Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: **Controle por Computador**

Aula: **Parte I: Análise de Sistemas em Tempo Discreto: Estabilidade Entrada/Saída**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 24 de setembro de 2024.

Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 3.2 da 3ª Edição.

ESTABILIDADE INTERNA DE SISTEMAS LINEARES

$$x(k+1) = \Phi x(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \geq 0$$

SOLUÇÃO:

$$x(k) = \Phi^k x_0, \quad k \geq 0$$

PONTO DE EQUILÍBRIO: $x(k+1) = x(k), \ \forall k \geq 0$

$$x(k) = x(k+1) = \Phi x(k) \Rightarrow (\Phi - I)\, x(k) = 0 \rightarrow x \in \text{ESPAÇO NULO DE } (\Phi - I)$$

TEOREMA 3.1: O SISTEMA LINEAR É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL S.S.S. TODOS OS SEUS AUTOVALORES ESTIVEREM DENTRO DO CÍRCULO UNITÁRIO: $|\lambda_i| < 1, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$H(k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & k<0 \\ D, & k=0 \\ C\Phi^{k-1}\Gamma, & k\geq 1 \end{array} \right.$$

SÃO LIMITADOS

DEFINIÇÃO 3.3: "BOUNDED-INPUT-BOUNDED-OUTPUT (BIBO) STABILITY": ENTRADA LIMITADA $\Rightarrow$ SAÍDA LIMITADA

TEOREMA 3.2: A ESTABILIDADE ASSINTÓTICA ($|\lambda_i|<1, \forall i \in \{1,\dots,n\}$) $\Rightarrow$ BIBO ESTABILIDADE.

$\Phi^k \to 0$ NA MEDIDA QUE $k \to +\infty$.

ESTABILIDADE ENTRADA/SAÍDA

$$\boxed{x(0) = 0}$$

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \,, \quad x(0) = 0,$$
$$y(k) = C x(k) + D u(k) \,, \quad k \geq 0$$

SOLUÇÃO:

$$y(k) = H(k) * u(k)$$

Ex. 3.1, p. 79: OSCILADOR HARMÔNICO

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos wh & \operatorname{sen} wh \\ -\operatorname{sen} wh & \cos wh \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1-\cos wh \\ \operatorname{sen} wh \end{bmatrix} u(k)$$

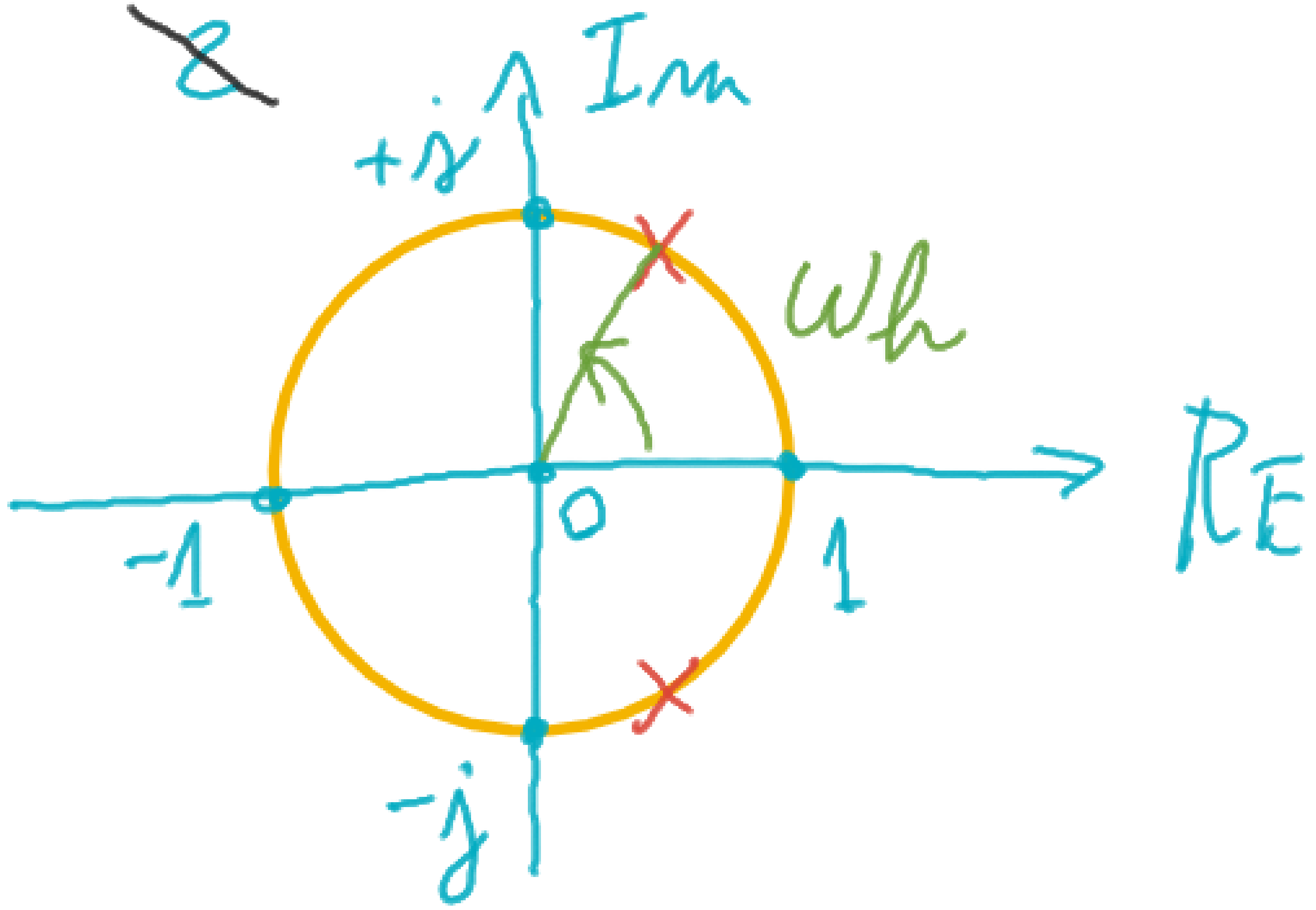
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

- SISTEMA INTERNAMENTE ESTÁVEL: $\|x(k)\| \equiv \|x(0)\|$ SE $u(k) \equiv 0$
- AUTOVALORES: $\det(\lambda I - \Phi) = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos wh & \operatorname{sen} wh \\ -\operatorname{sen} wh & \cos wh \end{bmatrix} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda - \cos wh) & -\operatorname{sen} wh \\ \operatorname{sen} wh & (\lambda - \cos wh) \end{vmatrix} = (\lambda - \cos wh)^2 - (-\operatorname{sen}^2 wh) =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda \cos wh + \cos^2 wh + \operatorname{sen}^2 wh = \lambda^2 - 2\lambda \cos wh + 1$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{+\cancel{2}\cos wh \pm \sqrt{\cancel{4}\cos^2 wh - \cancel{4}}}{\cancel{2}} = \cos wh \pm j \operatorname{sen} wh$$



$$\Phi = \begin{bmatrix} \cos wh & \operatorname{sen} wh \\ -\operatorname{sen} wh & \cos wh \end{bmatrix}$$

$wh = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightarrow \text{BLOCOS DE JORDAN DE ORDEM UM}$$

$\Downarrow$

ESTABILIDADE

$wh = \pi, 3\pi, \ldots$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

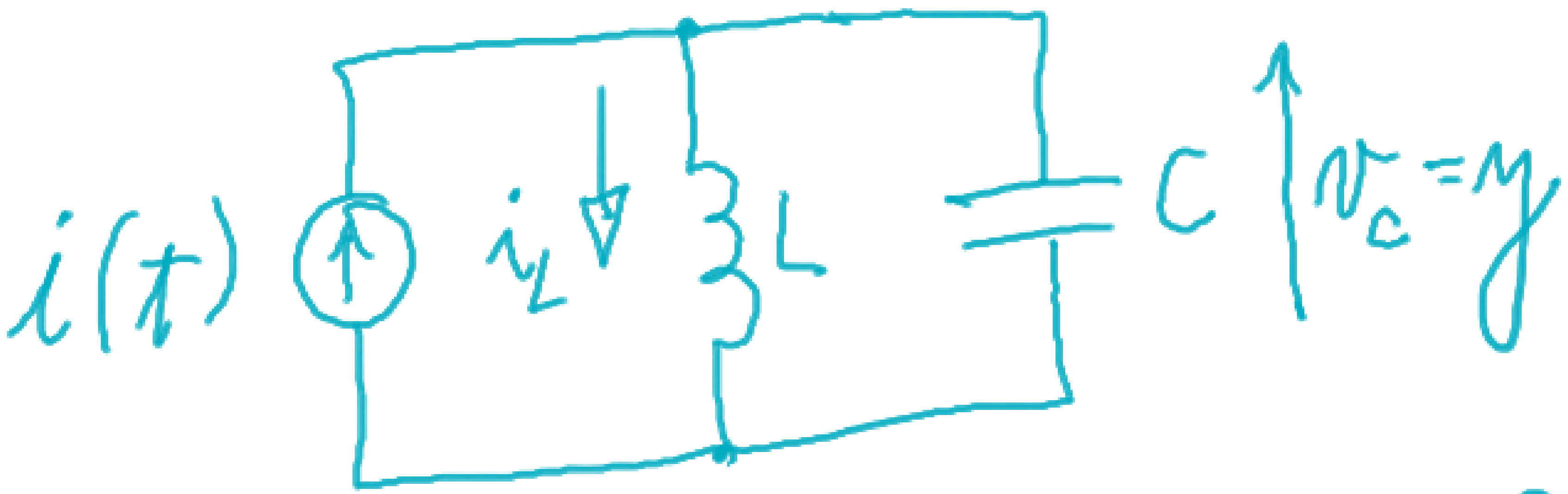
ESTÁVEL $\forall\, wh$

NÃO É BIBO ESTÁVEL: POIS ENTRADAS SENOIDAIS COM FREQUÊNCIA $\omega + \frac{2m\pi}{h}$, $m \in \mathbb{Z}$, EXCITARIAM OSCILAÇÕES ILIMITADAS.

ANALOGIA: CIRCUITO LC

AUTOVALORES: $\lambda = \pm j\omega_0$

NÃO É BIBO ESTÁVEL!



FREQ. RESSONÂNCIA:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

① SE $i(t) \equiv 0A$, AS VARIÁVEIS DE ESTADO APRESENTARÃO OSCILAÇÕES SENOIDAIS PERPÉTUAS, POIS A ENERGIA INICIAL (ESTADO) NÃO SE DISSIPA. → SEM CONV. ASSINTÓTICA

② SE $i(t) = I\,\text{sen}(\omega t)$, $\omega \neq \omega_0$, ENTÃO HAVERÁ OSCILAÇÕES DE AMPLITUDE LIMITADA NA FREQUÊNCIA ω.

③ SE $i(t) = I\,\text{sen}(\omega_0 t)$, ENTÃO AS OSCILAÇÕES SERÃO ILIMITADAS → RESSONÂNCIA!

TEOREMA: O SISTEMA É BIBO ESTÁVEL S.S.S. $\sum_{k=0}^{+\infty} \|H(k)\|$ FOR FINITO.

Ex.:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

- É INTERNAMENTE INSTÁVEL, POIS HÁ AUTOVALOR (2) FORA DO CÍRCULO UNITÁRIO.

- BIBO ESTÁVEL?

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |H(k)| = \sum_{k=1}^{+\infty} |C\,\Phi^{k-1}\,\Gamma| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5^{k-1} & 0 \\ 0 & \boxed{2^{k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 0{,}5^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} 0{,}5^{k} = \frac{1}{1-0{,}5} = 2 \Rightarrow \text{É FINITO}$$

$\Downarrow$

É BIBO ESTÁVEL

BIBO ESTÁVEL

$\Updownarrow$

TODOS OS POLOS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA ESTÃO DENTRO DO CÍRCULO UNITÁRIO ($|p_i| < 1$).

TESTE DE ESTABILIDADE DE JURY

DENOMINADOR DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA OU O POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DE Φ:

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

SUAS RAÍZES ESTÃO NO INTERIOR DO CÍRCULO UNITÁRIO?

BASEADO NA TABELA:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \\
a_n^n & a_{n-1}^n & \cdots & a_1^n & a_0^n \\
\hline
a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & \\
a_{n-1}^{n-1} & a_{n-2}^{n-1} & \cdots & a_0^{n-1} & \\
\hline
 & \vdots & & & \\
a_0^0 & & & &
\end{array}
$$

$$a_i^{n-1} = a_i - \frac{a_n}{a_0} a_{n-1-i}$$

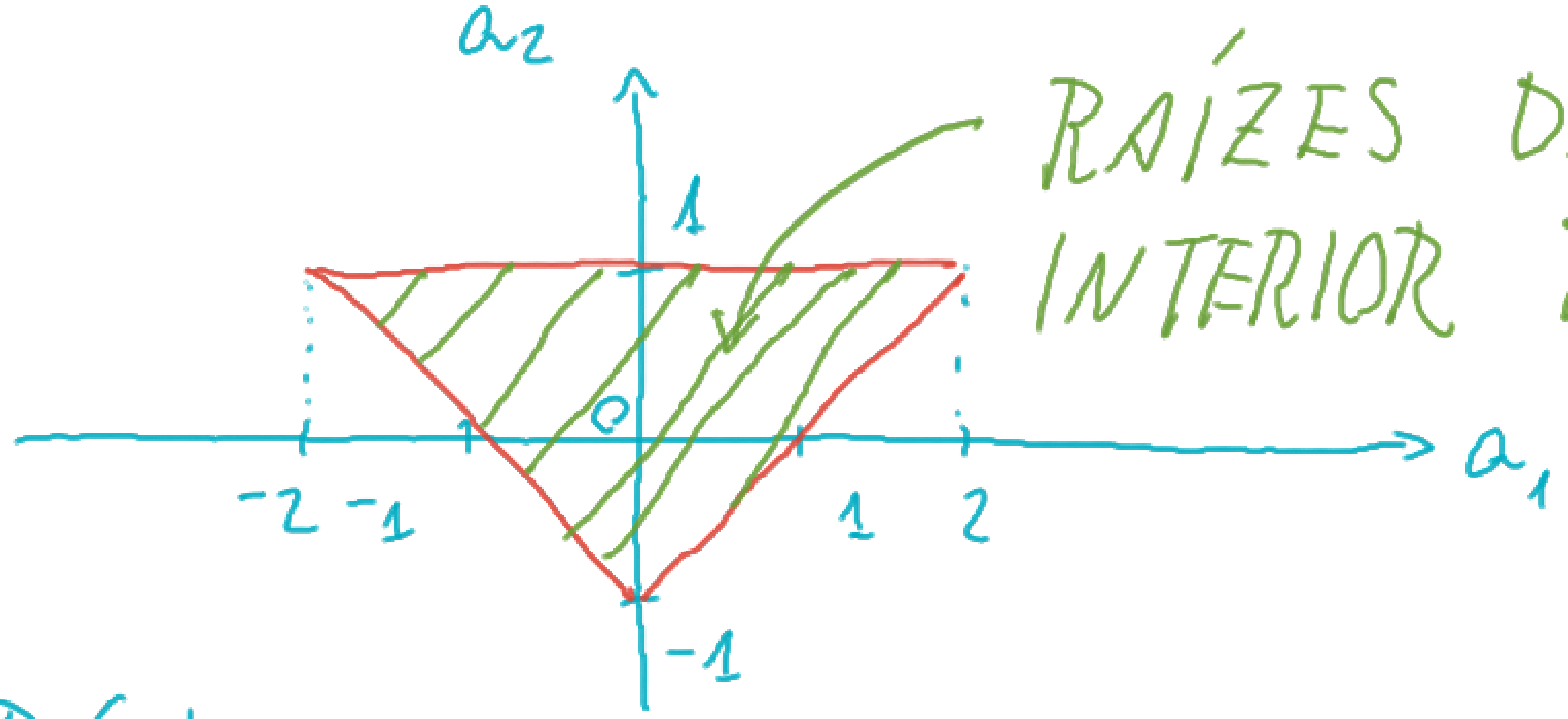
$$a_i^{k-1} = a_i^k - \frac{a_k^k}{a_0^k} \cdot a_{k-1}^k$$

TEOREMA 3.3: SE $a_0 > 0$, ENTÃO $A(z) = 0$ TEM TODAS AS RAÍZES NO INTERIOR DO CÍRCULO UNITÁRIO DESDE QUE TODOS a_0^k SEJAM POSITIVOS.

SE NENHUM a_0^k FOR NULO, ENTÃO O NÚMERO DE $a_0^k < 0$ É O NÚMERO DE RAÍZES FORA DO CÍRCULO UNITÁRIO.

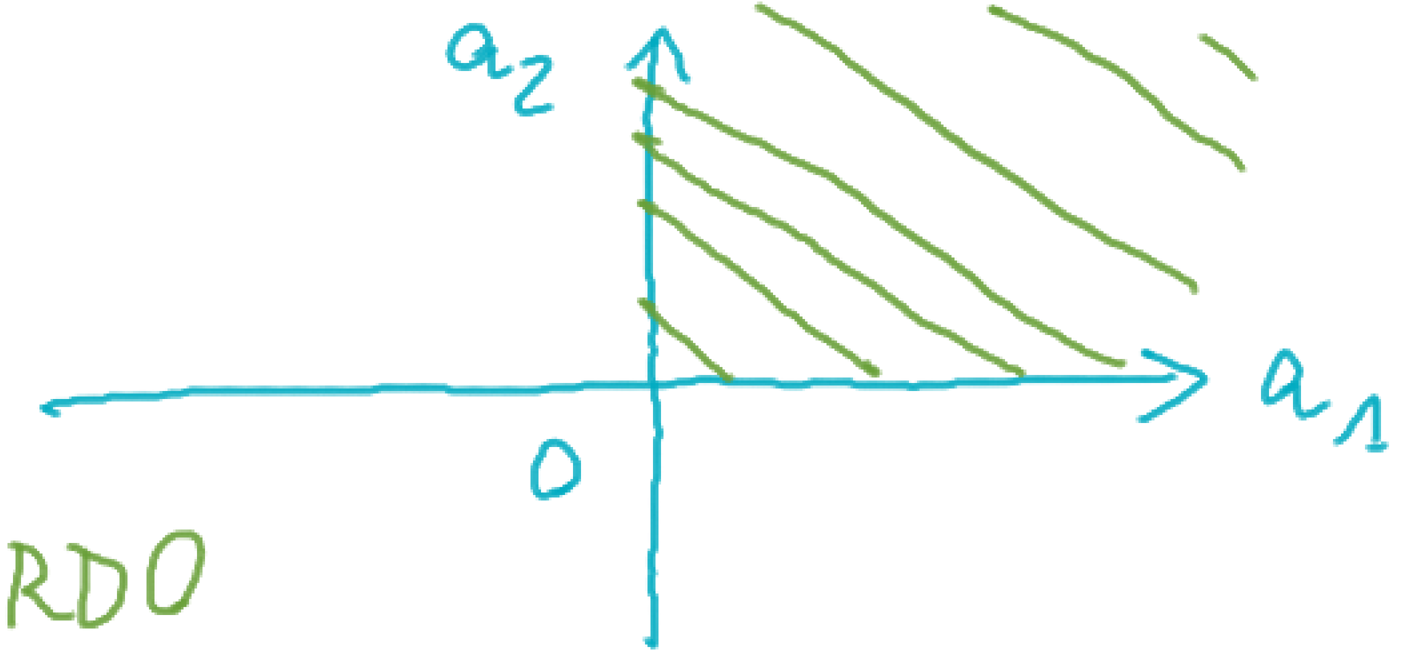
Ex.1: $A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$

TEMPO DISCRETO



RAÍZES DE $A(z)$ NO INTERIOR DO CÍRCULO UNITÁRIO

Ex. 2: $D(s) = s^2 + a_1 s + a_2$



TEMPO CONTÍNUO

$a_1, a_2 > 0$

$\Rightarrow$ RAÍZES NO SEMIPLANO ESQUERDO

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: **Controle por Computador**

Aula: **Parte II: Análise de Sistemas em Tempo Discreto: Controlabilidade, Alcançabilidade e Estabilizabilidade**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 24 de setembro de 2024.

Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 3.4 da 3ª Edição.

$u \in \mathbb{R}^r, \ x \in \mathbb{R}^n$

CONSIDERA-SE O SISTEMA:

$$x(k+1) = \Phi\, x(k) + \Gamma u(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \geq 0. \qquad (3.15)$$

DEF. 3.7 - CONTROLABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É CONTROLÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE A ORIGEM SEJA ATINGIDA EM TEMPO FINITO $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

DEF. 3.8 - ALCANÇABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É ALCANÇÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE UM ESTADO ARBITRÁRIO $x_p \in \mathbb{R}^n$ SEJA ATINGIDO EM TEMPO FINITO $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

ESTABILIZABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É ESTABILIZÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE A ORIGEM SEJA ATINGIDA AO MENOS ASSINTOTICAMENTE $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ (EM TEMPO INFINITO).

CONCLUI-SE:

$$\text{ALCANÇABILIDADE} \Downarrow \text{CONTROLABILIDADE} \Downarrow \text{ESTABILIZABILIDADE}$$

SOLUÇÃO DA EQ. (3.15):

$$x(n) = \Phi^{n} x_0 + \Phi^{n-1}\Gamma u(0) + \dots + \Phi\Gamma u(n-2) + \Gamma u(n-1)$$

$$= \Phi^{n} x_0 + W_c U,$$

NA QUAL:

$$W_c := \left[\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^{2}\Gamma \dots \Phi^{n-1}\Gamma\right] \in \mathbb{R}^{n \times nr}$$

$$U := \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

W_c é denominada matriz de CONTROLABILIDADE

• SE W_c FOR INVERSÍVEL PELA ESQUERDA, ENTÃO:

$$W_c U = x(n) - \Phi^n x_0 \Rightarrow \underbrace{W_c^{-1} W_c}_{I} U = W_c^{-1}\left(x(n) - \Phi^n x_0\right)$$

$$\Rightarrow U = W_c^{-1}\left(\underbrace{x(n)}_{x_f} - \Phi^n x_0\right)$$

• SE $r = 1$, ENTÃO $W_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, LOGO SERÁ INVERSÍVEL s.s.s. $\det(W_c) \neq 0$.

• SE $r \geq 1$, ENTÃO $W_c \in \mathbb{R}^{n \times nr}$ SERÁ INVERSÍVEL PELA ESQUERDA S.S.S. $\text{posto}(W_c) = n$ (COMPLETO).

TEOREMA 3.7: O SISTEMA (3.15) É ALCANÇÁVEL S. S. S. $\text{posto}(W_c) = n$.

Ex. 3.7.a:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

ENTÃO:

$$W_c = [\Gamma \quad \Phi\Gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{posto}(W_c) = 2 \Leftrightarrow \exists W_c^{-1} \Leftrightarrow \text{ALCANÇÁVEL}$$

$$\Downarrow$$

CONTROLÁVEL

$$\Downarrow$$

ESTABILIZÁVEL

Ex. 3.7.b:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

MATRIZ NILPOTENTE

ENTÃO:

$$W_c = [\Gamma \quad \Phi\Gamma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{posto}(W_c) = 1 \Rightarrow \nexists W_c^{-1} \Leftrightarrow$$ NÃO ALCANÇÁVEL

$$x(2) = \Phi^2 x_0 + W_c U$$

$$\Phi^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c/\ U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x(2) = 0, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$\Downarrow$

CONTROLÁVEL

$\Downarrow$

ESTABILIZÁVEL