

Disciplina: Controle por Computador



**Aula: Parte I: Análise de Sistemas em Tempo Discreto:
Controlabilidade, Alcançabilidade e
Estabilizabilidade**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 26 de setembro de 2024.



Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 3.4 da 3^a Edição.

$$u \in \mathbb{R}^r, x \in \mathbb{R}^n$$

CONSIDERA-SE O SISTEMA:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \geq 0. \quad (3.15)$$

DEF. 3.7 - CONTROLABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É CONTROLÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE A ORIGEM SEJA ATINGIDA EM TEMPO FINITO $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

DEF. 3.8 - ALCANÇABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É ALCANÇÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE UM ESTADO ARBITRÁRIO $x_p \in \mathbb{R}^n$ SEJA ATINGIDO EM TEMPO FINITO $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

ESTABILIZABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É ESTABILIZÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE A ORIGEM SEJA ATINGIDA AO MENOS ASSINTOTICAMENTE $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ (EM TEMPO INFINITO).

CONCLUI-SE:

ALCANÇABILIDADE



CONTROLABILIDADE



ESTABILIZABILIDADE

SOLUÇÃO DA EQ. (3.15):

$$\begin{aligned}x(n) &= \Phi^n x_0 + \Phi^{n-1} \Gamma u(0) + \dots + \Phi \Gamma u(n-2) + \Gamma u(n-1) \\&= \Phi^n x_0 + W_c U,\end{aligned}$$

NA QUAL:

$$W_c := [\Gamma \quad \Phi \Gamma \quad \Phi^2 \Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1} \Gamma] \in \mathbb{R}^{n \times nr}$$

$$U := \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

• SE W_c FOR INVERSÍVEL PELA ESQUERDA, ENTÃO:

$$W_c U = x(n) - \Phi^n x_0 \Rightarrow \underbrace{W_c^{-1} W_c}_I U = W_c^{-1} (x(n) - \Phi^n x_0)$$

$$\Rightarrow U = W_c^{-1} (\underbrace{x(n)}_{x_p} - \Phi^n x_0)$$

• SE $r=1$, ENTÃO $W_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, LOGO SERÁ INVERSÍVEL

s.s.s. $\det(W_c) \neq 0$.

• SE $r \geq 1$, ENTÃO $W_c \in \mathbb{R}^{n \times nr}$ SERÁ INVERSÍVEL
PELA ESQUERDA S.S.S. $\text{posto}(W_c) = n$ (COMPLETO).

TEOREMA 3.7: O SISTEMA (3.15) É
ALCANÇÁVEL S. S. S. posto $(W_c) = m$.

Ex. 1.a:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} u(k)$$

ALCANÇÁVEL



CONTROLÁVEL



ESTABILIZÁVEL

Ex. 1.6:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u(k)$$

NÃO ALCANÇÁVEL

$|\lambda_1| > 1 \Rightarrow$ INSTÁVEL

E NÃO CONTROLÁVEL

NÃO CONTROLÁVEL

NÃO ESTABILIZÁVEL

$$x_2(k) = 2^k x_2(0)$$

$\downarrow$
 ∞

Ex. v.c:

NÃO CONTROLÁVEL NEM ALCANÇÁVEL

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0,5 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u(k)$$

ALCANÇÁVEL

NÃO ALCANÇÁVEL

NÃO CONTROLÁVEL

É ESTABILIZÁVEL

$|\lambda_2| = |\lambda_1| < 1 \Rightarrow$ ESTÁVEIS
ASSINTOTICAMENTE
MAS NÃO CONTROLÁVEIS

$$x_2(k) = 0,5^k x_2(0)$$

↓
0

Ex. v.d:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u(k)$$

Diagram annotations:
- An orange arrow points from the word "ALCANÇÁVEL" to the top-right element of the state matrix (0).
- Another orange arrow points from the word "ALCANÇÁVEL" to the bottom-right element of the state matrix (0,5).
- A red arrow points from the word "NÃO ALCANÇÁVEL" to the top-left element of the state matrix (0).
- The element 0 in the middle-right position of the state matrix is circled in orange.

NÃO ALCANÇÁVEL

$|\lambda_1| < 1 \Rightarrow$ ESTÁVEL

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ CONTROLÁVEL

$$x_2(k) = 0^k x_2(0)$$

É
É
CONTROLÁVEL
 $\Downarrow$
ESTABILIZÁVEL

← 0

FORMA CANÔNICA CONTROLÁVEL (pp. 96-97)

$$z(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} -a_0 & -a_1 \dots -a_{n-1} \\ \hline 1 & 0 \\ & \vdots \\ 0 & 1 \\ & \vdots \\ 0 & 0 \end{array} \right] z(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

↑ MATRIZ COMPANHEIRA

$$y(k) = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}] z(k)$$

É ALCANÇÁVEL! $\Rightarrow$ É CONTROLÁVEL

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DA FORMA CANÔNICA
CONTROLÁVEL:

$$H(z) := \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}$$

Disciplina: Controle por Computador



**Aula: Parte II: Análise de Sistemas em Tempo Discreto:
Observabilidade e Detectabilidade**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 26 de setembro de 2024.



Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 3.4 da 3^a Edição.

OBSERVABILIDADE

CONSIDERA-SE:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k), \quad x(0) = x_0, \\ y(k) &= C x(k) + D u(k), \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

NA QUAL

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R}^p.$$

SOLUÇÃO:

$$x(n) = \Phi^n x_0 + W_c U \leftarrow \text{AULA DE ALCANÇABILIDADE (3.16)}$$

$$\text{ENTÃO: } y(n) = C \Phi^n x_0 + C W_c U + D u(n)$$

DEFINIÇÃO 3.9 (p. 98): O ESTADO $x_0 \neq 0$ É NÃO-OBSERVÁVEL SE EXISTIR $k_1 \geq n-1$ TAL QUE $y(k) = 0$ PARA $k \in [0, k_1]$ QUANDO $x(0) = x_0$ E $u(k) = 0$ PARA TODO $k \in [0, k_1]$.

DEFINIÇÃO (p. 98 SEM DESTAQUE): O SISTEMA (3.15) É OBSERVÁVEL SE $\exists k$ FINITO TAL QUE O CONHECIMENTO DAS SEQUÊNCIAS DE ENTRADA $u(0), \dots, u(k-1)$ E SAÍDA $y(0), \dots, y(k-1)$ FOR SUFICIENTE PARA ESTIMAR O ESTADO INICIAL x_0 .

SEQUÊNCIA DE SAÍDA:

$$y(0) = Cx_0 + \underbrace{D u(0)}_{W_0 U}$$

$$y(1) = Cx(1) + Du(1) = C\Phi x_0 + \underbrace{C\Gamma u(0) + Du(1)}_{W_1 U}$$

$$y(2) = Cx(2) + Du(2) = C\Phi^2 x_0 + \underbrace{C\Phi\Gamma u(0) + C\Gamma u(1) + Du(2)}_{W_2 U}$$

$$\vdots$$
$$y(n-1) = C\Phi^{n-1} x_0 + \underbrace{C\Phi^{n-2}\Gamma u(0) + \dots + Du(n-1)}_{W_{n-1} U}$$

ENTÃO:

$$y(0) = Cx_0 + W_0 U$$

$$y(1) = C\Phi x_0 + W_1 U \quad \dots \quad y(n-1) = C\Phi^{n-1} x_0 + W_{n-1} U$$

NAS QUAIS:

$$U := \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

$W_i \rightarrow$ MATRIZES APROPRIADAS

$$W := \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \vdots \\ W_{n-1} \end{bmatrix}$$

DEFINI-SE

$$Y := \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix},$$

ENTÃO:

$$Y = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$x_0 + WU \Leftrightarrow Y = W_0 x_0 + WU \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}}_{W_0 \in \mathbb{R}^{p \times n}}$$

← MATRIZ DE OBSERVABILIDADE

$$\Rightarrow W_0 x_0 = Y - WU$$

SE $\exists W_0^{-1}$ PELA ESQUERDA, ENTÃO:

$$W_0^{-1} W_0 x_0 = W_0^{-1} y - W_0^{-1} W U \Rightarrow$$

$I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\Rightarrow x_0 = W_0^{-1} y - W_0^{-1} W U$$

TEOREMA 3.8: O SISTEMA (3.15) É OBSERVÁVEL

S.S.S. $\text{posto}(W_0) = m$ (COMPLETO).

NOTA: $\text{posto}(W_0) = m \Leftrightarrow \exists W_0^{-1}$ PELA ESQUERDA.

DEFINIÇÃO 3.10: O SISTEMA (3.15) É
DETECTÁVEL SE OS ESTADOS NÃO-OBSERVÁVEIS
DECAIREM ASSINTOTICAMENTE PARA A ORIGEM.

NOTA: IMPLICA QUE ESTES ESTADOS SÃO VINCULADOS
A AUTOVALORES NO INTERIOR DO CÍRCULO
UNITÁRIO ($|\lambda_{oi}| < 1$).

OBSERVÁVEL $\Rightarrow$ DETECTÁVEL

Ex. 3.10:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1,1 & -0,3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = [1 \quad -0,5] x(k)$$

MATRIZ DE OBSERVABILIDADE:

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,6 & -0,3 \end{bmatrix}$$

$$\det(W_o) = 1 \cdot (-0,3) - 0,6 \cdot (-0,5) = 0 \Leftrightarrow \text{posto}(W_o) < 2$$

NÃO-OBSERVÁVEL
↑↑

O ESPAÇO NULO DE W_0 É O SUBESPAÇO
NÃO-OBSERVÁVEL DO SISTEMA.

$$W_0 x = 0$$

NO EXEMPLO:

$$x = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

BASE DO ESPAÇO NULO:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

FORMA CANÔNICA OBSERVÁVEL

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} -a_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \mid 0 \dots \dots \dots 0] z(k)$$

É OBSERVÁVEL!

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DA FORMA
CANÔNICA OBSERVÁVEL:

$$H(z) := \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}$$

Ex. 10.1:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

É OBSERVÁVEL!



É DETECTÁVEL!

Ex. 10.2:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

É OBSERVÁVEL!



É DETECTÁVEL!

Ex. 10.3:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

x_1 é uma variável
de estado não
observável nem
estável ($|2| > 1$) $\Rightarrow$
não detectável!

NÃO É OBSERVÁVEL!

NÃO É DETECTÁVEL!

$$x_1(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{INSTÁVEL!} \Rightarrow x_1(k) = 2^k x_1(0) + \dots$$

Ex. 10.4: $|0,5| < 1 \rightarrow$ ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

NÃO É OBSERVÁVEL!

É DETECTÁVEL!

$$x_1(k+1) = 0,5x_1(k) + x_2(k)$$

ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL!

$$\Downarrow$$

$$\rightarrow x_1(k) = 0,5^k x_1(0) + \dots$$