Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: **Controle por Computador**

Aula: **Análise de Sistemas em Tempo Discreto: Estabilidade**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 19 de setembro de 2024.

Referências

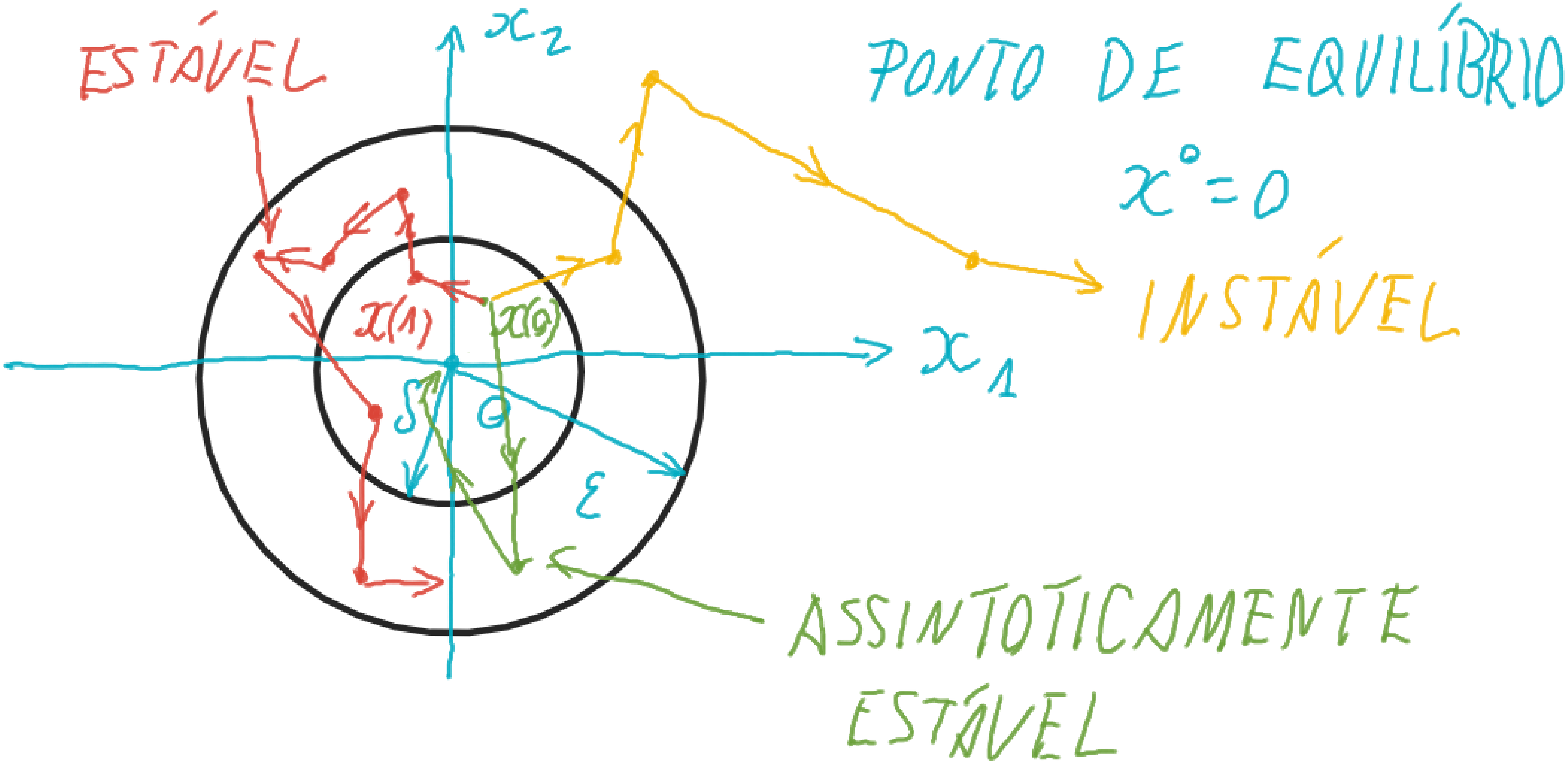
- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seções 3.1 e 3.2 da 3ª Edição.

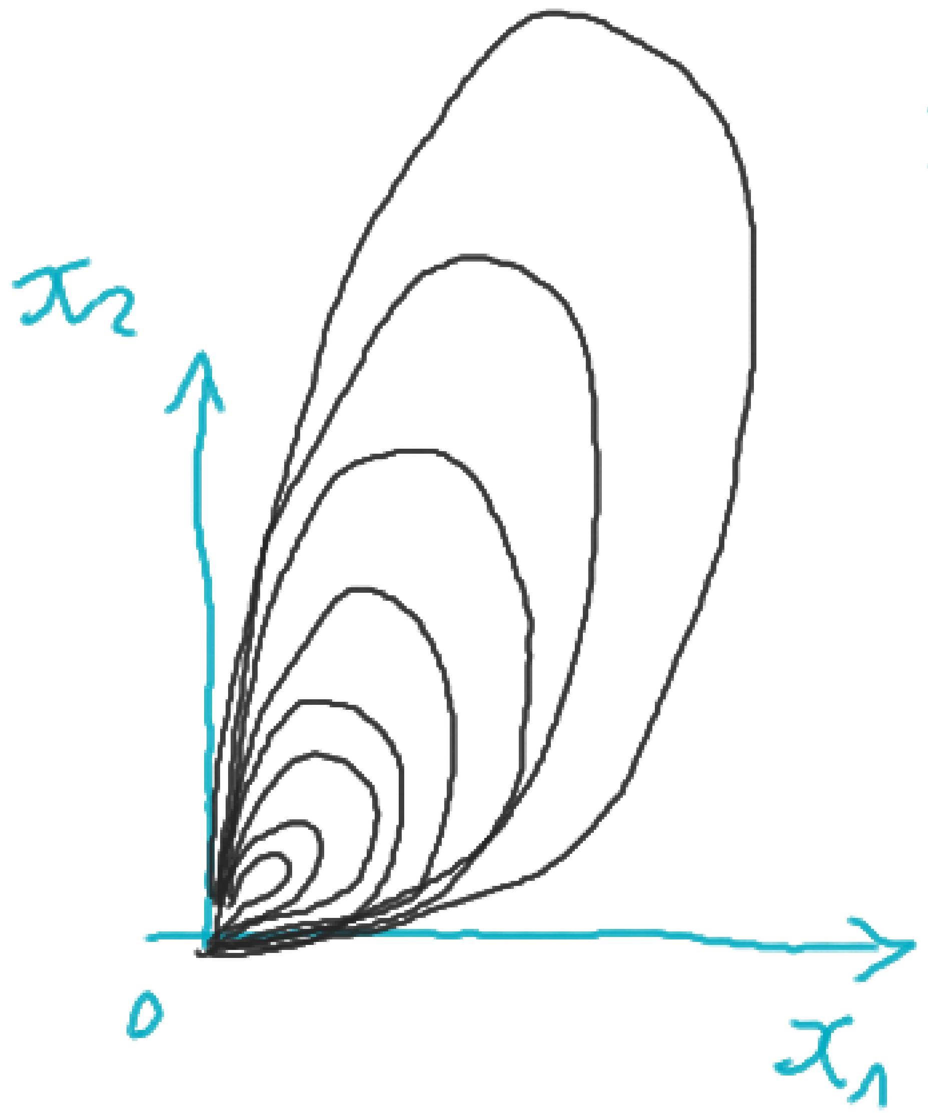
$$\text{ESTABILIDADE}\begin{cases}\text{INTERNA} \rightarrow \text{ESTADO, CONDIÇÃO INICIAL} \\ \\ \text{ENTRADA/SAÍDA}\end{cases}$$

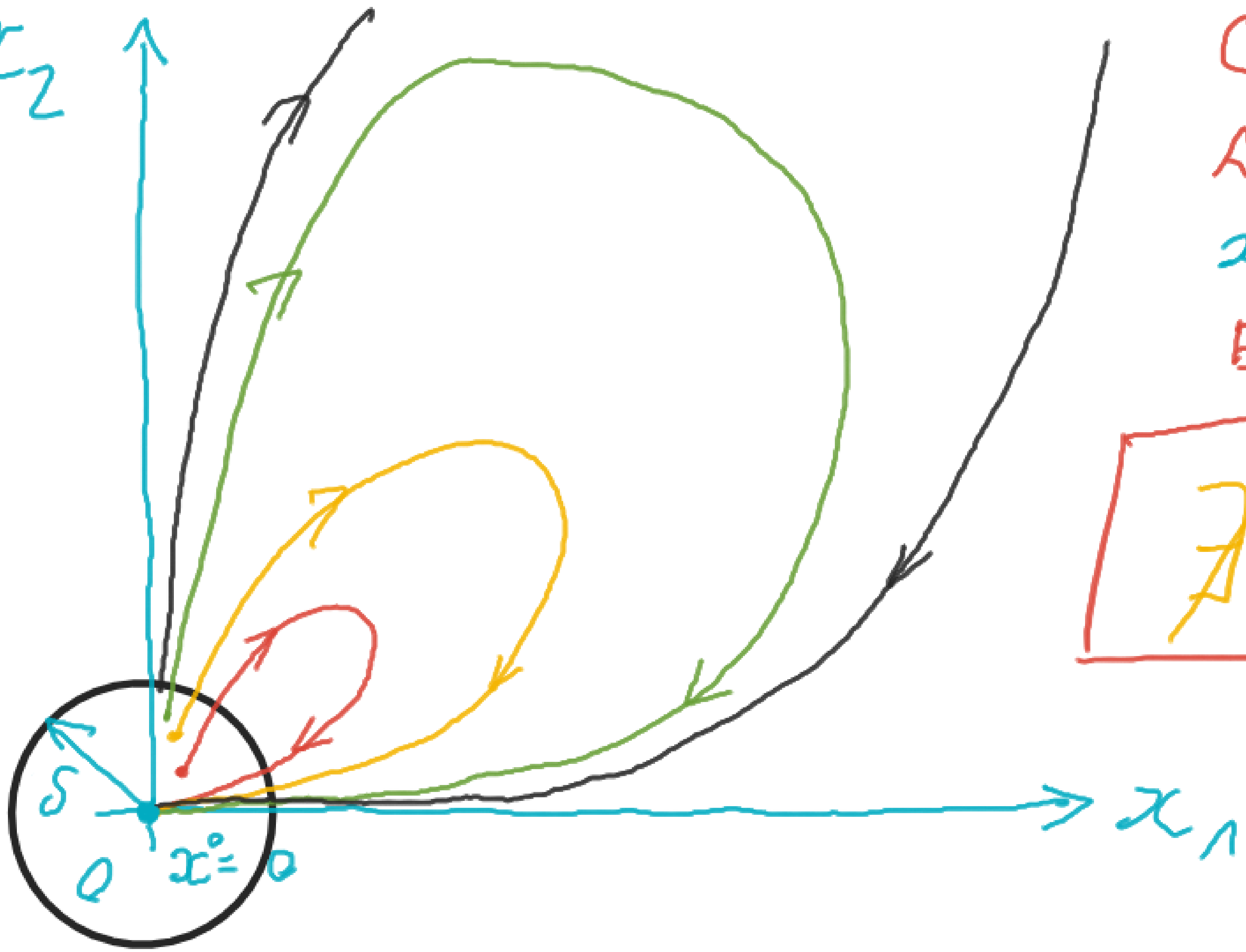
ESTABILIDADE INTERNA $(u(k) \equiv 0)$

DEF. 3.1: A SOLUÇÃO $x^0(k)$ É ESTÁVEL SE PARA UM DADO $\varepsilon > 0$ EXISTIR $\delta(\varepsilon) > 0$ TAL QUE $\|x(0) - x^0(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(k) - x^0(k)\| < \varepsilon$ $\forall\, k \geq 0$.



DEF. 3.2: A SOLUÇÃO $x^o(k)$ É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL SE É ESTÁVEL E $\|x(k) - x^o(k)\| \to 0$ NA MEDIDA QUE $k \to +\infty$.





CONVERGÊNCIA ASSINTOTICA PARA x^0, MAS SEM ESTABILIDADE

$\boxed{\nexists\, \varepsilon > 0}$

TRAJETÓRIAS APRESENTAM CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA, MAS NÃO SÃO ESTÁVEIS $\Rightarrow$ NÃO SÃO ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEIS.

ESTABILIDADE INTERNA DE SISTEMAS LINEARES

$$x(k+1) = \Phi x(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \geq 0$$

SOLUÇÃO:

$$x(k) = \Phi^k x_0, \quad k \geq 0$$

PONTO DE EQUILÍBRIO: $x(k+1) = x(k), \ \forall k \geq 0$

$$x(k) = x(k+1) = \Phi x(k) \Rightarrow (\Phi - I)\, x(k) = 0 \rightarrow x \in \text{ESPAÇO NULO DE } (\Phi - I)$$

- A ORIGEM $x=0$ SEMPRE É PONTO DE EQUILÍBRIO.

- APLICA-SE A TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE $J = T\Phi T^{-1}$ QUE RESULTE NA FORMA DE JORDAN,

ENTÃO: $\bar{x}(k+1) = J\,\bar{x}(k), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad k \geq 0.$

SOLUÇÃO: $\bar{x}(k) = J^k \bar{x}_0$

Ex.: $J = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$

$$J^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \qquad J^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^3 \end{bmatrix} \ldots$$

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

- SE $|\lambda_i| < 1 \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \lambda_i^k = 0$ → ASSINTÓTICA-MENTE ESTÁVEL

- SE $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow |\lambda_i^k| = 1, \ \forall k \geq 0$ → ESTÁVEL

- SE $|\lambda_i| > 1 \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} |\lambda_i^k| = \infty$ → INSTABILI-DADE

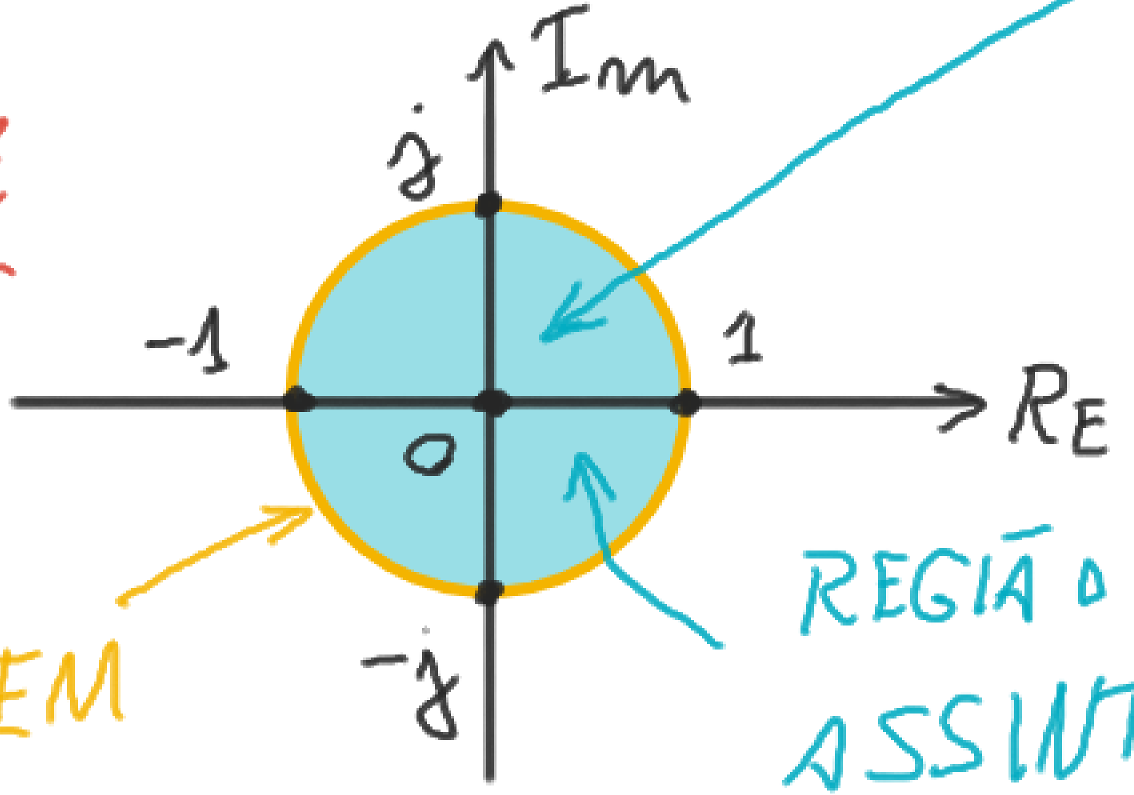
- SE $|\lambda_1| = 1 \Rightarrow |k\lambda_1^k| = k|\lambda_1^k| = k$

$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} |k\lambda_1^k| = \infty$ → INSTABILI-DADE

PARA $i \in \{1,2\}$

TEOREMA 3.1: O SISTEMA LINEAR É <u>ASSINTOTICAMENTE</u> <u>ESTÁVEL</u> S.S.S. TODOS OS SEUS AUTOVALORES ESTIVEREM DENTRO DO CÍRCULO UNITÁRIO: $|\lambda_i| < 1, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

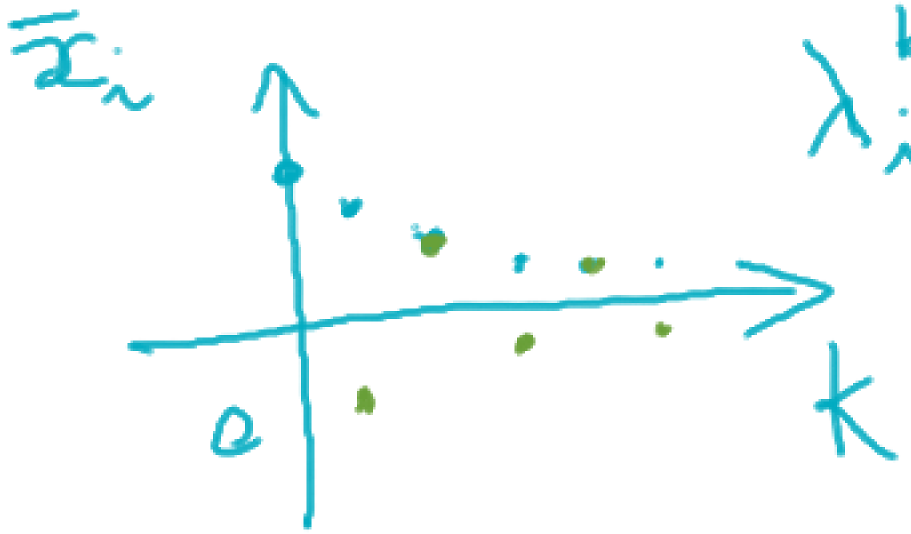
<u>PLANO Z</u>



CÍRCULO UNITÁRIO CENTRADO NA ORIGEM $|\lambda_i| = 1$

REGIÃO DOS AUTOVALORES ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEIS

① $|\lambda_i| < 1$

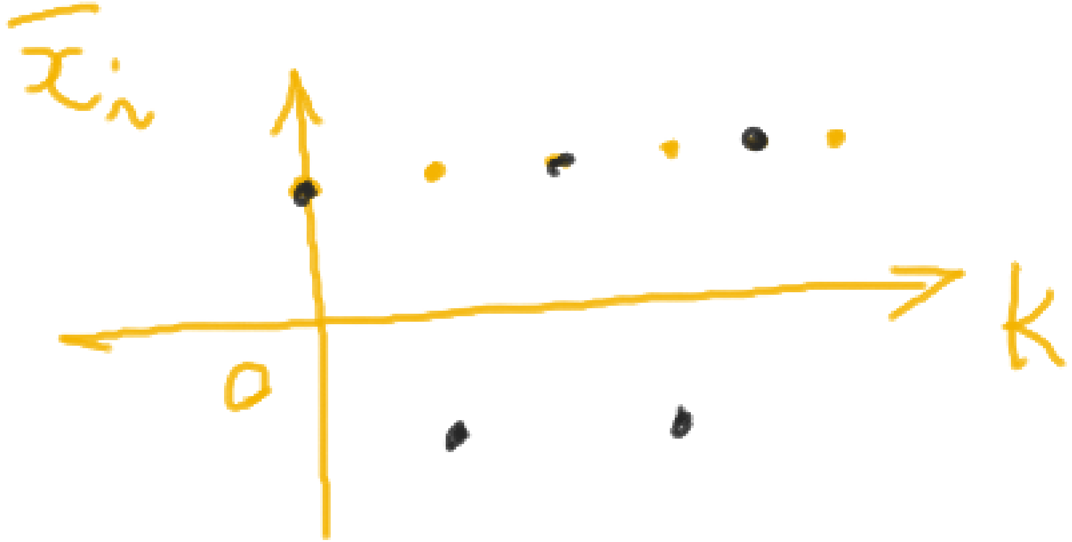


$\lambda_i^k \bar{x}_i(0)$

$\lambda_i > 0$

$\lambda_i < 0$

② $|\lambda_i| = 1$

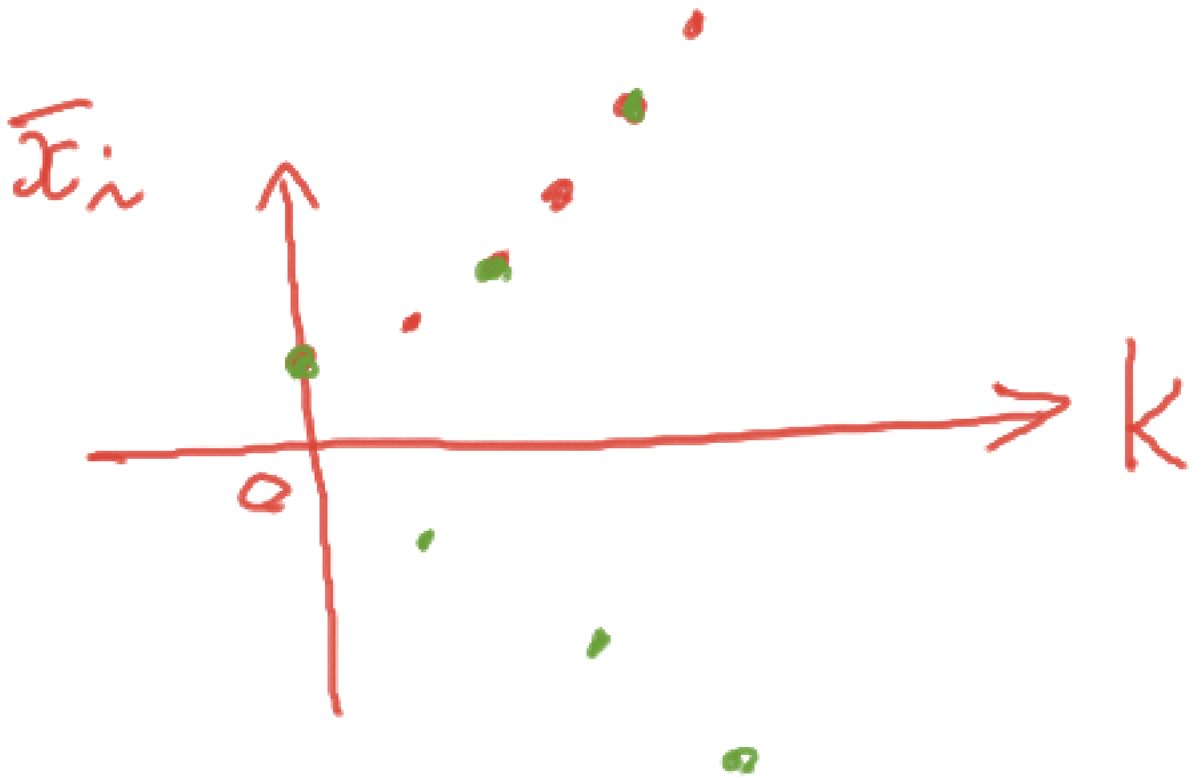


$\lambda_i^k \bar{x}_i(0)$

$\lambda_i = 1$

$\lambda_i = -1$

③ $|\lambda_i| > 1$



$\lambda_i^k \bar{x}_i(0)$

$\lambda_i > 1$

$\lambda_i < -1$

LYAPUNOV EM SISTEMAS EM TEMPO DISCRETO

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad f(0)=0$$

SEJA $V(x)$ QUE SATISFAÇA:

1. $V(x)$ É CONTÍNUA E $V(0)=0$
2. $V(x)>0$
3. $\Delta V(x) = V(\underbrace{f(x)}_{x(k+1)}) - V(\underset{x(k)}{x}) < 0$

$x=0$ É EQUILÍBRIO ASSINTÓTICAMENTE ESTÁVEL

ESTABILIDADE ENTRADA/SAÍDA

$$\boxed{x(0) = 0}$$

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad , \quad x(0) = 0,$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad , \quad k \geq 0$$

SOLUÇÃO:

$$y(k) = \underbrace{H(k)}_{\text{RESPOSTA IMPULSIVA}} * u(k)$$

$$H(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ D, & k = 0 \\ C\Phi^{k-1}\Gamma, & k \geq 1 \end{cases}$$

SÃO LIMITADOS

DEFINIÇÃO 3.3: "BOUNDED-INPUT-BOUNDED-OUTPUT (BIBO) STABILITY": ENTRADA LIMITADA $\Rightarrow$ SAÍDA LIMITADA

UNIFORMEMENTE

TEOREMA 3.2: A ESTABILIDADE ASSINTÓTICA ($|\lambda_i| < 1$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$) $\Rightarrow$ BIBO ESTABILIDADE.

$\Phi^k \to 0$ NA MEDIDA QUE $k \to +\infty$.

Ex. 3.1, p. 79: OSCILADOR HARMÔNICO

$$x(K+1) = \begin{bmatrix} \cos wh & \operatorname{sen} wh \\ -\operatorname{sen} wh & \cos wh \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1-\cos wh \\ \operatorname{sen} wh \end{bmatrix} u(k)$$

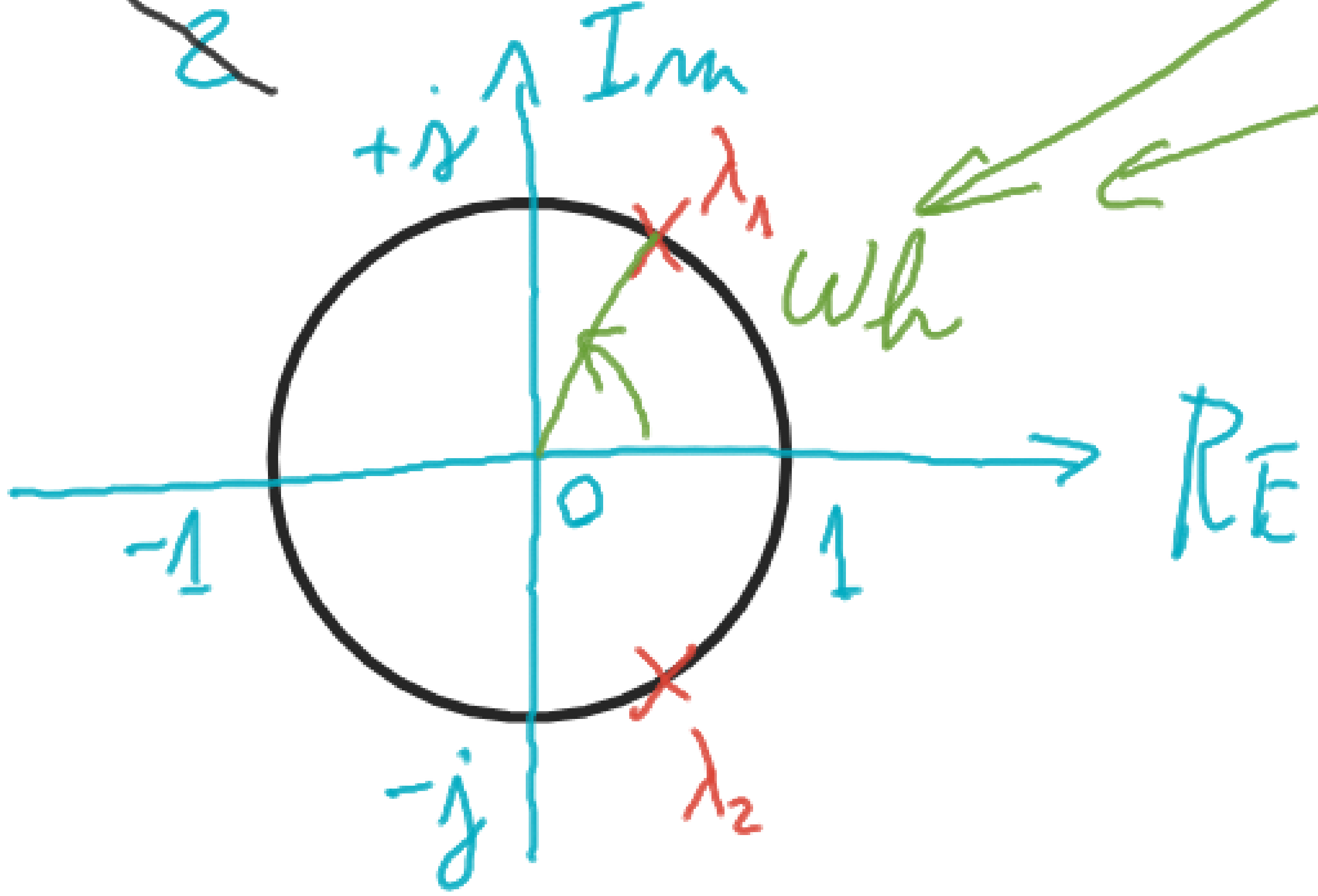
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

- SISTEMA INTERNAMENTE ESTÁVEL: $\|x(k)\| \equiv \|x(0)\|$ SE $u(k) \equiv 0$
- AUTOVALORES: $\det(\lambda I - \Phi) = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos wh & \operatorname{sen} wh \\ -\operatorname{sen} wh & \cos wh \end{bmatrix} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda - \cos wh) & -\operatorname{sen} wh \\ \operatorname{sen} wh & (\lambda - \cos wh) \end{vmatrix} = (\lambda - \cos wh)^2 - (-\operatorname{sen}^2 wh) =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda \cos wh + \cos^2 wh + \operatorname{sen}^2 wh = \lambda^2 - 2\lambda \cos wh + 1$$

$$\Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{+\cancel{2}\cos wh \pm \sqrt{\cancel{4}\cos^2 wh - \cancel{4}}}{\cancel{2}} = \cos wh \pm j \operatorname{sen} wh$$



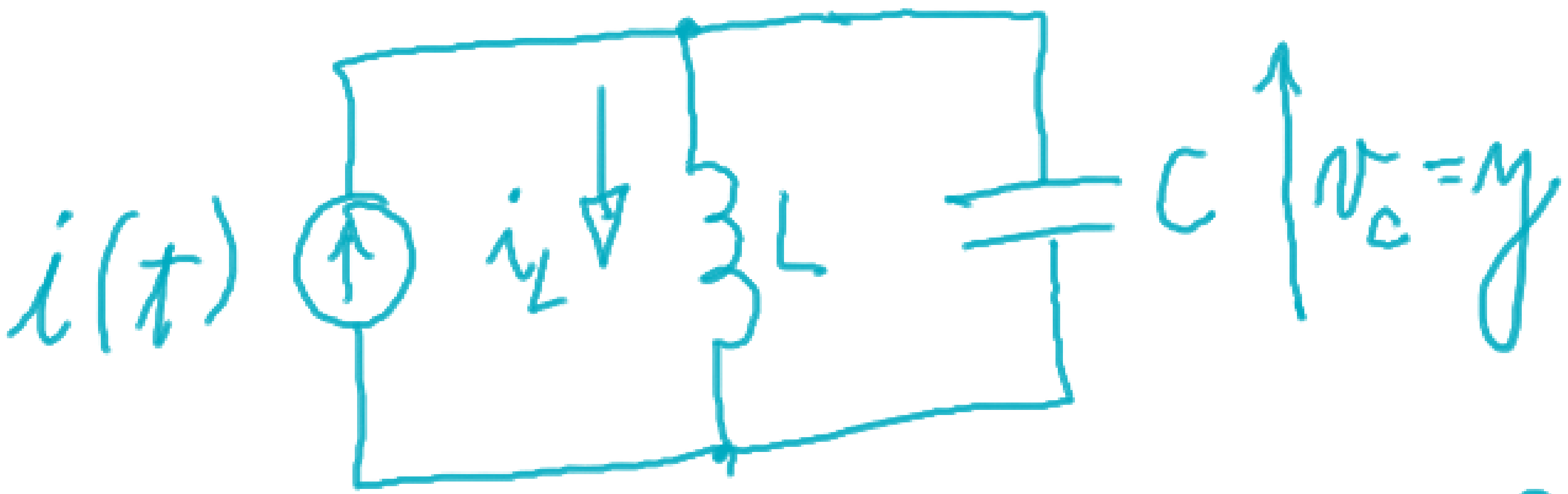
NÃO É BIBO ESTÁVEL: POIS ENTRADAS SENOIDAIS COM FREQUÊNCIA $\omega + \frac{2m\pi}{h}$, $m \in \mathbb{Z}$, EXCITARIAM OSCILAÇÕES ILIMITADAS.

ANALOGIA: CIRCUITO LC

AUTOVALORES: $\lambda = \pm j\omega_0$

FREQ. RESSONÂNCIA: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

NÃO É BIBO ESTÁVEL!



1 SE $i(t) \equiv 0A$, AS VARIÁVEIS DE ESTADO APRESENTARÃO OSCILAÇÕES SENOIDAIS PERPÉTUAS, POIS A ENERGIA INICIAL (ESTADO) NÃO SE DISSIPA. → SEM CONV. ASSINTÓTICA

2 SE $i(t) = I\,sen(\omega t)$, $\omega \neq \omega_0$, ENTÃO HAVERÁ OSCILAÇÕES DE AMPLITUDE LIMITADA NA FREQUÊNCIA ω.

3 SE $i(t) = I\,sen(\omega_0 t)$, ENTÃO AS OSCILAÇÕES SERÃO ILIMITADAS → RESSONÂNCIA!