

# Planejamento da Disciplina Modelos Matemáticos Aplicados à Engenharia Elétrica I

Professor José Paulo Vilela Soares da Cunha

26 de março de 2011

## **Identificação**

**UERJ**

**Faculdade de Engenharia**

**Departamento de Eletrônica e Telecomunicações**

**Assunto:** Planejamento para a disciplina no primeiro semestre de 2011.

**Professor:** José Paulo Vilela Soares da Cunha

**Turma:** 01

**E-mails:** [jpaulo@uerj.br](mailto:jpaulo@uerj.br) e [jpaulo@lee.eng.uerj.br](mailto:jpaulo@lee.eng.uerj.br)

**Homepage:** <http://www.lee.eng.uerj.br/~jpaulo/modelos-matematicos-i.html>

## 1 Tópicos desta Disciplina

Esta disciplina aborda variáveis complexas e suas aplicações à engenharia elétrica. Seus principais tópicos são:

1. Números complexos.
2. Fasores.
3. Funções analíticas.
4. Teoria da integral.
5. Séries de potências.
6. Singularidades e resíduos.
7. Representações conformes.

## 2 Aspectos Históricos dos Números Complexos

*“L’histoire est une suite de mensonges sur lesquels on est d’accord.”* *Napoléon Bonaparte*

Os números complexos são usualmente apresentados a partir da equação do 2º grau (e.g., (Ávila 2000, pp. 1–2)),

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ , cujas raízes são dadas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac. \quad (3)$$

A equação (1) tem raízes reais (i.e.,  $x \in \mathbb{R}$ ) quando o discriminante  $\Delta \geq 0$ . Quando  $\Delta < 0$ , não há solução real para esta equação pois  $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ . Então, é introduzido o conjunto dos números imaginários  $\mathbb{I}$ , cuja unidade é

$$j := \sqrt{-1}. \quad (4)$$

Na Matemática, o símbolo usual para a unidade imaginária é  $i$ . No entanto, em Engenharia Elétrica se adota o símbolo  $j$  para evitar confusão com o símbolo de corrente elétrica. Assim, as

raízes da equação (1) são dadas por

$$x = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad \Delta < 0, \quad (5)$$

que pertencem ao conjunto dos números complexos (i.e.,  $x \in \mathbb{C}$ ).

Embora os números complexos sejam usualmente apresentados a partir da solução da equação do 2º grau, parecem ter sido desenvolvidos para a solução da equação do 3º grau no século XVI (Ávila 2000, p. 2). Ao aluno interessado, sugere-se ler o histórico bastante interessante sobre os números complexos é apresentado por Merino (2006).

## 2.1 Números complexos aplicados à Engenharia Elétrica

A primeira aplicação de números complexos à teoria de circuitos elétricos parece ter sido realizada pelo cientista alemão Hermann von Helmholtz (1821–1894) (Windred 1932). A aplicação de números complexos na análise de circuitos elétricos de corrente alternada (CA) foi disseminada nos Estados Unidos da América por Arthur Edwin Kennelly (1861–1939) e Charles Proteus Steinmetz (1865–1923) (Weber & Nebeker 1994, p. viii), com o auxílio de Ernst Julius Berg (1871–1941) (Hensel 1994) no final do século XIX. Em 1893, Kennelly adotou o termo *impedância*, inventado por Heaviside, assim como os números complexos para os elementos dos circuitos elétricos CA, o que foi seguido por Steinmetz (Weber & Nebeker 1994, p. 108). Desde então, os números complexos são fundamentais na Engenharia Elétrica.

## 2.2 Definição formal de números complexos

Para o desenvolvimento formal da teoria de números complexos e de funções de variável complexa é conveniente definí-los formalmente, como em (Sidorov, Fedoryuk & Shabunin 1985, p. 9):

**Definição 1** Um número complexo é um par  $(x, y)$  de números reais  $x$  e  $y$  para o qual o conceito de igualdade e as operações de adição e de multiplicação são definidos como segue:

1. Dois números complexos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são iguais se e somente se  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .
2. A soma de dois números complexos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  é o número complexo  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .
3. O produto de dois números complexos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  é o número complexo  $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ .

A partir desta definição e de conceitos sobre funções de variáveis reais, pode-se desenvolver a *Teoria de Funções de Variáveis Complexas*, que é parcialmente apresentada nesta disciplina.

### 3 Orientação para o Estudo desta Disciplina

Recomenda-se o livro (Ávila 2000) para o estudo de *variáveis complexas*. Opcionalmente, o aluno poderá utilizar outros livros sobre *variáveis complexas* como, por exemplo, (Churchill 1975).

Para o estudo de fasores, recomenda-se que o aluno adote um livro de análise de circuitos elétricos que utilize a *exponencial complexa*, sugerindo-se (Dorf & Svoboda 2001).

Nas sub-seções seguintes, apresenta-se uma lista de seções de livros que devem ser estudadas e alguns exercícios propostos. Ao longo do curso serão propostas mais listas de exercícios, que serão divulgadas através da [homepage da disciplina](#).

Recomenda-se que o aluno primeiramente resolva os problemas numéricos manualmente e, posteriormente, utilize algum *software* como o [MatLab](#) ou os *softwares livres* [Scilab](#) e [Octave](#) para verificar os resultados, seguindo-se a sugestão de Chen (1999, p. 78). Orientações para o uso do [Scilab](#) estão disponíveis em <http://www.lee.eng.uerj.br/~elaine>.

#### 3.1 Números complexos

Recomenda-se o estudo do Capítulo 1 do livro (Ávila 2000).

São recomendados todos os exercícios do Capítulo 1 do livro (Ávila 2000).

#### 3.2 Fasores

Os fasores são aplicados na análise de circuitos elétricos lineares em regime senoidal permanente. Esta é a aplicação mais básica de números complexos na Engenharia Elétrica. Recomenda-se o estudo das Seções 10.3 a 10.7 do livro (Dorf & Svoboda 2001). O estudo mais detalhado da análise de circuitos usando fasores será realizado na disciplina Circuitos Elétricos I.

São recomendados os exercícios P 10.3-1 a P 10.6-2 e P 10.7-1 a P 10.7-5 do livro (Dorf & Svoboda 2001).

#### 3.3 Funções analíticas

Recomenda-se o estudo do Capítulo 2 do livro (Ávila 2000).

São recomendados todos os exercícios do Capítulo 2 do livro (Ávila 2000).

### 3.4 Teoria da integral

Recomenda-se o estudo da primeira Seção até a Seção *Fórmula Integral de Cauchy* do Capítulo 3 do livro (Ávila 2000, pp. 75–109).

São recomendados os exercícios em (Ávila 2000, pp. 75–109).

### 3.5 Séries de potências

Recomenda-se o estudo do Capítulo 4 do livro (Ávila 2000).

São recomendados todos os exercícios do Capítulo 4 do livro (Ávila 2000).

### 3.6 Singularidades e resíduos

Recomenda-se o estudo da primeira Seção até a Seção *Teorema do Resíduo* do Capítulo 5 do livro (Ávila 2000, pp. 151–161) e o estudo da Seção *Resíduos Logarítmicos e Princípio do Argumento* do Capítulo 5 do livro (Ávila 2000, pp. 175–178).

A disciplina Modelos Matemáticos Aplicados à Engenharia Elétrica II apresentará a *Transformada de Laplace*, que é muito útil na resolução de equações diferenciais ordinárias lineares, na análise de circuitos elétricos e em sistemas de controle. Para realizar a *Transformada de Laplace Inversa*, pode-se utilizar a *expansão em frações parciais*, que é uma aplicação importante de singularidades e resíduos. Por isto, devem ser estudadas as Seções 2.5 e 2.6 do livro (Ogata 2003), que abordam a *expansão em frações parciais*.

O *Princípio do Argumento* pode ser utilizado na análise de estabilidade de amplificadores em malha fechada desenvolvida por Nyquist (1932), que também é bastante aplicada em sistemas de controle automático (Ogata 2003, Seção 8.7).

São recomendados os exercícios em (Ávila 2000, pp. 151–161). Recomenda-se, também, realizar as expansões em frações parciais nos exercícios B.2.11 e B.2.13 a B.2.16 do livro (Ogata 2003).

### 3.7 Representações conformes

Antes de iniciar este tópico, deve-se estudar a Seção *Funções Harmônicas* no Capítulo 3 do livro (Ávila 2000, pp. 109–117). Então, prossegue-se no estudo do Capítulo 8 do livro (Ávila 2000).

São recomendados todos os exercícios do Capítulo 8 do livro (Ávila 2000), além dos exercícios da Seção *Funções Harmônicas* no Capítulo 3 (Ávila 2000, pp. 116–117).

## 4 Consultas ao Professor

O professor poderá ser consultado em [horários](#) e locais divulgados na *homepage* da disciplina. Os alunos também poderão consultar o professor através dos *e-mails*:

[jpaulo@uerj.br](mailto:jpaulo@uerj.br) e [jpaulo@lee.eng.uerj.br](mailto:jpaulo@lee.eng.uerj.br)

### 4.1 Mais informações

Para obter mais informações (datas das provas, trabalhos, listas de exercícios, etc.), o aluno deverá consultar assiduamente a *homepage* da disciplina:

<http://www.lee.eng.uerj.br/~jpaulo/modelos-matematicos-i.html>

**Se for necessário, o planejamento desta disciplina poderá ser revisado.**

## Referências

- Ávila, G. (2000). *Variáveis Complexas e Aplicações*, 3<sup>a</sup> edn, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- Chen, C.-T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3<sup>rd</sup> edn, Oxford University Press.
- Churchill, R. V. (1975). *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, McGraw-Hill do Brasil.
- Dorf, R. C. & Svoboda, J. A. (2001). *Introduction to Electric Circuits*, 5<sup>th</sup> edn, John Wiley & Sons.
- Hensel, S. (1994). Looking back — Ernst Julius Berg — educator and proselytizer of Heaviside's calculus, *IEEE Potentials* **13**(3): 57–60.
- Merino, O. (2006). A short history of complex numbers, *Technical report*, University of Rhode Island, Kingston.
- Nyquist, H. (1932). Regeneration theory, *Bell System Tech. J.* **11**: 126–147.
- Ogata, K. (2003). *Engenharia de Controle Moderno*, 4<sup>a</sup> edn, Pearson Brasil.
- Sidorov, Y. V., Fedoryuk, M. V. & Shabunin, M. I. (1985). *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*, Mir.
- Weber, E. & Nebeker, F. (1994). *The Evolution of Electrical Engineering: A Personal Perspective*, IEEE Press.
- Windred, G. (1932). The relation between pure and applied electrical theory: with special reference to mathematical methods, *Isis* **18**(1): 184–190.