



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: Controle por Computador



Aula: Parte I: Sistemas no Espaço de Estado em Tempo Discreto

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 12 de setembro de 2024.



Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para as Seções 2.4 e 2.5 da 3^a Edição.

EQUAÇÃO DE ESTADO EM TEMPO DISCRETO

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k),$$

$$y(k) = Cx(k) + D u(k),$$

NAS QUAIS:

$x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado;

$u \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de entrada;

$y \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída;

$\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de transição de estado;
 $P \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é a matriz de distribuição da entrada;
 $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de distribuição da saída;
 $D \in \mathbb{R}^{p \times r}$ é a matriz de transferência direta;
 $k \in \mathbb{Z}$ é o tempo discreto.

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO EM TEMPO DISCRETO

SEJAM:

$k_0 \in \mathbb{Z}$ é o instante inicial, usualmente $k_0 = 0$;

$x(k_0) = x_0$ é a condição inicial;

$u(k)$, $k \geq k_0$, a sequência de entrada.

ENTÃO:

$$x(k_0+1) = \Phi x(k_0) + \Gamma u(k_0)$$

$$x(k_0+2) = \Phi x(k_0+1) + \Gamma u(k_0+1) = \Phi(\Phi x(k_0) + \Gamma u(k_0)) + \Gamma u(k_0+1) = \Phi^2 x(k_0) + \Phi \Gamma u(k_0) + \Gamma u(k_0+1)$$

$$\begin{aligned}
 x(k_0+3) &= \underbrace{\Phi}_{\substack{\uparrow \\ \text{from } x(k_0)}} x(k_0+2) + \underbrace{\Gamma}_{\substack{\uparrow \\ \text{from } u(k_0)}} u(k_0+2) = \\
 &= \Phi^3 x(k_0) + \Phi^2 \Gamma u(k_0) + \Phi \Gamma u(k_0+1) + \Gamma u(k_0+2)
 \end{aligned}$$

$$\vdots \\
 x(k) = \underbrace{\Phi^{k-k_0} x(k_0)}_{\text{TERMO TRANSITÓRIO COM ENTRADA NULA}} + \underbrace{\sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j)}_{\text{RESPOSTA À ENTRADA COM CONDIÇÃO INICIAL NULA}}$$

TERMO
 TRANSITÓRIO
 COM ENTRADA NULA

RESPOSTA À ENTRADA
 COM CONDIÇÃO INICIAL NULA

O SINAL DE SAÍDA:

$$y(k) = \underbrace{C \Phi^{k-k_0} x(k_0)}_{\text{TERMO TRANSITÓRIO}} + \underbrace{\left[C \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j) \right] + D u(k)}_{H(k) * u(k) \text{ (CONVOLUÇÃO)}}$$

ONDE A RESPOSTA IMPULSIVA É:

$$H(k) = \begin{cases} 0, & \text{SE } k < 0, \\ D, & \text{SE } k = 0, \\ C \Phi^{k-1} \Gamma, & \text{SE } k > 0. \end{cases}$$

NOTA: IMPULSO UNITÁRIO NO CASO
MULTIVARIÁVEL

$$J(k) = \begin{cases} I_r, & \text{se } k=0, \\ 0_{r \times r}, & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

NO QUAL:

r é o número de entradas do sistema.

ENTÃO A RESPOSTA IMPULSIVA SERÁ:

$$k_0 = 0$$

$$x(k_0) = 0$$

PARA $k < 0$:

$y(k) = 0 \rightarrow$ POIS O SISTEMA É CAUSAL

PARA $k = 0$:

$$y(0) = D$$

PARA $k > 0$:

$\hat{x} = 0$ É O ÚNICO $u(i) \neq 0$, ENTÃO:

$$y(k) = C \Phi^{k-1} \Gamma$$

MUDANÇA DE COORDENADAS NO ESPAÇO DE ESTADO

$$z(k) := T x(k), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

NA QUAL $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(T) \neq 0 \Rightarrow$ INVERSÍVEL.
 $\Rightarrow \exists T^{-1}$

ENTÃO:

$$x(k) = T^{-1} z(k)$$

$$z(k+1) = T x(k+1) \Rightarrow x(k+1) = T^{-1} z(k+1)$$

$$z_0 := z(k_0) = T x_0$$

ASSIM:

$$T^{-1} z(k+1) = \Phi T^{-1} z(k) + \Gamma u(k) \Rightarrow$$

$$\underbrace{T T^{-1}}_I z(k+1) = T (\Phi T^{-1} z(k) + \Gamma u(k)) \Rightarrow$$

$$z(k+1) = \underbrace{T \Phi T^{-1}}_{\Phi} z(k) + \underbrace{T \Gamma}_{\Gamma} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{C T^{-1}}_{\bar{C}} z(k) + \underbrace{D}_{\bar{D}} u(k)$$

$$z(k+1) = \bar{\Phi} z(k) + \bar{\Gamma} u(k), \quad z(k_0) = z_0,$$

$$y(k) = \bar{C} z(k) + \bar{D} u(k), \quad k \geq k_0.$$

NOTAS:

$$\bar{\Phi}^k = \underbrace{\bar{\Phi} \dots \bar{\Phi}}_{k \text{ VEZES}} = \underbrace{(\bar{\Gamma} \bar{\Phi} \bar{\Gamma}^{-1})}_{I} \dots (\bar{\Gamma} \bar{\Phi} \bar{\Gamma}^{-1}) =$$

$$= \bar{\Gamma} \bar{\Phi}^k \bar{\Gamma}^{-1} \leftarrow \text{TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE}$$

RESPOSTA IMPULSIVA:

$$H(k) = \begin{cases} 0, & \text{SE } k < 0, \\ D, & \text{SE } k = 0, \\ C\Phi^{k-1}\Gamma, & \text{SE } k > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{SE } k < 0 \\ \bar{D}, & \text{SE } k = 0 \\ \bar{C}\bar{\Phi}^{k-1}\bar{\Gamma}, & \text{SE } k > 0 \end{cases}$$

NAS QUAIS:

$$\bar{D} = D$$

TEOREMA 2.3: INVARIÂNCIA DA
RESPOSTA IMPULSIVA (p. 47)

$$\bar{C}\bar{\Phi}^{k-1}\bar{\Gamma} = \underbrace{\bar{C}}_{\bar{C}} \underbrace{\bar{\Phi}^{k-1}}_{\bar{\Phi}^{k-1}} \underbrace{\bar{\Gamma}}_{\bar{\Gamma}} = \underbrace{C T^{-1}}_I \underbrace{T \Phi^{k-1} T^{-1}}_I \underbrace{T \Gamma}_{\bar{\Gamma}} = C \Phi^{k-1} \Gamma$$



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: Controle por Computador



Aula: **Parte II: Modelos Entrada-Saída para Sistemas em Tempo Discreto**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

Rio de Janeiro, 12 de setembro de 2024.



Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 2.6 da 3^a Edição.

OPERADORES DE DESLOCAMENTO

(AW, 1997,
pp. 48-53)

$$x(k) \longrightarrow x(k+1) = q x(k)$$

↑

"FORWARD-SHIFT OPERATOR"
OPERADOR DE AVANÇO

$$x(k) \longrightarrow x(k-1) = q^{-1} x(k)$$

↑

"BACKWARD-SHIFT OPERATOR"
OPERADOR DE ATRASO

OPERADORES DE DESLOCAMENTO NUMA EQUAÇÃO A DIFERENÇAS

$$y(k+N) + a_1 y(k+N-1) + \dots + a_N y(k) = \\ = b_0 u(k+N) + \dots + b_M u(k)$$

COM O USO DO OPERADOR q :

$$q^N y(k) + a_1 q^{N-1} y(k) + \dots + a_N y(k) = \\ = b_0 q^N u(k) + \dots + b_M u(k)$$

$$A(q) y(k) = B(q) u(k)$$

NA QUAL:

$$A(q) = q^N + a_1 q^{N-1} + \dots + a_N,$$

$$B(q) = b_0 q^M + b_1 q^{M-1} + \dots + b_M.$$

CORRESPONDÊNCIA COM A TRANSFORMADA z :

OPERADOR NO DOMÍNIO DO TEMPO $q \leftrightarrow z \leftarrow \in \mathbb{C}$ NO DOMÍNIO DA TRANSFORMADA

OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA DO IMPULSO

$$q \ x(k) = x(k+1) = \underline{\Phi} x(k) + \underline{\Gamma} u(k)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

$$\Rightarrow (q \underline{I} - \underline{\Phi}) x(k) = \underline{\Gamma} u(k) \Rightarrow x(k) = (q \underline{I} - \underline{\Phi})^{-1} \underline{\Gamma} u(k)$$

ASSIM:

$$y(k) = \left[C (q \underline{I} - \underline{\Phi})^{-1} \underline{\Gamma} + D \right] u(k)$$

$H(q) \leftarrow$ OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA
DO IMPULSO

NO CASO SISO:

$$H(q) := \frac{B(q)}{A(q)}$$

$$y(k) = H(q) u(k)$$

ATENÇÃO, SERIA ERRADO ESCREVER:

$$H(q) = \frac{y(k)}{u(k)}$$

NOTAS SOBRE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA:

① NO DOMÍNIO DA TRANSFORMADA z

② $H(z) = C(zI - \Phi)^{-1} \Gamma + D$

③ $y(z) = H(z) u(z)$

④ NO CASO SISO:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

E

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} \rightarrow \text{ESTÁ CORRETO PARA SISO E SIMO}$$