UERJ

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: **Controle por Computador**

Aula: **Parte I: Análise de Sistemas em Tempo Discreto: Controlabilidade, Alcançabilidade e Estabilizabilidade**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2021/2

Rio de Janeiro, 07 de outubro de 2021.

Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 3.4 da 3ª Edição.

$u \in \mathbb{R}^r$, $x \in \mathbb{R}^n$

CONSIDERA-SE O SISTEMA:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \geq 0. \quad (3.15)$$

DEF. 3.7 - CONTROLABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É CONTROLÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE A ORIGEM SEJA ATINGIDA EM TEMPO FINITO $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

DEF. 3.8 - ALCANÇABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É ALCANÇÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE UM ESTADO ARBITRÁRIO $x_p \in \mathbb{R}^n$ SEJA ATINGIDO EM TEMPO FINITO $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

ESTABILIZABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É ESTABILIZÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE A ORIGEM SEJA ATINGIDA AO MENOS ASSINTOTICAMENTE $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ (EM TEMPO INFINITO).

CONCLUI-SE:

$$\text{ALCANÇABILIDADE} \Downarrow \text{CONTROLABILIDADE} \Downarrow \text{ESTABILIZABILIDADE}$$

SOLUÇÃO DA EQ. (3.15):

$$x(n) = \Phi^{n} x_0 + \Phi^{n-1}\Gamma u(0) + \dots + \Phi\Gamma u(n-2) + \Gamma u(n-1)$$

$$= \Phi^{n} x_0 + W_c U,$$

NA QUAL:

$$W_c := \left[\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^{2}\Gamma \dots \Phi^{n-1}\Gamma\right] \in \mathbb{R}^{n \times nr}$$

$$U := \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

• SE W_c FOR INVERSÍVEL PELA ESQUERDA, ENTÃO:

$$W_c U = x(n) - \Phi^n x_0 \Rightarrow \underbrace{W_c^{-1} W_c}_{I} U = W_c^{-1}\left(x(n) - \Phi^n x_0\right)$$

$$\Rightarrow U = W_c^{-1}\left(\underbrace{x(n)}_{x_p} - \Phi^n x_0\right)$$

• SE $r=1$, ENTÃO $W_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, LOGO SERÁ INVERSÍVEL S.S.S. $\det(W_c) \neq 0$.

• SE $r \geq 1$, ENTÃO $W_c \in \mathbb{R}^{n \times nr}$ SERÁ INVERSÍVEL PELA ESQUERDA S.S.S. $\text{posto}(W_c) = n$ (COMPLETO).

TEOREMA 3.7: O SISTEMA (3.15) É ALCANÇÁVEL S. S. S. $\text{posto}(W_c) = n$.

Ex. 1.a:

$$x(k+1) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0{,}5 \end{array}\right] x(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ \hline -2 \end{array}\right] u(k)$$

ALCANÇÁVEL

$\Downarrow$

CONTROLÁVEL

$\Downarrow$

ESTABILIZÁVEL

Ex. J.6:

$$x(k+1) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0{,}5 \end{array}\right] x(k) + \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ \hline -2 \end{array}\right] u(k)$$

$|\lambda_1| > 1 \Rightarrow$ INSTÁVEL

E NÃO CONTROLÁVEL

$$x_2(k) = 2^k x_2(0)$$

$$\downarrow$$

$$\infty$$

NÃO ALCANÇÁVEL

NÃO CONTROLÁVEL

NÃO ESTABILIZÁVEL

Ex. J.c:

NÃO CONTROLÁVEL NEM ALCANÇÁVEL

$$x(k+1) = \left[\begin{array}{cc|c} 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0,5 \end{array}\right] x(k) + \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ \hline -2 \end{array}\right] u(k)$$

ALCANÇÁVEL

$|\lambda_1| < 1 \Rightarrow$ ESTÁVEL

E NÃO CONTROLÁVEL

NÃO ALCANÇÁVEL

NÃO CONTROLÁVEL

É ESTABILIZÁVEL

$$x_2(k) = 0,5^k x_2(0)$$
$$\downarrow$$
$$0$$

Ex. J.d:

ALCANÇÁVEL

$$x(k+1) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0{,}5 \end{array}\right] x(k) + \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ \hline -2 \end{array}\right] u(k)$$

ALCANÇÁVEL

NÃO ALCANÇÁVEL

$|\lambda_1| < 1 \Rightarrow$ ESTÁVEL

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ CONTROLÁVEL

É CONTROLÁVEL

$\Downarrow$

É ESTABILIZÁVEL

$x_2(k) = 0^k x_2(0)$

$\downarrow$

0

FORMA CANÔNICA CONTROLÁVEL (pp. 96-97)

$$z(k+1) = \left[\begin{array}{cccc|c} -a_1 & -a_2 & \cdots & & -a_n \\ \hline 1 & & & 0 & 0 \\ & 1 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{array}\right] z(k) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] u(k)$$

MATRIZ COMPANHEIRA

$$y(k) = [\, b_1 \;\; b_2 \;\; \cdots \;\; b_n \,]\, z(k)$$

É ALCANÇÁVEL! $\Longrightarrow$ É CONTROLÁVEL

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: **Controle por Computador**

Aula: **Parte II: Análise de Sistemas em Tempo Discreto: Observabilidade e Detectabilidade**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2021/2

Rio de Janeiro, 07 de outubro de 2021.

Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 3.4 da 3ª Edição.

OBSERVABILIDADE

CONSIDERA-SE:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k), \quad x(0) = x_0,$$
$$y(k) = C x(k) + D u(k), \quad k \geq 0, \qquad (3.15)$$

NA QUAL

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ E $y \in \mathbb{R}^p$.

SOLUÇÃO:

$$x(n) = \Phi^n x_0 + W_c U \leftarrow \text{AULA DE 05/10/2021} \qquad (3.16)$$

ENTÃO: $y(n) = C\Phi^n x_0 + C W_c U + D u(n)$

DEFINIÇÃO 3.9 (p.98): O ESTADO $x_0 \neq 0$ É NÃO-OBSERVÁVEL SE EXISTIR $k_1 \geq n-1$ TAL QUE $y(k) = 0$ PARA $k \in [0, k_1]$ QUANDO $x(0) = x_0$ E $u(k) = 0$ PARA TODO $k \in [0, k_1]$.

DEFINIÇÃO (p. 98 SEM DESTAQUE): O SISTEMA (3.15) É OBSERVÁVEL SE $\exists k$ FINITO TAL QUE O CONHECIMENTO DAS SEQUÊNCIAS DE ENTRADA $u(0), \dots, u(k-1)$ E SAÍDA $y(0), \dots, y(k-1)$ FOR SUFICIENTE PARA ESTIMAR O ESTADO INICIAL x_0.

SEQUÊNCIA DE SAÍDA:

$$y(0) = C x_0 + D u(0)$$
$$y(1) = C x(1) + D u(1) = C \Phi x_0 + C \Gamma u(0) + D u(1)$$
$$y(2) = C x(2) + D u(2) = C \Phi^2 x_0 + C \Phi \Gamma u(0) + C \Gamma u(1) + D u(2)$$
$$\vdots$$
$$y(n-1) = C \Phi^{n-1} x_0 + C \Phi^{n-2} \Gamma u(0) + \ldots + D u(n-1)$$

ENTÃO:

$$y(0) = C x_0 + W_0 U$$
$$y(1) = C \Phi x_0 + W_1 U \quad \ldots \quad y(n-1) = C \Phi^{n-1} x_0 + W_{n-1} U$$

NAS QUAIS:

$$U := \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}, \quad W_i \rightarrow \text{MATRIZES APROPRIADOS}$$

DEFINI-SE

$$Y := \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix},$$

ENTÃO:

$$Y = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}}_{W_0 \in \mathbb{R}^{pn \times n}} x_0 + WU \iff Y = W_0 x_0 + WU \implies$$

$$\implies W_0 x_0 = Y - WU$$

SE $\exists W_0^{-1}$ PELA ESQUERDA, ENTÃO:

$$\underbrace{W_0^{-1} W_0}_{I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}} x_0 = W_0^{-1} Y - W_0^{-1} W U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = W_0^{-1} Y - W_0^{-1} W U}$$

TEOREMA 3.8: O SISTEMA (3.15) É OBSERVÁVEL S.S.S. $\text{posto}(W_0) = n$ (COMPLETO).

NOTA: $\text{posto}(W_0) = n \Leftrightarrow \exists W_0^{-1}$ PELA ESQUERDA.

DEFINIÇÃO 3.10: O SISTEMA (3.15) É DETECTÁVEL SE OS ESTADOS NÃO-OBSERVÁVEIS DECAIREM ASSINTOTICAMENTE PARA A ORIGEM.

NOTA: IMPLICA QUE ESTES ESTADOS SÃO VINCULADOS A AUTOVALORES NO INTERIOR DO CÍRCULO UNITÁRIO ($|\lambda_{\bar{o}i}| < 1$).

OBSERVÁVEL $\Rightarrow$ DETECTÁVEL

Ex. 3.10:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1,1 & -0,3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \end{bmatrix} x(k)$$

MATRIZ DE OBSERVABILIDADE:

$$W_0 = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,6 & -0,3 \end{bmatrix}$$

NÃO-OBSERVÁVEL

$\Uparrow$

$$\det(W_0) = 1.(-0,3) - 0,6.(-0,5) = 0 \Leftrightarrow \text{posto}(W_0) < 2$$

O ESPAÇO NULO DE W_o É O SUBESPAÇO NÃO-OBSERVÁVEL DO SISTEMA.

$$W_o x = 0$$

NO EXEMPLO:

$$x = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

BASE DO ESPAÇO NULO: $\left\{ \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

FORMA CANÔNICA OBSERVÁVEL

$$z(k+1) = \left[\begin{array}{c|ccccc} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -a_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right] z(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] z(k)$$

É OBSERVÁVEL!

Ex. 10.1:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}7} \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

É OBSERVÁVEL!

$\Downarrow$

É DETECTÁVEL!

Ex. 10.2:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}7} \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

É OBSERVÁVEL!

$\Downarrow$

É DETECTÁVEL!

Ex. 10.3:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

x_1 é uma variável de estado não observável nem estável $\Longrightarrow$ não detectável!

NÃO É OBSERVÁVEL!

NÃO É DETECTÁVEL!

$$x_1(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k)$$

$$\Downarrow$$

INSTÁVEL! $\Longleftarrow$ $x_1(k) = 2^k x_1(0) + \ldots$

Ex. 10.4:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}7} \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

NÃO É OBSERVÁVEL!

É DETECTÁVEL!

$x_1(k+1) = 0{,}5x_1(k) + x_2(k)$

$\Downarrow$

ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL! $\longrightarrow x_1(k) = 0{,}5^k x_1(0) + \ldots$