



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: Controle por Computador



Aula: **Parte I: Função de Transferência de Sistemas em Tempo Discreto**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 29 de agosto de 2024.



Referências

- Franklin, G. F., Powell, J. D. & Workman, M. L. (1990). Digital Control of Dynamic Systems, 2nd ed., Addison-Wesley. (*)

(*) Organizado para as Seções 2.3 a 2.3.4 da 2^a Edição.

CONSIDERA-SE A EQUAÇÃO A DIFERENÇAS:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 u[n] + \dots + b_M u[n-M]$$

DEFINEM-SE:

$$Y(z) := \mathcal{Z}\{y[n]\}$$

$$U(z) := \mathcal{Z}\{u[n]\}$$

TRANSFORMADAS $\approx$ BILATERAIS

OU
UNILATERAIS COM

APLICA-SE A TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$ À EQUAÇÃO
A DIFERENÇAS COM CONDIÇÕES INICIAIS NULAS:

$$\mathcal{Z}\{y[n] + \dots + a_N y[n-N]\} = \mathcal{Z}\{b_0 u[n] + \dots + b_M u[n-M]\}$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_N z^{-N} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_M z^{-M} U(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) [1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}] = U(z) [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}]$$

$$\Rightarrow H(z) := \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{POTÊNCIAS} \\ \text{NEGATIVAS} \end{array}$$

$$\text{OU: } H(z) \times \frac{z^{\max(N, M)}}{z^{\max(N, M)}} = \frac{b_0 z^{\max(N, M)} + b_1 z^{\max(N, M)-1} + \dots + b_M z^{\max(N, M)-M}}{z^{\max(N, M)} + \dots + a_N z^{\max(N, M)-N}}$$

↑ POTÊNCIAS POSITIVAS

Disciplina: Controle por Computador



Aula: **Parte II: Amostragem de Sinais do Tempo Contínuo**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 29 de agosto de 2024.



Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications, Seções 7.3 e 7.4.
- Oppenheim, A. V. & Schafer, R. W. (2013). Processamento em Tempo Discreto de Sinais, 3^a ed., Pearson Brasil.
- Oppenheim, A. V., Schafer, R. W. & Buck, J. R. (1999). Discrete-Time Signal Processing, 2nd ed., Prentice-Hall. (*)

(*) Organizado para as Seções 4.0 a 4.3 da 2^a Edição.

AMOSTRAGEM PERIÓDICA

$$x[n] = x_c(nh) \quad \begin{array}{l} h \in \mathbb{R}, h > 0 \text{ É O PERÍODO DE AMOSTRAGEM} \\ \uparrow \text{SINAL NO TEMPO CONTÍNUO } t \in \mathbb{R} \\ \uparrow \text{SEQUÊNCIA DE AMOSTRAS } n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

REPRESENTAÇÃO POR DIAGRAMA DE BLOCOS

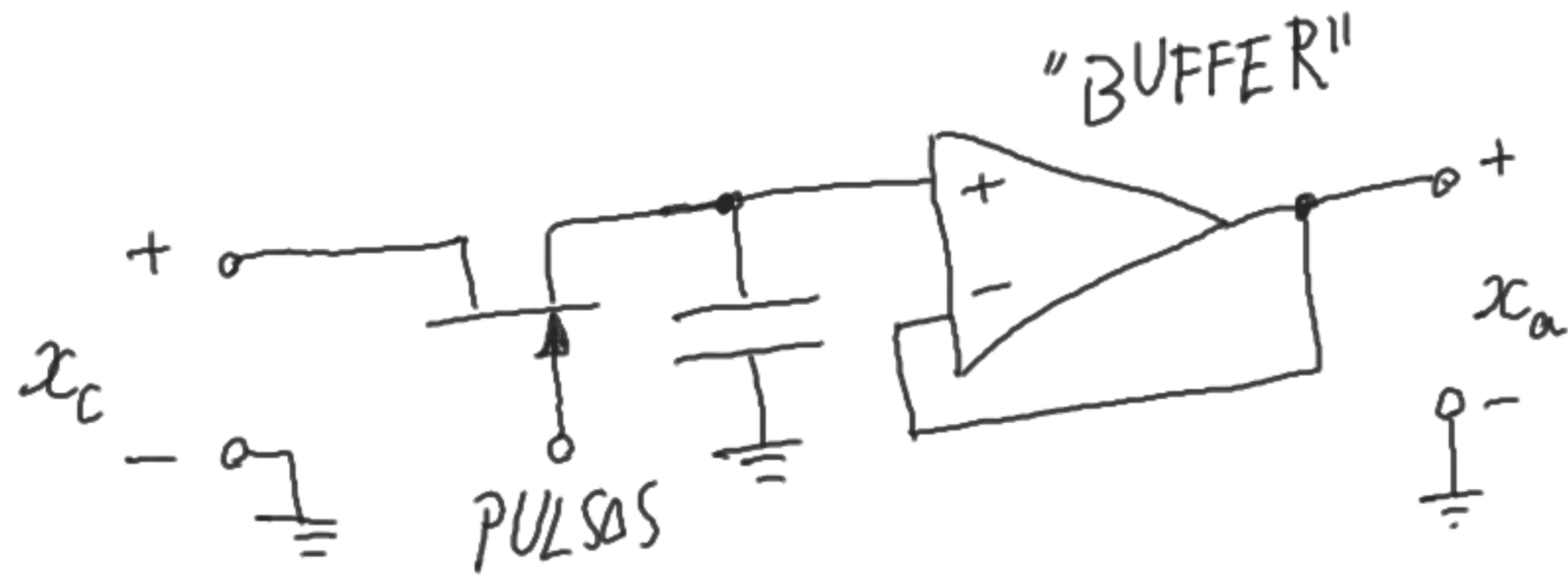


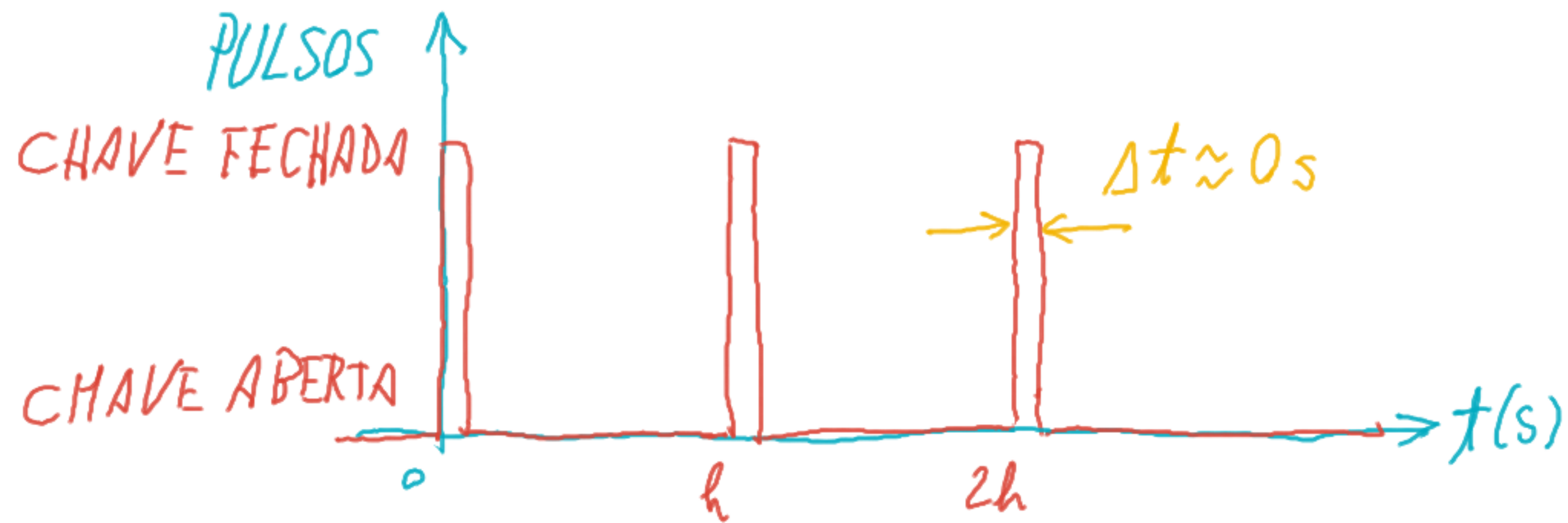
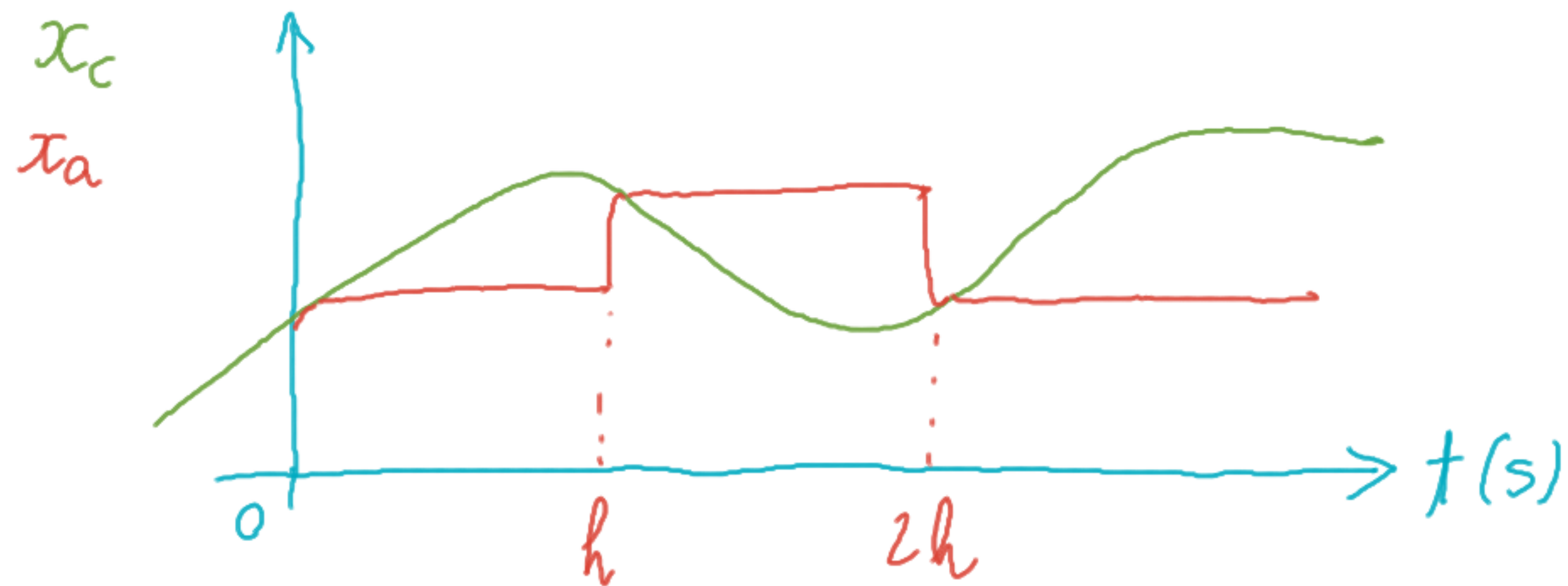
REALIZAÇÕES PRÁTICAS DA AMOSTRAGEM



S&H - "SAMPLE & HOLD"

PULSOS COM PERIODICIDADE h





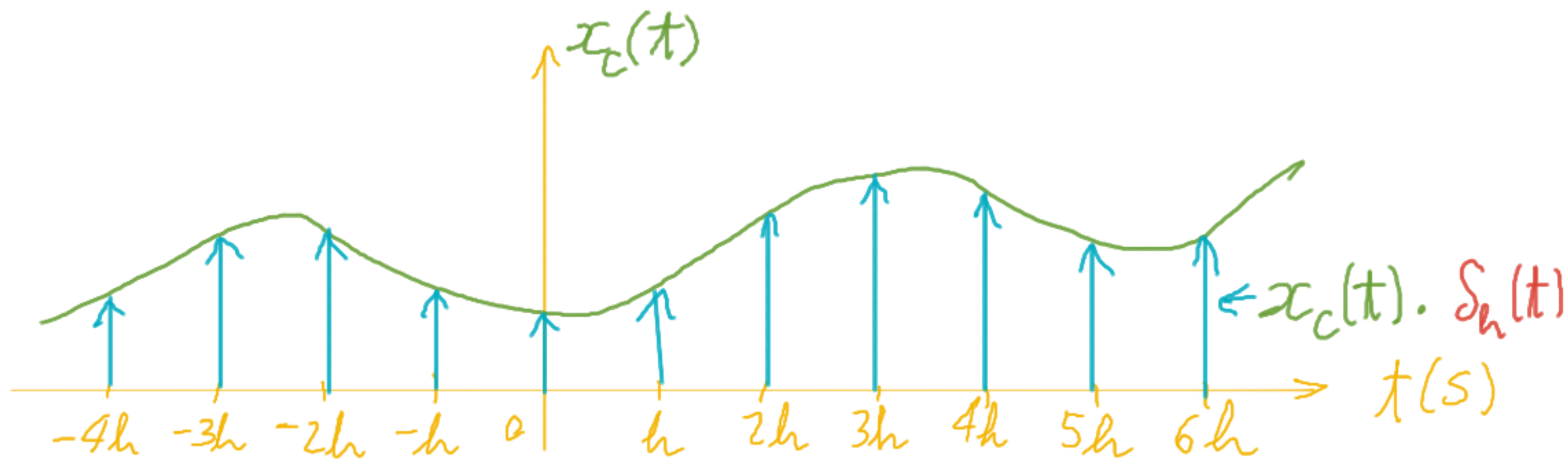
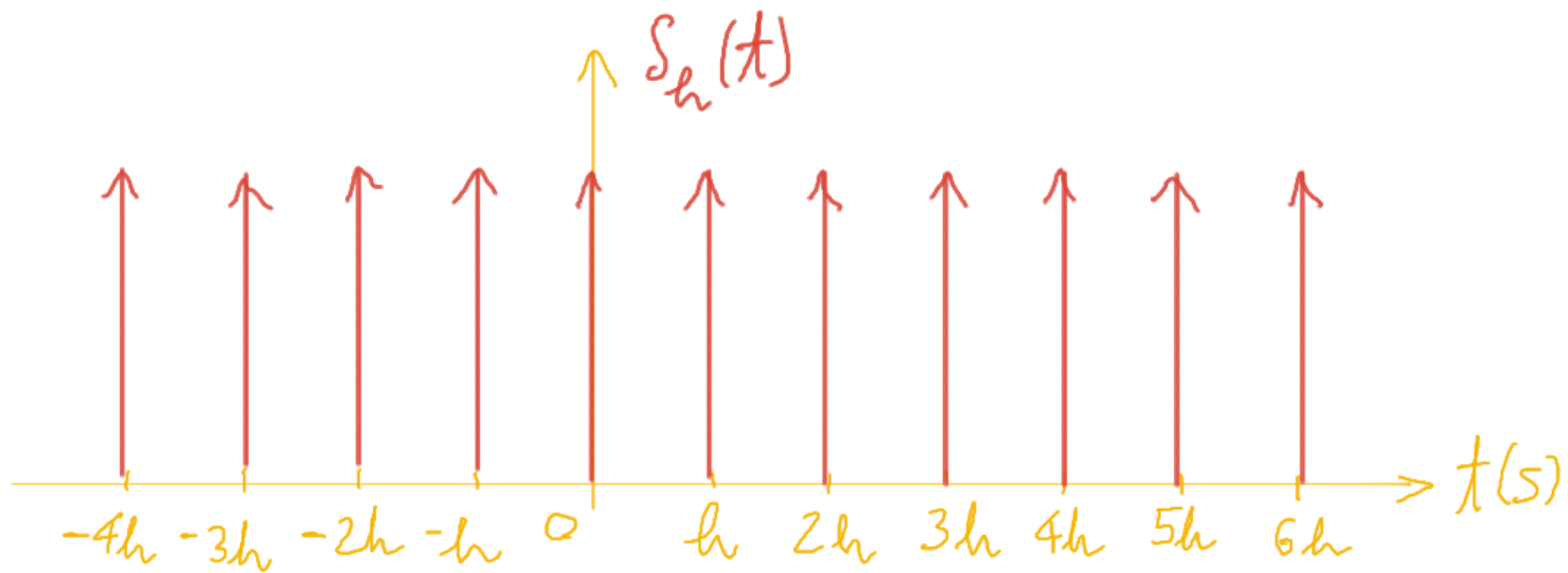
ESPECTRO DO SINAL AMOSTRADO

- AMOSTRAGEM PERIÓDICA REALIZADA PELO TREM DE IMPULSOS UNITÁRIOS:

$$s_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kh)$$

- SINAL AMOSTRADO:

$$x_a(t) = x_c(t) s_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c(kh) \delta(t - kh)$$



TRANSFORMADA DE FOURIER DO TREM DE IMPULSOS:

$$S(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta_h(t)\} = \frac{2\pi}{h} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\Omega_s)$$

NA QUAL $\Omega_s := \frac{2\pi}{h}$ É A FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM (rad/s).

TRANSFORMADA DE FOURIER DO SINAL AMOSTRADO:

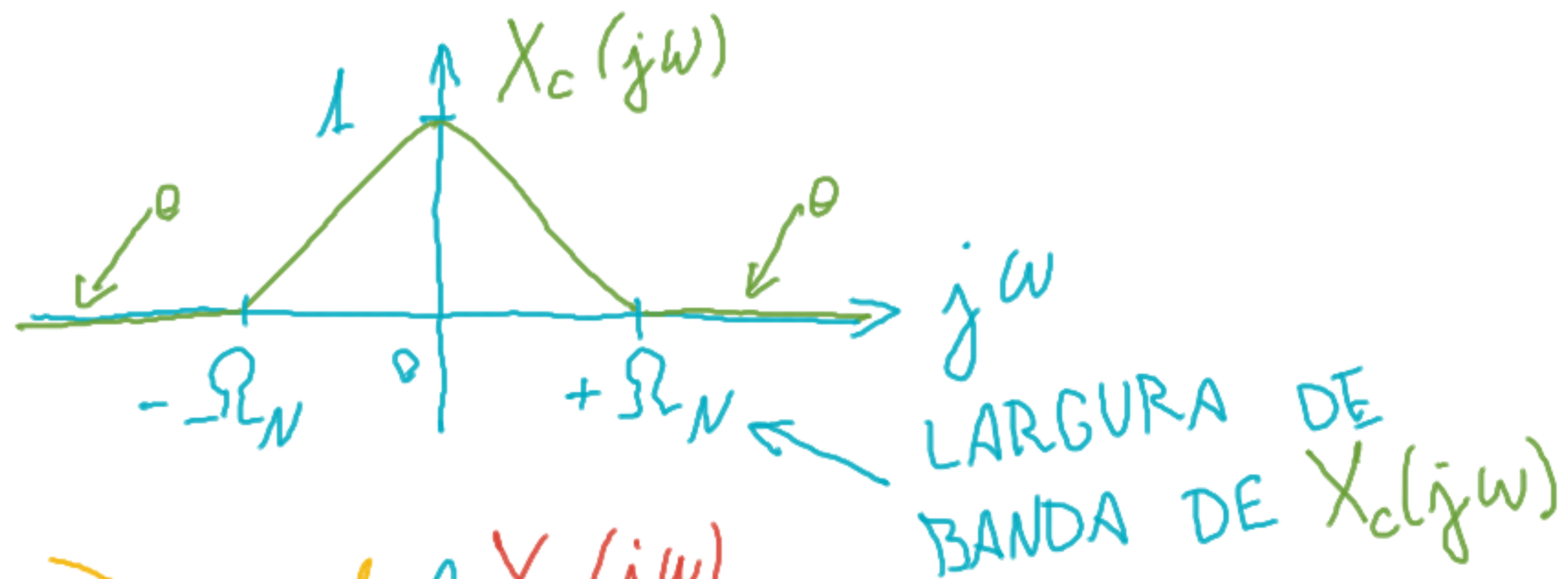
$$\begin{aligned} X_a(j\omega) &= \mathcal{F}\{x_a(t)\} = \mathcal{F}\{x_c(t) \delta_h(t)\} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\mathcal{F}\{x_c(t)\}}_{X_c(j\omega)} * \mathcal{F}\{\delta_h(t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega) S(j\omega - j\Omega) d\Omega = \end{aligned}$$

$$X_a(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega) \left[\frac{2\pi}{h} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \Omega - k\Omega_s) \right] d\Omega$$

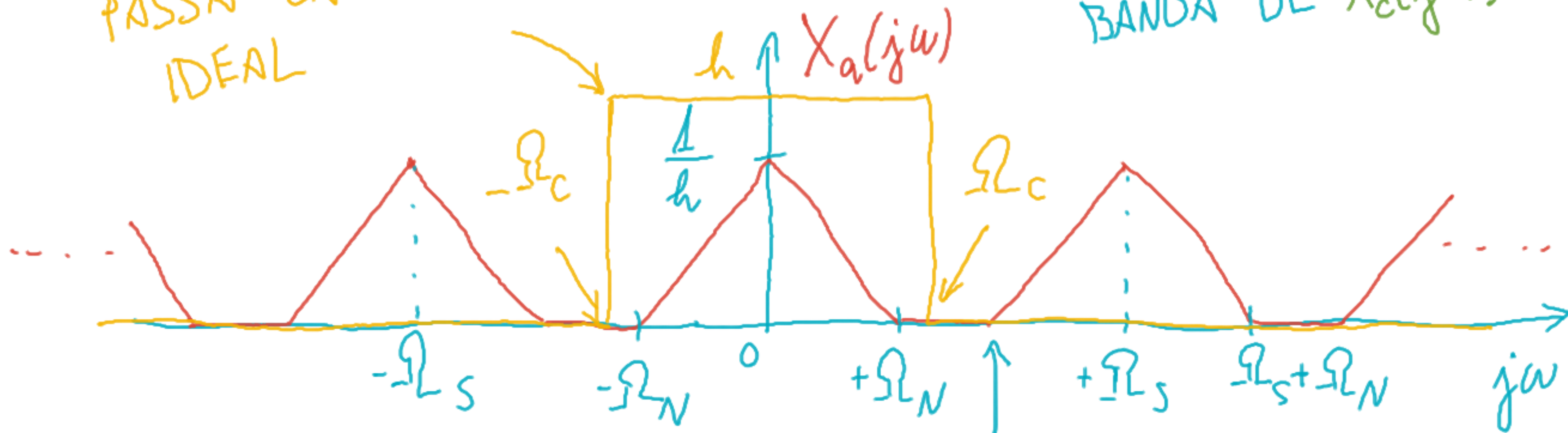
$$= \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega) \delta(\omega - \Omega - k\Omega_s) d\Omega$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - jk\Omega_s)$$

EXEMPLO:



PASSA-BAIXAS
IDEAL

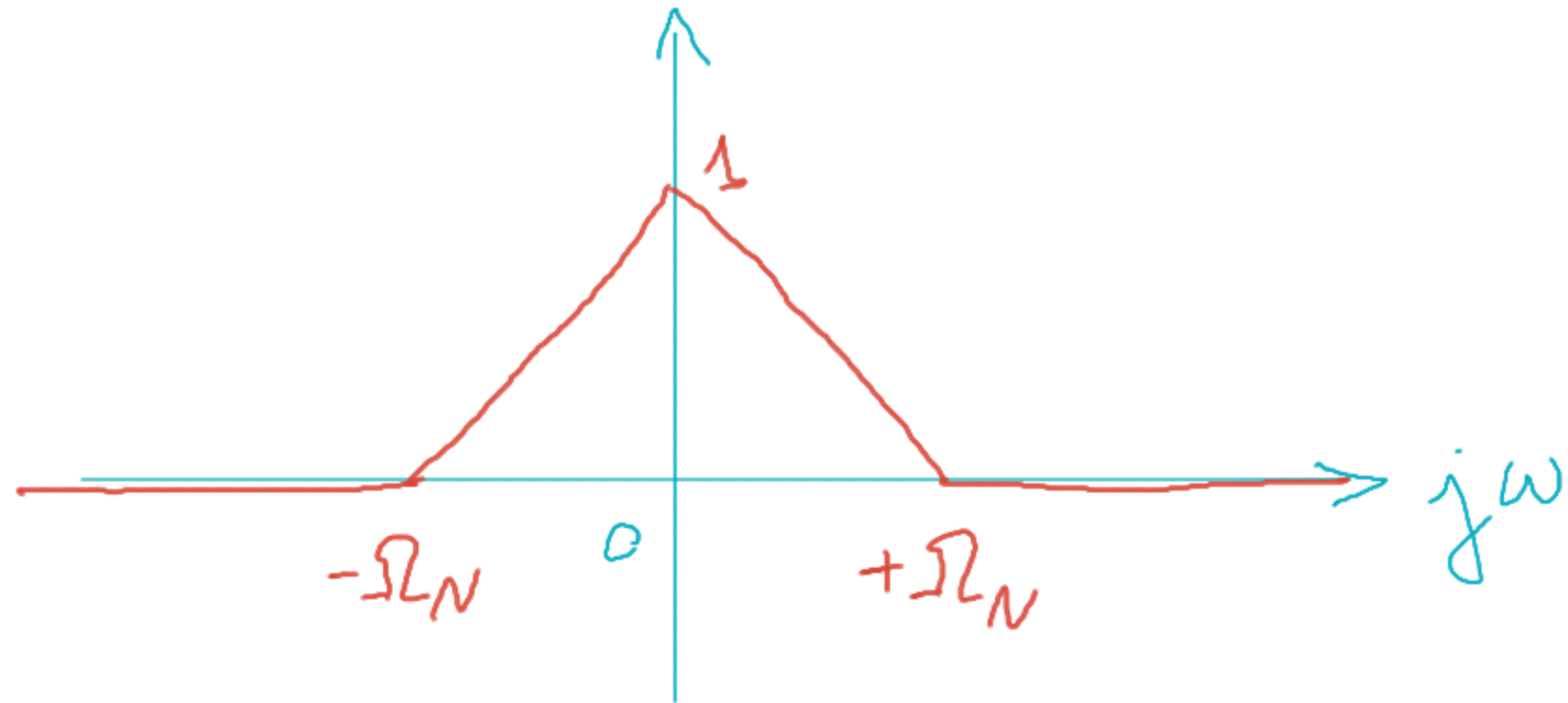


$$\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$$

Ω_c é a frequência de corte

SINAL RECUPERADO:

$$X_r(j\omega) \equiv X_c(j\omega)$$

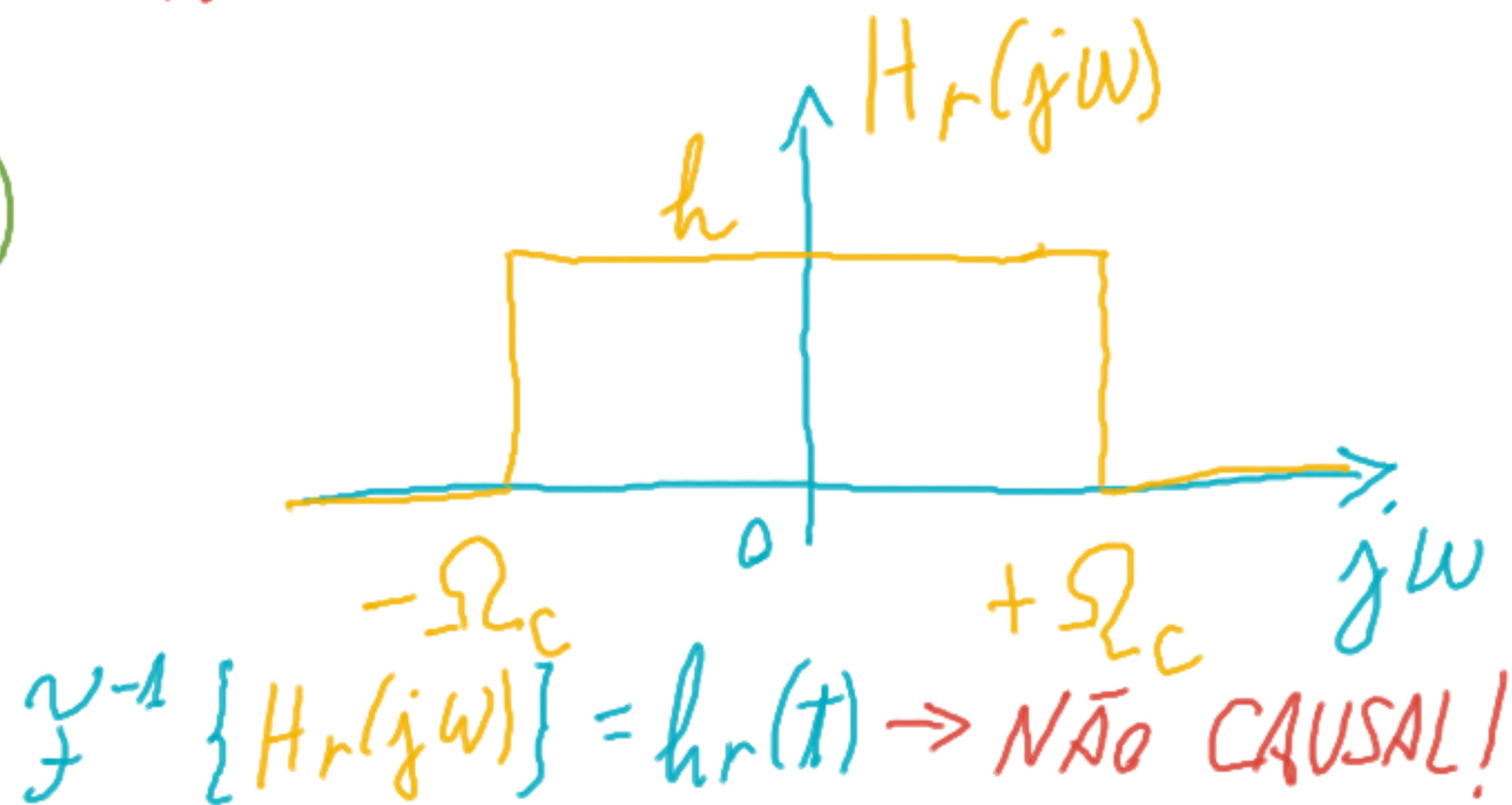


• SUPERPOSIÇÃO ESPECTRAL ("ALIASING") SERÁ EVITADA SE $\Omega_N < \Omega_s - \Omega_N$
 $\Rightarrow \boxed{2\Omega_N < \Omega_s}$ • TEOREMA DE NYQUIST-SHANNON.

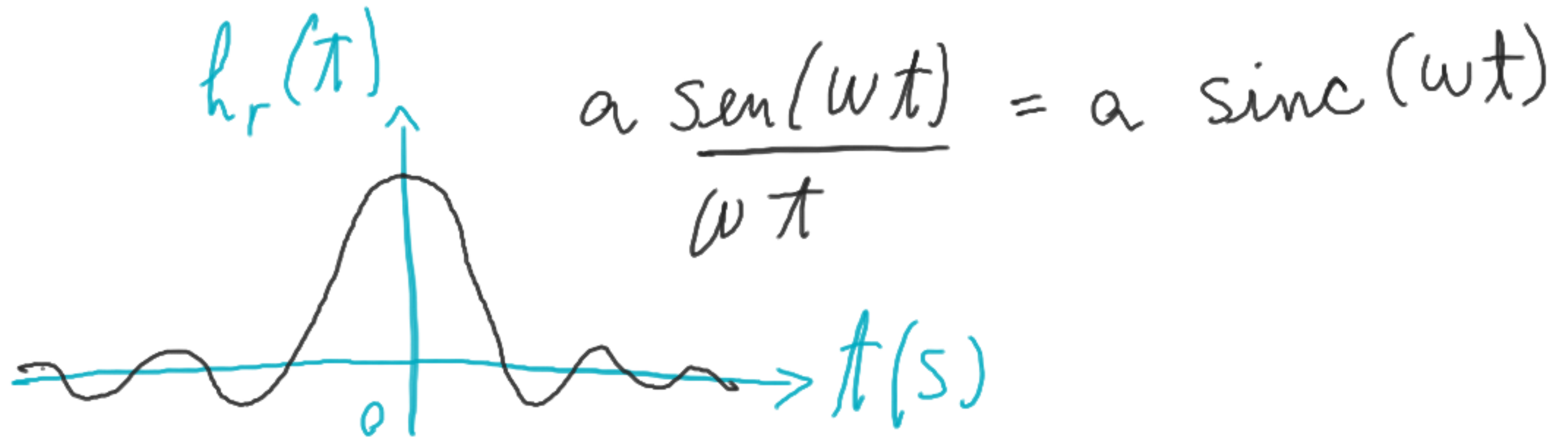
• FILTRO RECONSTRUTOR:



$$x_r(t) = x_c(t)$$



RESPOSTA IMPULSIVA DO FILTRO RECONSTRUTOR IDEAL:



NÃO CAUSAL $\Rightarrow$ NÃO É REALIZÁVEL
FISICAMENTE!