



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: Controle por Computador



Aula: **Parte I: Funções de Transferência de Sistemas em Tempo Discreto**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 17 de setembro de 2024.



Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 2.7 da 3^a Edição.

CONSIDERA-SE O SISTEMA
NO ESPAÇO DE ESTADO EM
TEMPO DISCRETO:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k),$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k).$$

NA QUAL

$$k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

APLICANDO-SE A TRANSFORMADA Z UNILATERAL
NA EQ. ESTADO:

$$z \{ x(k+1) \} = z \{ \Phi x(k) + \Gamma u(k) \}$$

$$z \{ y(k) \} = z \{ C x(k) + D u(k) \}$$

$$\Rightarrow z x(z) - x(0) = \Phi x(z) + \Gamma u(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z \mathbf{I} - \Phi) x(z) = x(0) + \Gamma u(z) \Rightarrow x(z) = (z \mathbf{I} - \Phi)^{-1} x(0) + (z \mathbf{I} - \Phi)^{-1} \Gamma u(z)$$

$$y(z) = Cx(z) + Du(z) = C(zI - \Phi)^{-1}x(0) + \underbrace{\left[C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D \right]}_{H(z)}u(z)$$

CONDICÕES
INICIAIS

FUNÇÃO OU MATRIZ DE
TRANSFERÊNCIA

$$H(z) = Z \{ H(k) \}$$

RESPOSTA IMPULSIVA, p. 7 da
aula de 12/9/2024

Disciplina: Controle por Computador



Aula: Parte II: Funções de Transferência de Sistemas com Sinais Amostrados

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 17 de setembro de 2024.



Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 2.7 da 3^a Edição.

Ref.: (ÅSTRÖM & WITTENMARK, 1997, pp. 57-58 e Tabela 2.1):



$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} \quad (SISO)$$

SINAL DE TESTE: DE GRAU UNITÁRIO $u(kh) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow u(t) = \begin{cases} 1, & \text{SE } t \geq 0 \\ 0, & \text{SE } t < 0 \end{cases}$$

TAMBÉM É DE GRAU UNITÁRIO

* $y(t) = g(t) * u(t)$

* DOMÍNIO MISTO: TEMPO e FREQUÊNCIA

ENTÃO:

$$y(s) = G(s) u(s) = G(s) \mathcal{L}\{u(t)\} = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$y(kh) = \left. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \right|_{t=kh}$$

$$y(z) = \mathcal{Z}\{y(kh)\}$$

$$u(z) = z \left\{ u(kh) \right\} = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

↑
DEGRAU UNITÁRIO

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \left(\frac{z-1}{z} \right) z \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kh} \right\}$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(1-z^{-1})}$$

Ex.: $G(s) = \frac{1}{s+1}$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{s+1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\}$$

$$as + b(s+1) = 1 \Rightarrow as + bs + b = 1 \begin{cases} b = 1 \\ a + b = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \cdot \} = -e^{-t} + 1, \quad t \geq 0.$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \cdot \right\} \Big|_{t=kh} = 1 - e^{-kh} \quad \approx r^k \text{ com } r = e^{-h}$$

$$\mathcal{Z} \left\{ 1 - e^{-kh} \right\} = \mathcal{Z} \left\{ 1 \right\} - \mathcal{Z} \left\{ e^{-kh} \right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-h}}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \cdot \right\} = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-h}} \right) = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-h}}$$

$$= \frac{\cancel{z} - e^{-h} - \cancel{z} + 1}{z - e^{-h}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 - e^{-h}}{z - e^{-h}}$$

← TABELA 2.1
p. 54

Disciplina: Controle por Computador



Aula: **Parte III: Polos e Zeros de Funções de Transferência, Escolha da Frequência de Amostragem**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 17 de setembro de 2024.



Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seções 2.8 e 2.9 da 3^a Edição.

POLOS DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

$$x(kh+h) = \underline{\Phi} x(kh) + \underline{\Gamma} u(kh)$$

$$y(kh) = C x(kh) + D u(kh)$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA:

$$H(z) = C(zI - \underline{\Phi})^{-1} \underline{\Gamma} + D = C \frac{\text{Adj}(zI - \underline{\Phi}) \underline{\Gamma} + D \det(zI - \underline{\Phi})}{\det(zI - \underline{\Phi})}$$

AUTOVALORES: $\lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda_i I - \underline{\Phi}) = 0$

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

↑ EQ. CARACTERÍSTICA

$T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det(T) \neq 0$, ENTÃO:

$\bar{\Phi} = T \Phi T^{-1} \leftarrow$ TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE

SE T FOR A MATRIZ DE AUTOVETORES, ENTÃO:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$$

NESTE CASO:

$$\bar{\Phi}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_m^k \end{bmatrix}$$

SISTEMA COM SINAIS AMOSTRADOS: $\{A, B, C, D\}$

$\{\Phi, \Gamma, C, D\}$

$$\Phi = e^{Ah}$$

$\uparrow$
 $\lambda_i\{\Phi\}$

$\nwarrow$
 $\lambda_i\{A\}$

$$\lambda_i\{\Phi\} = e^{\lambda_i\{A\}h}$$

VIDE FIGS. 2.5 e 2.6,
p. 62.

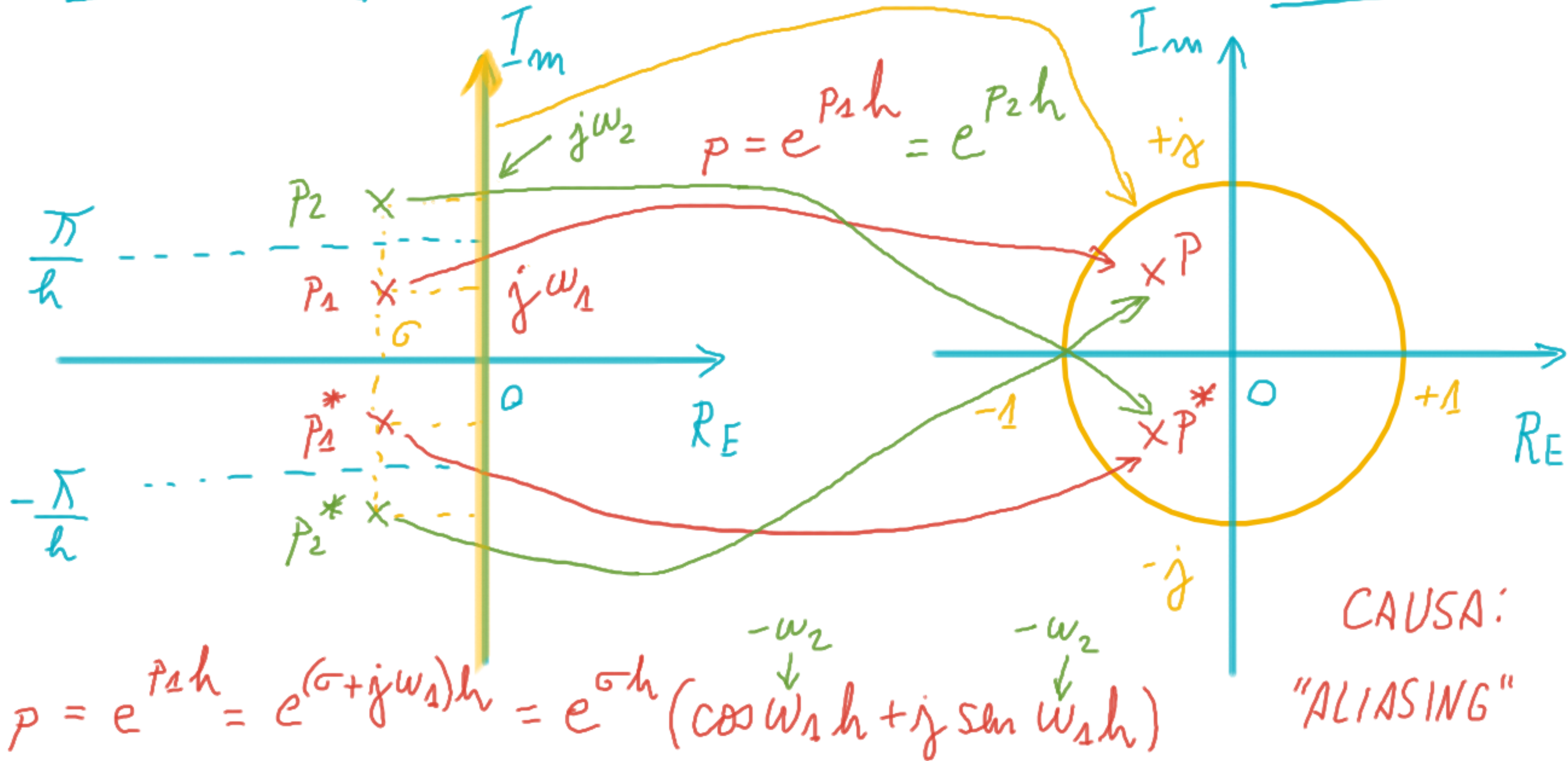
$$e^{(\sigma_i + j\omega_i)h} = e^{\sigma_i h} \cdot e^{j\omega_i h}$$
$$= e^{\sigma_i h} (\cos(\omega_i h) + j \sin(\omega_i h))$$

Fig. 2.6

PLANO S

$$z = e^{sh}$$

PLANO Z



ZEROS DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

- NÃO HÁ Mapeamentos SIMPLES DE ZEROS DO PLANO s PARA O PLANO z .
- GERALMENTE O N° ZEROS É O N° POLOS - 1, OU SEJA, GRAU RELATIVO UNITÁRIO.
- SE h FOR SUFICIENTEMENTE PEQUENO, ENTÃO:

ZERO NO PLANO z $\rightarrow z_i \approx e^{s_i h}$ $\leftarrow$ ZERO NO PLANO s

SISTEMAS COM INVERSAS INSTÁVEIS

- SISTEMAS DE FASE NÃO MÍNIMA

APRESENTAM ZÉROS NO SEMIPLANO COMPLEXO DIREITO (s) OU FORA DO CÍRCULO UNITÁRIO (z).

- HÁ SISTEMAS EM TEMPO CONTÍNUO QUE SÃO DE FASE NÃO MÍNIMA, MAS DISCRETIZADOS SÃO DE FASE MÍNIMA
- HÁ SISTEMAS EM TEMPO CONTÍNUO QUE SÃO DE FASE MÍNIMA, MAS DISCRETIZADOS SÃO DE FASE NÃO MÍNIMA

ESCOLHA DO PERÍODO DE AMOSTRAGEM

p. 66: $N_r = \frac{T_r}{h}$ ← "RISE TIME" / TEMPO DE SUBIDA

← Nº AMOSTRAS DURANTE A SUBIDA DA RESPOSTA AO DEGRADU

SUGESTÃO: $4 \leq N_r \leq 10 \rightarrow$ CHUTE!
"RULE OF THUMB" (DEDAO)

ME LHOR: FRANKLIN, POWELL! → BASEADOS EM ENGENHARIA
& WORKMAN (1990) CAP. 10