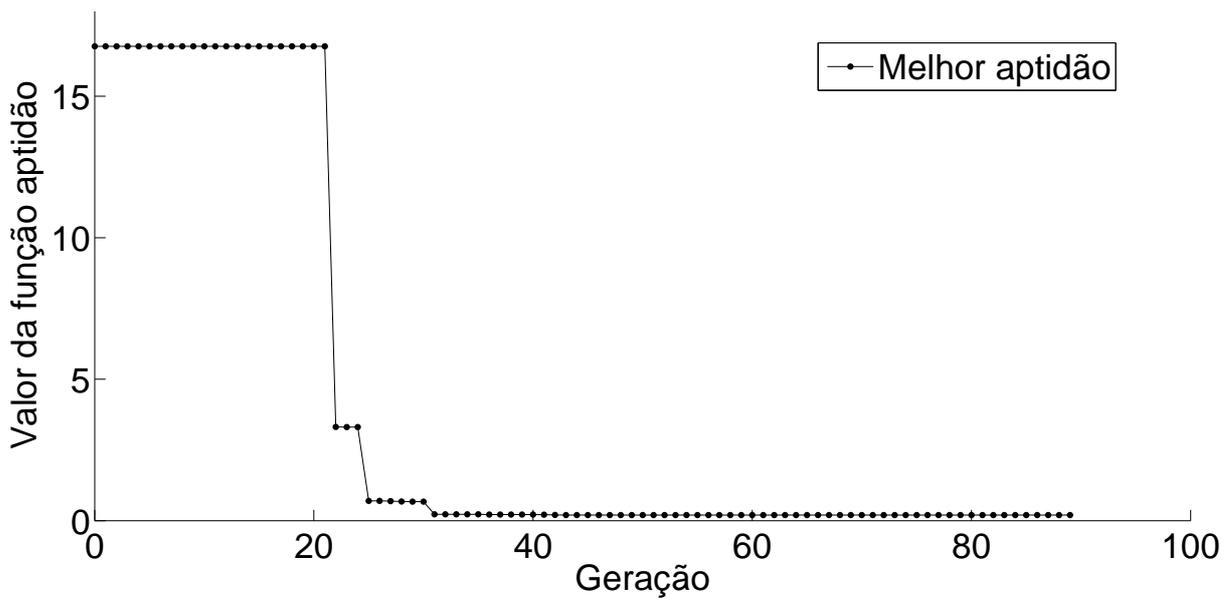


Figura 36 - Convergência da função aptidão para o filtro TOAF com polos complexos obtido por AG.

ganhos nominais $K_p^{\text{nom}} = 94$ e $A_{22}^{\text{nom}} = -50$ são aplicados para gerar o sinal de controle nominal (122), que são calculados para o caso de parâmetros nominais. Os coeficientes da equação (128) são calculados a partir da inequação (129) resultando em $c_2 = 0,22$, $c_3 = 0,22$ e $\delta = 0,1$.

Para o sinal de referência é utilizado $r = 0$ (rad/s) ($0 \leq t < 1$)s, $r = 0,5$ (rad/s) $1 \leq t < 2$ s, $r = 0$ (rad/s) ($2 \leq t < 5$)s e $r = 0,5 \text{ sen}(6,3t)$ rad/s ($t \geq 5$)s.

A Figura 37 mostra a aplicação do filtro SOAF com função de transferência (134).

O controlador por modo deslizante da haste flexível consegue levar a saída do sistema y_p para a velocidade de referência r por meio do sinal de controle u_p . Note que o sinal de controle é modulado pela função modulação ρ quando somente há necessidade que o sistema mude de posição. A Figura 38 mostra a aplicação do filtro TOAF com função

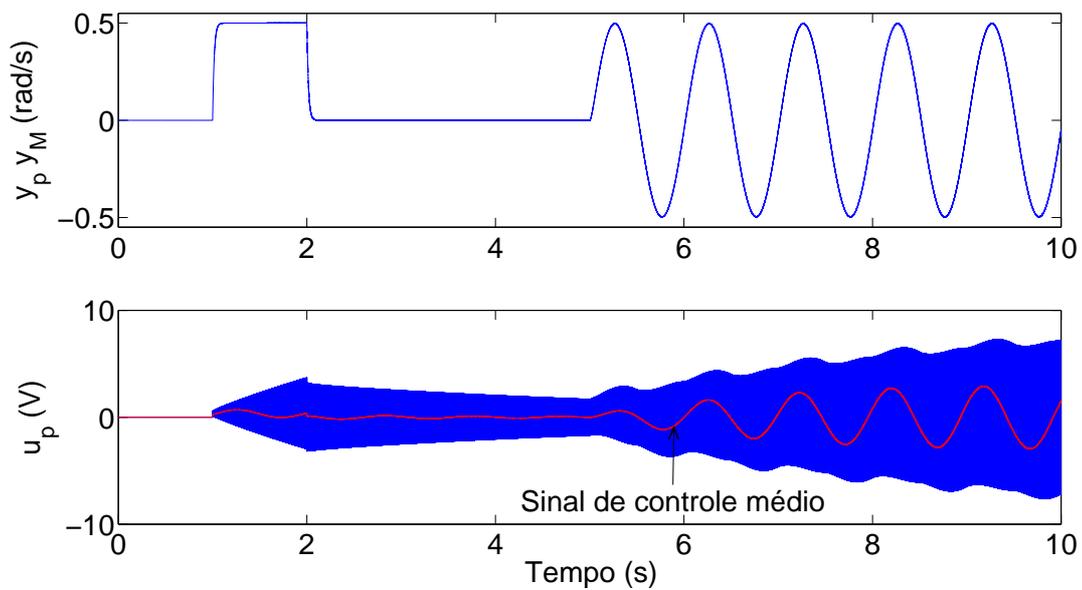


Figura 37 - Velocidade do motor medido (y_p) juntamente com o sinal de saída do modelo de referência (y_M). Sinal de controle u_p . Função de modulação que aplica o SOAF.

de transferência (135). A Figura 39 mostra a aplicação do filtro TOAF com função de transferência (136). Note que não há diferença significativa entre os sinais de controle da Figura 37, Figura 38 e Figura 39. A pequena diferença é resultante do ganho DC de cada filtro, que neste caso é marginal.

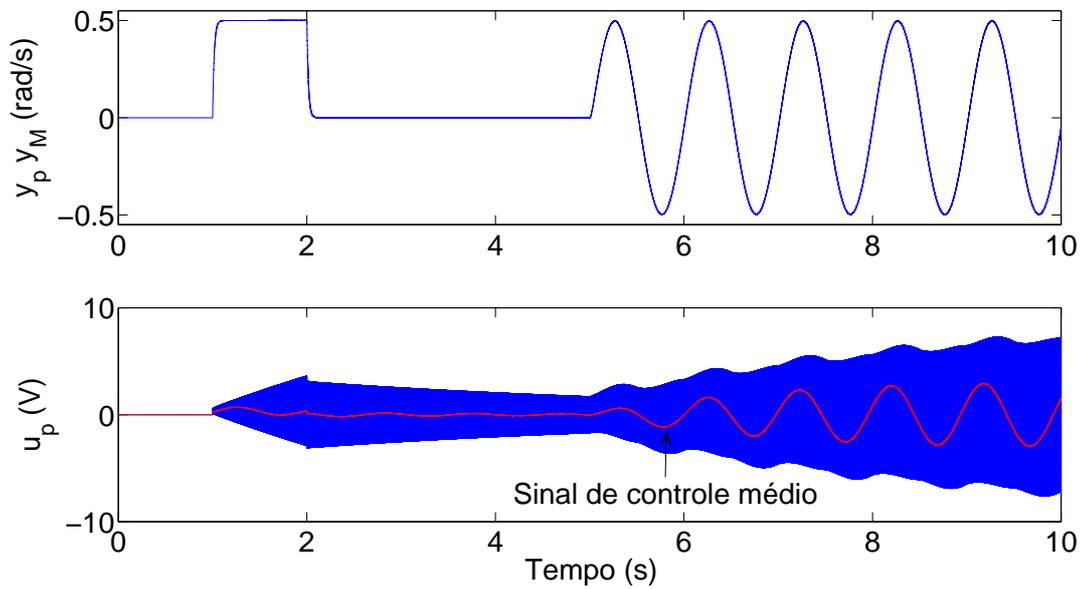


Figura 38 - Velocidade do motor medido (y_p) juntamente com o sinal de saída do modelo de referência (y_M). Sinal de controle u_p . Função de modulação que aplica o TOAF com polos reais.

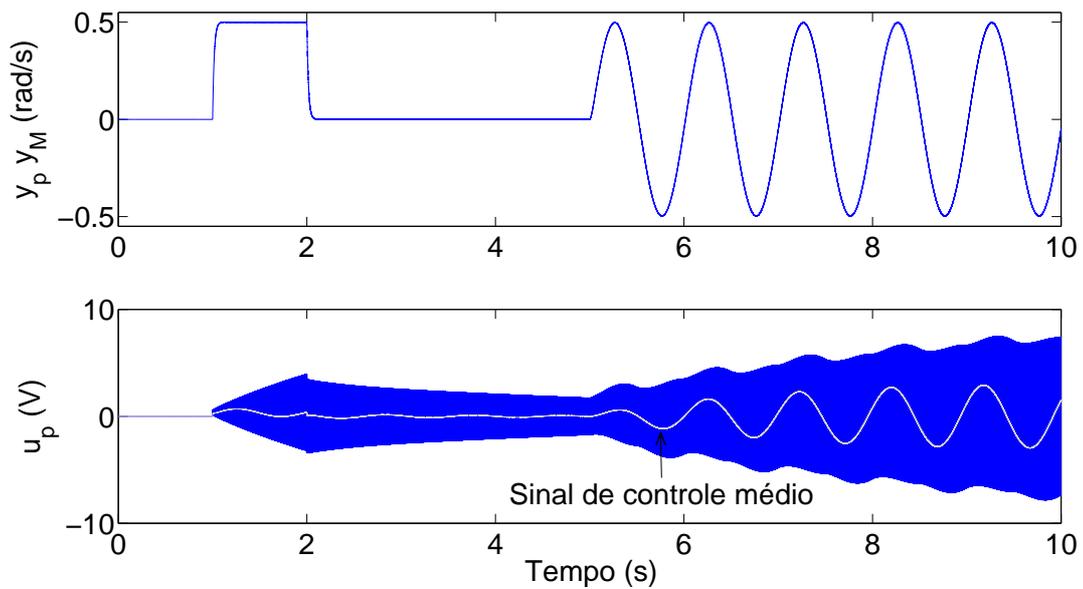


Figura 39 - Velocidade do motor medido (y_p) juntamente com o sinal de saída do modelo de referência (y_M). Sinal de controle u_p . Função de modulação que aplica o TOAF com polos complexos.

7 CONCLUSÃO

Esta Dissertação abordou o uso de algoritmos genéticos na síntese de filtros e a obtenção da envoltória da norma da resposta impulsiva de sistemas lineares com incertezas paramétricas. Para encontrar a envoltória, três métodos baseados em algoritmos genéticos foram desenvolvidos. No primeiro método, a busca pontual de cada máximo da envoltória mostrou-se eficaz, mas ineficiente, pois o tempo computacional demandado para obter as amostras de interesse da envoltória foi muito grande. O segundo método mostrou-se melhor em relação ao tempo de busca, porém com o tempo computacional ainda consideravelmente grande. Assim, houve a necessidade de criar o terceiro método de determinação da envoltória, que se mostrou eficiente e eficaz, pois o tempo de busca foi consideravelmente reduzido e a envoltória encontrada também foi superior (melhor) em relação às outras. Por estes motivos, este método de determinação da envoltória é o mais recomendável e foi utilizado em todos os exemplos.

O algoritmo genético proposto para a síntese de filtros utiliza inicialmente o terceiro método apresentado para obter a envoltória. O objetivo do algoritmo genético é encontrar os parâmetros de um filtro em que a diferença entre área da resposta impulsiva e a área da envoltória seja a menor possível a fim de reduzir o ganho DC do filtro, respeitando-se as restrições impostas, como estabilidade assintótica e resposta impulsiva superior à envoltória. Com isso, pode-se sintetizar filtros de ordem superior a um visando melhorar o desempenho do filtro. Deve-se lembrar que CUNHA et al. (2003) já haviam proposto um método de otimização convexa para a síntese de filtros de primeira ordem. Para todos os casos, esta proposta mostrou-se eficiente na busca dos parâmetros do filtro, porém observa-se que há casos em que o filtro de primeira ordem seria o satisfatório para majorar a envoltória. Em alguns casos, a redução do ganho DC foi significativa. Noutros exemplos a redução do ganho DC foi marginal, como no controle da haste flexível descrito no Capítulo 6.

7.1 Propostas para Trabalhos Futuros

O algoritmo genético usado para a síntese de filtros obteve resultados satisfatórios, porém para melhorar o desempenho na otimização dos parâmetros, novas técnicas podem ser desenvolvidas como:

- Avaliar o uso de outros algoritmos de otimização não-convexa para a síntese de filtros e a obtenção da envoltória.
- Melhorar nos métodos de busca com operadores genéticos, juntando dois ou mais operadores para otimização na busca. Neste trabalho foram usados somente os operadores de Cruzamento real por média aritmética e Mutação real uniforme.
- Avaliar o desempenho de aproximações por filtros de ordem superior a três.
- Projetar filtros que gerem a envoltória superior e a envoltória inferior separadamente, a fim de obter envoltórias menos conservadoras para a resposta impulsiva de sistemas incertos.

REFERÊNCIAS

- AL-HASHIMI, B., SOMERSET, W. & MONIRI, M. (1998). Constrained genetic algorithm design of finite precision FIR linear phase raised cosine filters, *Proc. IEEE Int. Symposium on Circ. and Syst.* **5**: 445–448.
- ALFARO-CID, E., MCGOOKIN, E. W. & MURRAY-SMITH, D. J. (2009). A comparative study of genetic operators for controller parameter optimisation, *Control Engineering Practice* **17**(1): 185–197.
- ALMEIDA, C. F. M. & KAGAN, N. (2010). Aplicação de algoritmos genéticos e teoria dos conjuntos fuzzy no dimensionamento de sistemas de monitoração para redes de transmissão de energia elétrica, *Revista Controle & Automação* **21**(4): 363–378.
- AMARAL, J. L. M., AMARAL, J. F. M., TANSCHHEIT, R., PACHECO, M. & MESQUITA, A. (2005). Tuning evolvable PID controllers through a clonal selection algorithm, *Proc. NASA/DoD Conference on Evolvable Hardware*, Washington, DC, pp. 30–33.
- ASHARI, A., YAZDANPANA, M. & SEDIGH, A. (2005). Reconfigurable sliding-mode control design using genetic algorithms and eigenstructure assignment, *IEEC* **1**: 38–43.
- BANDYOPADHYAY, B. & THAKAR, V. (2008). Discrete time output feedback sliding mode control algorithm for chattering reduction and elimination, *International Workshop on Variable Structure Systems, 2008. VSS '08.* pp. 84–88.
- BEVRANI, H. & HIYAMA, T. (2007). Multiobjective PI/PID control design using an iterative linear matrix inequalities algorithm, *International Journal of Control Automation and Systems* **5**(2): 117–127.
- CHEN, C.-T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3rd edn, Oxford University Press.
- CUNHA, J. P. V. S. (2004). *Controle de Sistemas Multivariáveis Incertos por Realimentação de Saída e Modo Deslizante*, PhD thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

- CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R. & HSU, L. (2003). Design of first order approximation filters applied to sliding mode control, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Maui, Hawaii, pp. 3531–3536.
- CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R. & HSU, L. (2006). Design of sliding mode controllers for linear uncertain systems based on first order approximation filters, *Proc. 9th Int. Workshop on Variable Structure Sys.*, Alghero, pp. 340–345.
- CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R. & HSU, L. (2008). Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems, *IEEE Trans. Ind. Electronics* **55**(11): 4037–4046.
- CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R., LIZARRALDE, F. & HSU, L. (2009). Peaking free variable structure control of uncertain linear systems based on a high-gain observer, *Automatica* **45**(5): 1156–1164.
- DECARLO, R. A., ŽAK, S. H. & MATTHEWS, G. P. (1988). Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial, *Proceedings of the IEEE* **76**(3): 212–232.
- DER, F. H. & SHAU, R. H. (2009). The optimum design of multistage multirate FIR filter for audio signal sampling rate conversion via a genetic algorithm approach, *IEEE Conferences* pp. 1–5.
- DEXIANG, J. X. & MICHAEL, L. D. (1995). Design of optimal digital filter using a parallel genetic algorithm, *IEEE Trans. Circu. and Syst.* **42**(10): 673–675.
- EDWARDS, C. & SPURGEON, S. K. (1998). *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, Taylor & Francis Ltd.
- ESFANDIARI, F. & KHALIL, H. K. (1992). Output feedback stabilization of fully linearizable systems, *Int. J. Contr.* **56**(5): 1007–1037.
- FERREIRA, R. E. (2009). *Implementação de algoritmos genéticos paralelos em uma arquitetura mp soc*, Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica (PEL) FEN/UERJ, Rio de Janeiro.
- GOLDBERG, D. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*, Addison-Wesley: Reading, MA.

- GRIMBLEBY, J. B. (2000). Automatic analogue circuit synthesis using genetic algorithms, *Proceedings of the IEEE* **147**(6): 319–323.
- HERRERA, F., LOZANO, M. & VERDEGAY, J. L. (1998). Tackling real-coded genetic algorithms: Operators and tools for behavioural analysis, *Artificial Intelligence Review* **12**: 265–319.
- HOLLAND, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press: Ann Arbor, MI.
- HSU, L., COSTA, R. R. & CUNHA, J. P. V. S. (2003). Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems, *Asian Journal of Control* **5**(4): 543–556.
- IOANNOU, P. A. & SUN, J. (1996). *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall.
- IOANNOU, P. & TSAKALIS, K. (1986). A robust direct adaptive controller, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **31**(11): 1033–1043.
- ITKIS, U. (1976). *Control Systems of Variable Structure*, Wiley.
- JAMSHIDI, M., KROHLING, R. A., COELHO, L. S. & FLEMING, P. J. (2003). *Robust Control Systems with Genetic Algorithms*, Taylor & Francis.
- KAILATH, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice Hall.
- KHALIL, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*, 2nd edn, Prentice Hall.
- KROHLING, R. A. & REY, J. P. (2001). Design of optimal disturbance rejection PID controllers using genetic algorithms, *IEEE Trans. on Evolut. Comp.* **5**(1): 78–82.
- LI, Y., NG, K. C., MURRAY-SMITH, D., GRAY, G. & SHARMAN, K. C. (1996). Genetic algorithm automated approach to design of sliding mode control systems, *Int. J. Contr.* **63**: 721–739.
- MERCIER, P. & NOWROUZIAN, B. (2006). A genetic algorithm for the design and optimization of FRM digital filters over a canonical double-base multiplier coefficient space, *Proc. IEEE Int. Symposium on Circ. and Syst.* pp. 3289–3292.

- MOIN, N., ZINOBER, A. & HARLEY, P. . (1995). Sliding mode control design using genetic algorithms, *Proc. IET Conf. Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications*, pp. 238–244.
- NEENU, T. & POONGODI, P. (2009). Position control of DC motor using genetic algorithm based PID controller, *Proc. World Congress Eng.*, London, U.K., pp. 117–127.
- OH, S. & KHALIL, H. K. (1995). Output feedback stabilization using variable structure control, *Int. J. Contr.* **62**(4): 831–848.
- SHENDGE, P. D. & PATRE, B. M. (2007). Robust model following load frequency sliding mode controller based on UDE and error improvement with higher order filter, *International Journal of Applied Mathematics* **37**(1): 37–1–15.
- SHENDGE, P. D., SURYAWANSHI, P. V. & PATRE, B. M. (2010). Robust sliding mode control for systems with noise and unmodeled dynamics based on uncertainty and disturbance estimation UDE, *International Journal of Computer Applications* **1**(9): 0975–8887.
- SUCKLEY, D. (1991). Genetic algorithm in design of FIR filters, *Proceedings of the IEEE* **138**(2): 234–238.
- UTKIN, V. (1977). Variable structure systems with sliding mode, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **22**: 212–222.
- UTKIN, V., GULDNER, J. & SHI, J. (1999). *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor & Francis Ltd.
- UTKIN, V. I. (1978). *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR.
- UTKIN, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag.
- UTKIN, V. I. & LEE, H. (2006). The chattering analysis, *Proc. IEEE EPE-PEMC*, Portoroz, Slovenia, pp. 2014–2019.
- VAN LOAN, C. (1985). How near is a stable matrix to an unstable one?, *Comtemporary Math.* **47**: 465–478.

- YOUNG, K. D., UTKIN, V. I. & ÖZGÜNER, U. (1999). A control engineer's guide to sliding mode control, *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **7**(3): 328–342.
- YOUNG, K.-K. D. (1977). Asymptotic stability of model reference systems with variable structure control, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **22**(2): 279–281.
- ZHANG, R. & DEMIN, X. (1992). A new method for chattering alleviation of VSC system, *IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 1992* **2**: 860–861.