

# Relatório Final de Pesquisa de Iniciação Científica

## **Título do Projeto:**

**Modelagem, Simulação e Controle de um Levitador  
Eletromagnético com Três Graus de Liberdade**

## **Identificação**

**UERJ**

**Faculdade de Engenharia — FEN**

**Departamento de Eletrônica e Telecomunicações — DETEL**

**Período deste Relatório:** agosto de 2007 a julho de 2008

### **Equipe:**

*Bolsista PIBIC/UERJ:* Cláudia Lopes Gonçalves — Matrícula: 2004.1.02928-11

*Professor Orientador:* José Paulo Vilela Soares da Cunha — Matrícula: 32.640-5

**Local de desenvolvimento do projeto:** Laboratório de Controle e Automação do Laboratório de Engenharia Elétrica

**Local e data:** Rio de Janeiro, 29 de agosto de 2008

## 1 Introdução

Neste projeto desenvolve-se o controle de um levitador com uma plataforma triangular e três eletroímãs.

A estrutura mecânica, o acionamento dos eletroímãs e parte da instrumentação do levitador foram desenvolvidos e contruídos no Projeto de Graduação (Silva, Cutin & Machado 2001).

Foram planejadas e executadas modificações no levitador, para melhorar o desempenho, assim como foi feito a modelagem da dinâmica de atuação, calculados e/ou medidos os parâmetros necessários para realizar o controle de um grau de liberdade. Parte das modificações realizadas e a obtenção dos parâmetros do levitador são descritos no relatório (Gonçalves 2007).

A modelagem da dinâmica do levitador foi estudada, para a simulação do funcionamento do levitador e para o desenvolvimento do controle de um grau de liberdade do levitador.

## 2 Medição da Constante de Tempo do Eletroímã

No relatório (Gonçalves 2007), foi calculada a constante de tempo do eletroímã considerando a relutância equivalente e a indutância teórica.

Porém, foi realizada uma experiência para observar a constante de tempo experimental e compará-la com o valor teórico obtido. Verificou-se que havia uma diferença relevante entre a constante de tempo experimental e a constante de tempo teórica. Esta diferença ocorreu porque no cálculo teórico não foi considerado o fluxo de dispersão no entreferro, causando um erro considerável.

Então, foi feita uma experiência para determinar os valores de corrente em função do tempo durante a descarga do eletroímã, analisando-se a equação de malha do circuito do estágio de saída do acionador do eletroímã, apresentado em (Silva et al. 2001, Fig. 3.5).

Foi aplicada na entrada desse estágio uma onda quadrada de  $4V_{pp}$ , de frequência  $f = 3\text{ Hz}$  e observada a tensão na resistência de  $0,11\ \Omega$ . Esta resistência serve para medir a corrente que passa nos enrolamentos do eletroímã sem que haja uma queda considerável na tensão. A corrente é calculada dividindo-se a tensão pela resistência de  $0,11\ \Omega$ .

A equação da malha é:

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = -0,8, \quad (1)$$

onde  $0,8\text{ V}$  é a queda de tensão no diodo de *freewheeling*,  $R$  é a resistência total da malha,  $L$  é a indutância do eletroímã e  $i_L$  é a corrente na malha.

Resolvendo-se a equação homogênea:

$$\begin{aligned} Ri_L &= -L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow \\ -L \frac{di_L}{i_L} &= R dt \Rightarrow \\ -L \ln i_L &= Rt \Rightarrow \\ i_L(t) &= e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau_L}} i_L(t_0), \quad \tau_L = \frac{L}{R}. \end{aligned}$$

Solução particular:

$$\begin{aligned} Ri_L &= -0,8 \Rightarrow \\ i_L &= -\frac{0,8}{R}. \\ R &= 6,2 \Omega + 0,11 \Omega = 6,31 \Omega, \end{aligned}$$

onde  $6,2 \Omega$  é a resistência da bobina do eletroímã medida por um ohmímetro. Então:

$$i_L = -0,13 A.$$

Solução completa:

$$i_L(t) = e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau_L}} i_L(t_0) - 0,13, \quad t \geq t_0. \quad (2)$$

Os valores medidos com o osciloscópio e os valores de  $\tau_L$  obtidos em cada medição são mostrados na Tabela 1, de onde se conclui que  $L \approx 120 mH$ . Este valor é muito maior do que aquele calculado em (Gonçalves 2007), isto é,  $L = 6,5 mH$ , o que indica que o método de cálculo então adotado é inadequado.

Tabela 1: Valores medidos para o cálculo da constante de tempo do eletroímã.

Medição	Tempo (ms)	Tensão (mV)	Corrente (A)	$\tau_L$ (ms)
0	0	205	1,86	—
1	10	110	1,00	20
2	20	55	0,50	18
3	30	20	0,18	17
4	40	5	0,045	17

### 3 Estudo da Equação da Dinâmica do Levitador

Foram obtidos todos os parâmetros necessários para poder simular o funcionamento do levitador, que podem ser encontrados no relatório (Gonçalves 2007, Tabela 2), que são aqui reescritos na Tabela 2, onde estão a indutância e a constante de tempo do eletroímã revisadas.

Tabela 2: Parâmetros do levitador na posição de equilíbrio.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Aceleração da gravidade	$g$	9,788	$m/s^2$
Massa da plataforma	$m_p$	0,11491	$kg$
Força de atração do eletroímã na posição de equilíbrio	$F_m$	0,375	$N$
Largura do entreferro na posição de equilíbrio	$L_E$	0,01720	$m$
Corrente calculada na posição de equilíbrio	$I_L$	1,41	$A$
Corrente medida na posição de equilíbrio	$I_{Lm}$	1,54	$A$
Constante da força de atração do eletroímã	$K_m$	$1,782\pi \times 10^{-5}$	$Nm^2/A^2$
Número de espiras do eletroímã	$N$	700	—
Indutância do eletroímã	$L$	120	$mH$
Resistência do eletroímã	$R_L$	6,2	$\Omega$
Constante de tempo do eletroímã	$\tau_L$	18	$ms$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	$H/m$
Área do $gap_1$	$S_1$	$1,82 \times 10^{-4}$	$m^2$
Área do $gap_2$	$S_2$	$1,82 \times 10^{-4}$	$m^2$
Área do $gap_3$	$S_3$	$3,64 \times 10^{-4}$	$m^2$

A equação da dinâmica do levitador é uma equação não-linear, que torna o estudo para desenvolver o controlador mais complicado. Devido a isto, foram aplicados métodos matemáticos para poder trabalhar com uma equação linearizada.

### 3.1 Linearização da equação da dinâmica do levitador

A equação diferencial

$$\frac{d^2 l_E}{dt^2} = g - \frac{K_m}{m} \cdot \frac{i_L^2}{l_E^2}, \quad (3)$$

onde  $m = m_p/3$  e  $m_p$  é a massa total da plataforma, descreve o movimento vertical de um grau de liberdade da plataforma em função da corrente que passa no eletroímã ( $i_L$ ) e da largura do entreferro ( $l_E$ ). Esta equação é não-linear, o que torna difícil o desenvolvimento do controlador. Para tornar o desenvolvimento do controlador mais simples, linearizou-se a equação aplicando a série de Taylor em torno do ponto de operação do levitador ( $I_L, L_E$ ). Então, define-se

$$\begin{aligned} i_L(t) &= I_L + i_l(t), \\ l_E(t) &= L_E + l_e(t), \end{aligned}$$

onde  $i_L$  é a corrente que passa no eletroímã,  $I_L$  é a corrente na posição de equilíbrio,  $i_l$  é a corrente incremental,  $l_E$  é a largura do entreferro,  $L_E$  é a largura do entreferro na posição de equilíbrio,  $l_e$  é a largura do entreferro incremental e

$$f(i_L, l_E) = \frac{i_L^2}{l_E^2}.$$

Aplicando-se a série de Taylor truncada nos termos de primeira ordem:

$$\frac{i_L^2}{l_E^2} = f(i_L, l_E) \approx f(I_L, L_E) + \frac{\partial f}{\partial i_L} i_l + \frac{\partial f}{\partial l_E} l_e, \quad (4)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(i_L, l_E)}{\partial i_L} &= \frac{2i_L}{l_E^2}, \\ \frac{\partial f(i_L, l_E)}{\partial l_E} &= \frac{-2i_L^2 l_E}{l_E^4} = \frac{-2i_L^2}{l_E^3}. \end{aligned}$$

Então,

$$f(i_L, l_E) \approx \frac{I_L^2}{L_E^2} + \frac{2I_L}{L_E^2} (i_L - I_L) - \frac{2I_L^2}{L_E^3} (l_E - L_E), \quad (5)$$

de onde se obtém

$$\begin{aligned} \frac{d^2(L_E + l_e)}{dt^2} &\approx g - \frac{K_m}{m} \left[ \frac{I_L^2}{L_E^2} + \frac{2I_L}{L_E^2} (i_L - I_L) - \frac{2I_L^2}{L_E^3} (l_E - L_E) \right] \Rightarrow \\ \frac{d^2 l_E}{dt^2} &\approx g - \frac{K_m}{m} \cdot \frac{I_L^2}{L_E^2} - \frac{K_m}{m} \left( \frac{2I_L}{L_E^2} i_l - \frac{2I_L^2}{L_E^3} l_e \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Na equação (6), fazendo-se  $\frac{d^2 l_E}{dt^2} = 0$ ,  $i_l = 0$  e  $l_e = 0$ , resulta

$$g - \frac{K_m}{m} \cdot \frac{I_L^2}{L_E^2} = 0,$$

que estabelece o ponto de operação do levitador, em que a força magnética é igual a força peso. Além disto, como

$$\frac{d^n l_E}{dt^n} = \frac{d^n l_e}{dt^n},$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2 l_e}{dt^2} &= -\frac{2K_m I_L}{m L_E^2} i_l + \frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3} l_e, \\ \frac{d^2 l_e}{dt^2} - \frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3} l_e &= -\frac{2K_m I_L}{m L_E^2} i_l. \end{aligned} \quad (7)$$

## 4 Controle por Realimentação de Estado

A equação (7) é função da corrente  $i_l$  e da largura do entreferro  $l_e$ . Deseja-se obter uma equação em função somente da largura do entreferro, pois esta determinará o valor da corrente em regime permanente que irá passar no eletroímã quando o sistema estiver em equilíbrio. Portanto,  $i_l$  será função de  $l_e$ . A lei de controle é dada por:

$$i_l = -K_1 \frac{dl_e}{dt} - K_0 l_e, \quad (8)$$

onde  $K_0$  e  $K_1$  são ganhos do controlador. Substituindo na equação (7) a lei de controle (8), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2 l_e}{dt^2} - \frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3} l_e &= -\frac{2K_m I_L}{m L_E^2} \left( -K_1 \frac{dl_e}{dt} - K_0 l_e \right) \Rightarrow \\ \frac{d^2 l_e}{dt^2} - K_1 \left( \frac{2K_m I_L}{m L_E^2} \right) \frac{dl_e}{dt} - K_0 \left( \frac{2K_m I_L}{m L_E^2} \right) l_e - \frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3} l_e &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 l_e}{dt^2} - K_1 \left( \frac{2K_m I_L}{m L_E^2} \right) \frac{dl_e}{dt} - \left( K_0 \frac{2K_m I_L}{m L_E^2} + \frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3} \right) l_e &= 0. \end{aligned}$$

Esta é uma equação diferencial linear homogênea. A sua equação característica é dada por:

$$r^2 - K_1 \left( \frac{2K_m I_L}{m L_E^2} \right) r - \left( K_0 \frac{2K_m I_L}{m L_E^2} + \frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3} \right) = 0,$$

obtendo as raízes

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= K_1 \frac{K_m I_L}{m L_E^2} + \sqrt{\frac{K_m I_L}{m L_E^2} \left( \frac{K_1^2 K_m I_L}{m L_E^2} + 2K_0 + \frac{2I_L}{L_E} \right)}, \\ \lambda_2 &= K_1 \frac{K_m I_L}{m L_E^2} - \sqrt{\frac{K_m I_L}{m L_E^2} \left( \frac{K_1^2 K_m I_L}{m L_E^2} + 2K_0 + \frac{2I_L}{L_E} \right)}.\end{aligned}$$

Portanto

$$l_e(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes dependentes das condições iniciais.

#### 4.1 Determinação dos ganhos do controlador

A partir da equação:

$$\frac{d^2 l_e}{dt^2} = \frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3} l_e - \frac{2K_m I_L}{m L_E^2} i_l,$$

onde:  $K_m = 1,782\pi \times 10^{-5} \text{ Nm}^2/\text{A}^2$ ,  $I_L = 1,41 \text{ A}$ ,  $L_E = 0,01720 \text{ m}$  e  $m = 0,038 \text{ kg}$ , pode-se calcular  $K_0$  e  $K_1$ . Fazendo  $i_l = 0$ , ou seja, quando  $K_0 = 0$  e  $K_1 = 0$ ,

$$\frac{d^2 l_e}{dt^2} - \frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3} l_e = 0,$$

de onde a equação característica e suas raízes são

$$r^2 - \frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3} = 0,$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{2K_m I_L^2}{m L_E^3}},$$

$$r = \pm 33,79 \approx 34 \text{ rad/s}.$$

A raiz positiva indica instabilidade do sistema sem controle. Quando se aplica a realimentação de estado

$$i_l = -K_1 \frac{dl_e}{dt} - K_0 l_e,$$

tem-se

$$l_e(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

com autovalores

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 6,96K_1 + \sqrt{48,52K_1^2 + 13,93K_0 + 1142,1}, \\ \lambda_2 &= 6,96K_1 - \sqrt{48,52K_1^2 + 13,93K_0 + 1142,1}.\end{aligned}$$

Aproximando os valores:

$$\lambda_1 = 7K_1 + \sqrt{49K_1^2 + 14K_0 + 1142}, \quad (9)$$

$$\lambda_2 = 7K_1 - \sqrt{49K_1^2 + 14K_0 + 1142}. \quad (10)$$

Calculando valores para  $\lambda_1$ :

$$\lambda_1 - 7K_1 = \sqrt{49K_1^2 + 14K_0 + 1142},$$

elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 - 14K_1\lambda_1 + 49K_1^2 &= 49K_1^2 + 14K_0 + 1142 \Rightarrow \\ \lambda_1^2 - 14K_1\lambda_1 - 14K_0 - 1142 &= 0. \end{aligned}$$

Escolhendo-se  $\lambda_1 = -100 \text{ rad/s}$ ,

$$10000 + 1400K_1 - 14K_0 - 1142 = 0 \Rightarrow$$

$$1400K_1 - 14K_0 + 8858 = 0. \quad (11)$$

Calculando valores para  $\lambda_2$ :

$$\lambda_2 - 7K_1 = -\sqrt{49K_1^2 + 14K_0 + 1142},$$

elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 - 14K_1\lambda_2 + 49K_1^2 &= 49K_1^2 + 14K_0 + 1142 \Rightarrow \\ \lambda_2^2 - 14K_1\lambda_2 - 14K_0 - 1142 &= 0. \end{aligned}$$

Escolhendo-se  $\lambda_2 = -300 \text{ rad/s}$ ,

$$90000 + 4200K_1 - 14K_0 - 1142 = 0 \Rightarrow$$

$$4200K_1 - 14K_0 + 8858 = 0. \quad (12)$$

Resolvendo-se o sistema com as equações (11) e (12) obtém-se os valores de  $K_0$  e  $K_1$ :

$$K_0 = -2224, \quad (13)$$

$$K_1 = -28,57. \quad (14)$$



## 5 Simulação da Dinâmica do Levitador

Com todos os parâmetros calculados e com todas as constantes obtidas, foi simulado o funcionamento do levitador com o *software* Scicos. Considerou-se nesta simulação a equação não-linear da dinâmica do levitador, a lei de controle por realimentação de estado, a indutância do eletroímã, o controle da sua corrente, a saturação do fotossensor e a amostragem de sinais com periodicidade de  $1\text{ ms}$ . O diagrama em blocos completo da simulação está esquematizado na Figura 1. Os resultados da simulação nas Figuras 2 e 3 mostram que a

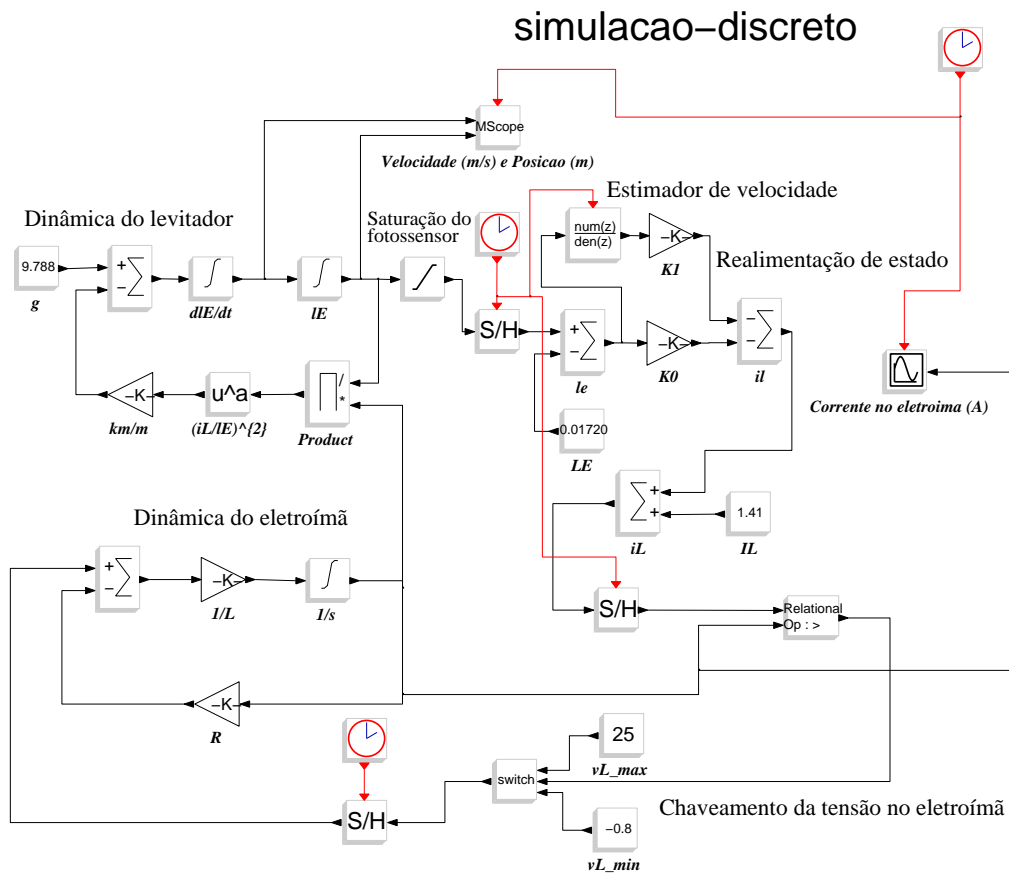


Figura 1: Diagrama em blocos da simulação da dinâmica do levitador incluindo o controle. plataforma controlada pela realimentação de estado atinge um equilíbrio estável.

## 6 Controle em Tempo Real

A simulação da dinâmica do levitador indica que a plataforma pode ser equilibrada pelo controle por realimentação de estado. A etapa agora consiste de testar o controlador e

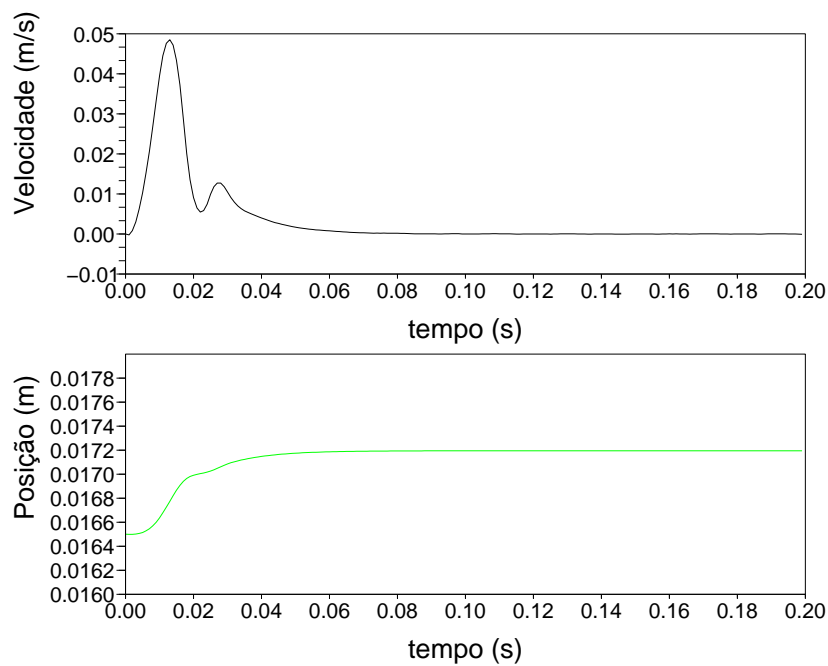


Figura 2: Posição e velocidade do levitador controlado.

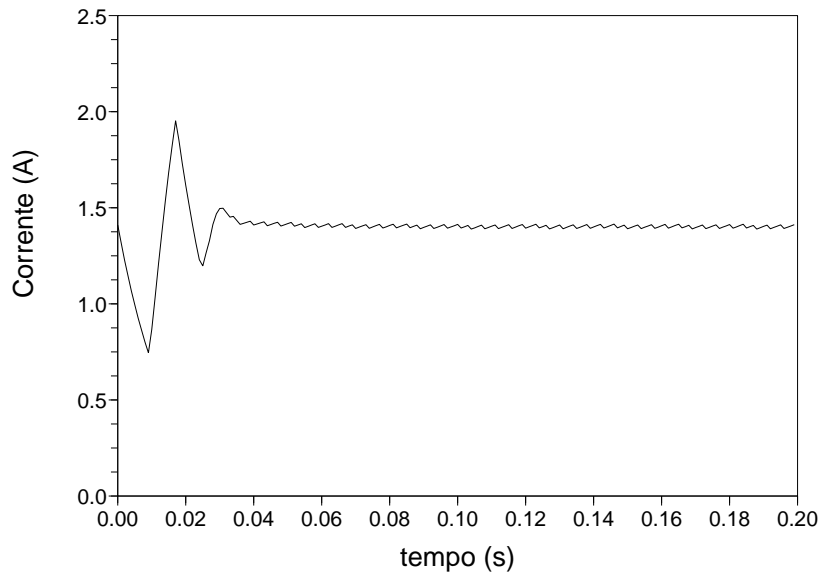


Figura 3: Corrente no eletroímã controlado.

observar na prática o que a simulação mostra: a plataforma levitando. Foram utilizados os *softwares* MatLab, Simulink (Gomes, Silva & Silva Neto 2003) e uma interface completa do ambiente de simulação para o mundo real em conjunto com o *software* Wincon (Silva et al.

2001). O modelo usado (controlador) apresentado no diagrama na Figura 4 é convertido para linguagem C, depois compilado resultando num programa executável. Foi montado

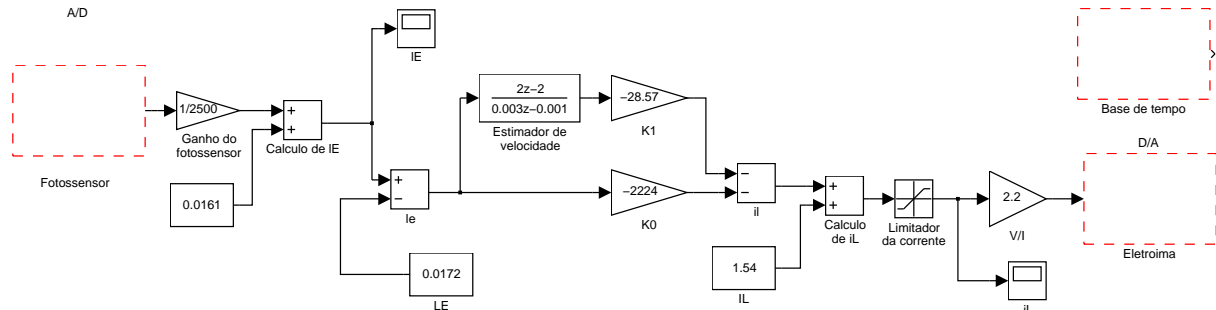


Figura 4: Diagrama em blocos do controlador para o levitador utilizado nos experimentos.

o experimento, conforme esquema mostrado no Projeto de Graduação (Silva et al. 2001, Fig. 1.1). No primeiro teste não foi obtido êxito, porém, permitiu observar que havia muito ruído no fotossensor, causando perturbação que atrapalhou o controle. Para reduzir os problemas no experimento, foram realizadas modificações no fotossensor.

## 7 Modificações no Fotossensor

Foram realizadas modificações no fotossensor para reduzir os ruídos que atrapalhavam o sistema de controle. Foi montado um circuito independente de polarização do fotossensor (fototransistor), mostrado na Figura 5 com alimentação independente, que gera menos ruído do que o circuito desenvolvido por (Silva et al. 2001). O fototransistor foi trocado

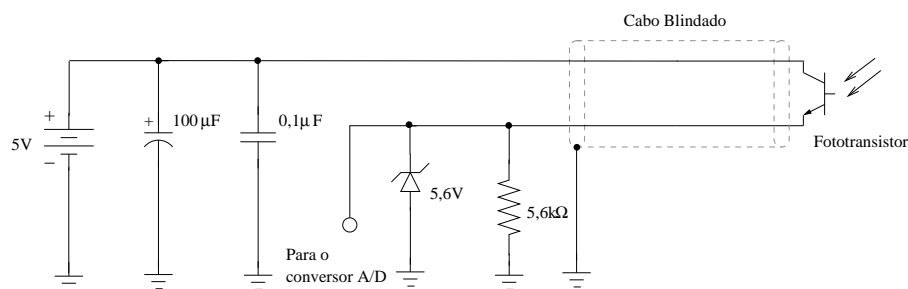


Figura 5: Circuito independente montado para reduzir ruído do fotossensor (fototransistor).

por outro mais rápido, o MRD300, pois o antigo tinha uma constante de tempo da ordem de  $1\text{ ms}$ , considerada grande, que instabilizava o sistema de controle. Foi necessário fazer um suporte para que o novo fototransistor fosse instalado no levitador, conforme a Figura 6, tomando-se o cuidado para que a lente de captação do fototransistor ficasse alinhada com a lâmpada incandescente. Foi trocado o cabo de conexão do fotossensor, que era um par trançado, por um cabo blindado, para reduzir a captação de campos eletromagnéticos

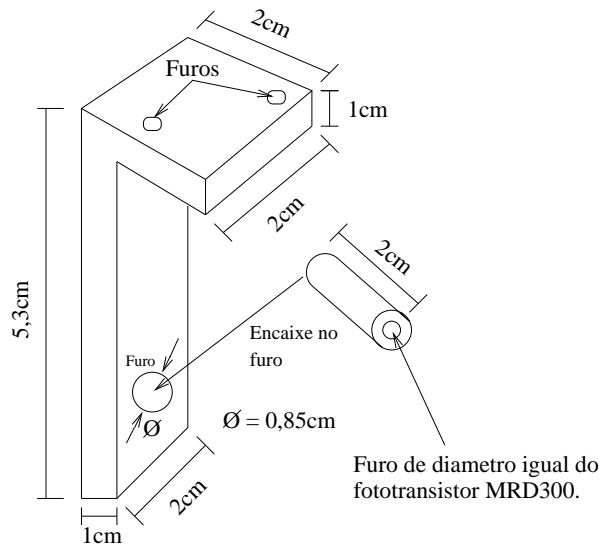


Figura 6: Suporte montado para fixar o fototransistor MRD300 no levitador.

externos, que geram ruídos. Além disso, foi retirado um capacitor de  $1\ \mu F$  da entrada do sistema de aquisição de dados (conversor A/D), pois este também causava um atraso na medida, que foi verificado durante os experimentos. Como o capacitor ficava em paralelo com o resistor de  $5,6\ k\Omega$  da Figura 5, resultava numa constante de tempo de  $5,6\ ms$ , demasiadamente grande. Com essas providências, verificou-se que o tempo de resposta do fototransistor é bem menor do que  $0,1\ ms$ .

## 8 Resultados Experimentais

Após todas as modificações feitas no fotossensor, foi realizado novamente o experimento considerando o controle em tempo real usando o *software* MATLAB. Foi montado o esquema do Projeto de Graduação (Silva et al. 2001, Fig. 1.1). Com as modificações, o sistema se tornou mais rápido, com tempo de resposta menor e isto foi verificado no experimento, pois um grau de liberdade da plataforma levitou. As Figuras 7 e 8 mostram a posição e a corrente medidas no experimento. A Tabela 3 mostra os parâmetros calculados para este sistema de controle.

## 9 Conclusões

Foram estudadas e analisadas as equações que descrevem a dinâmica de um grau de liberdade do levitador. O sistema de controle foi projetado e simulado. Foram feitas modificações no fotossensor e em seu circuito com o intuito de reduzir ruídos observados durante experimentos. Com a redução das perturbações do sistema, foi feito o controle em tempo real usando os *softwares* MatLab e Wincon. Um grau de liberdade da plataforma levitou

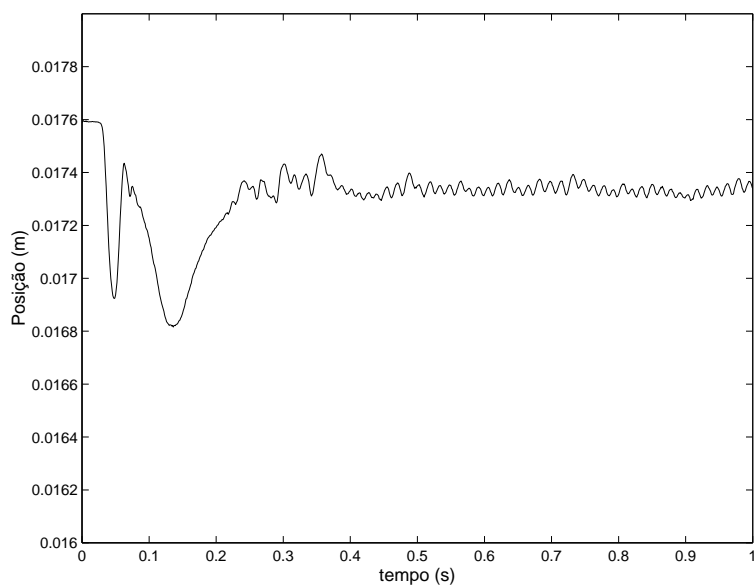


Figura 7: Posição da plataforma medida no experimento.

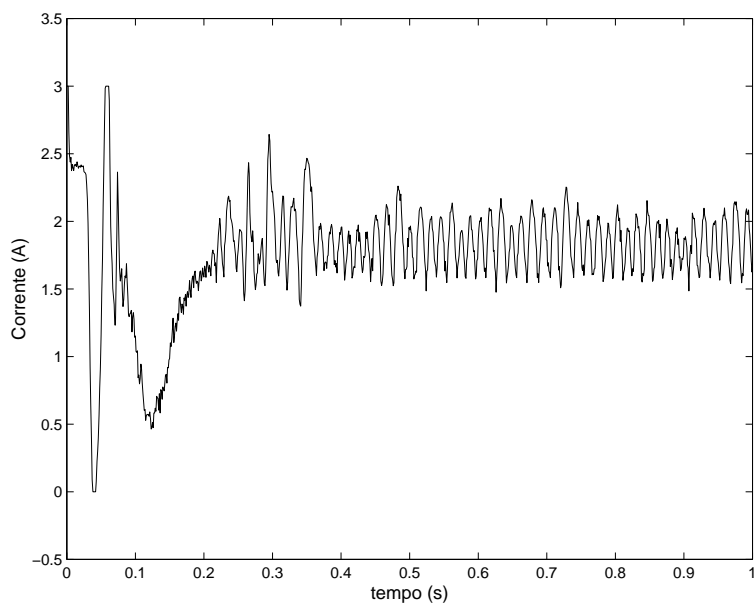


Figura 8: Corrente no eletroímã medida no experimento.

satisfatoriamente. O controle dos três graus de liberdade parece ser uma extensão natural deste trabalho.

Tabela 3: Valores medidos para o cálculo da constante de tempo do eletroímã.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Autovalor do controle por realimentação de estado	$\lambda_1$	-100	<i>rad/s</i>
Autovalor do controle por realimentação de estado	$\lambda_2$	-300	<i>rad/s</i>
Ganho do controle por realimentação de estado	$K_0$	-2224	—
Ganho do controle por realimentação de estado	$K_1$	-28,57	—

## Referências

- Gomes, R. R., Silva, D. C. B. V. & Silva Neto, J. L. (2003), Electromagnetic levitation using MATLAB real time control toolbox, *in* ‘Proc. IEEE Int. Symp. on Ind. Electron.’, Vol. 2, Rio de Janeiro, pp. 1144–1146.
- Gonçalves, C. L. (2007), ‘Controle de um levitador eletromagnético com três graus de liberdade’, Relatório Final de Pesquisa de Iniciação Científica — UERJ, Rio de Janeiro. Disponível em <http://www.lee.eng.uerj.br/~jpaulo/trabalhos-orientados.html>.
- Silva, A. L. M., Cutin, M. S. & Machado, S. G. (2001), ‘Sistema de levitação eletromagnético controlado por computador’, Projeto de Graduação em Engenharia Eletrônica — UERJ, Rio de Janeiro. Disponível em <http://www.lee.eng.uerj.br/~jpaulo/trabalhos-orientados.html>.