Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: **Controle por Computador**

Aula: **Projeto de Sistemas de Controle no Espaço de Estado: Realimentação de Estado**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2025/2

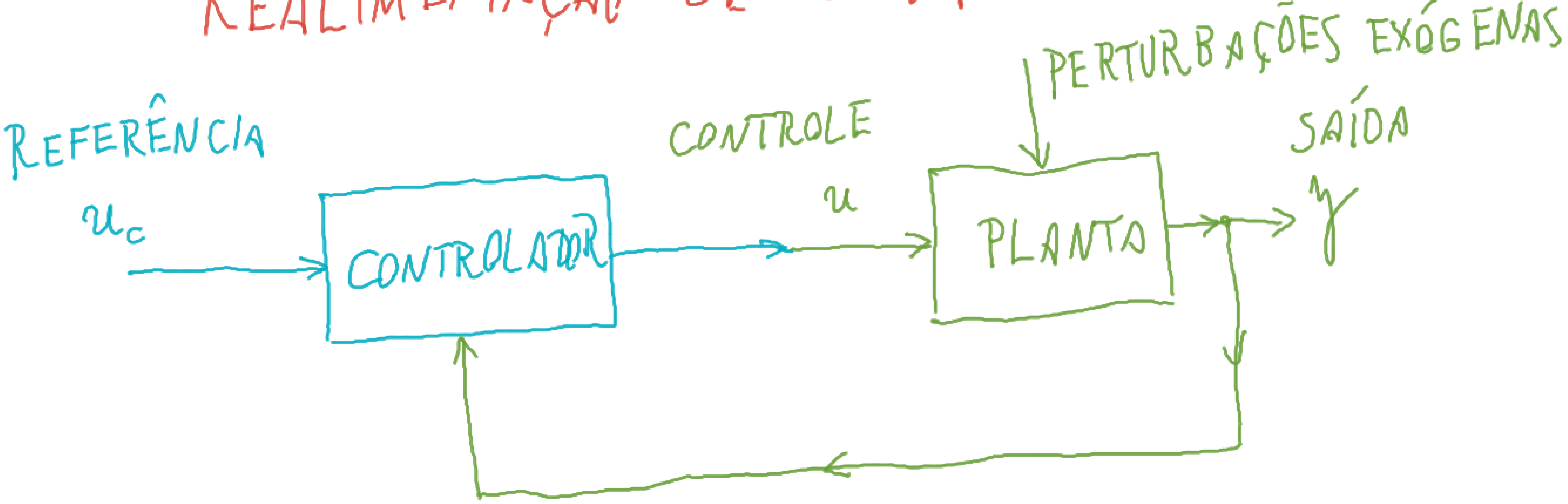
Rio de Janeiro, 06 de novembro de 2025.

Referências

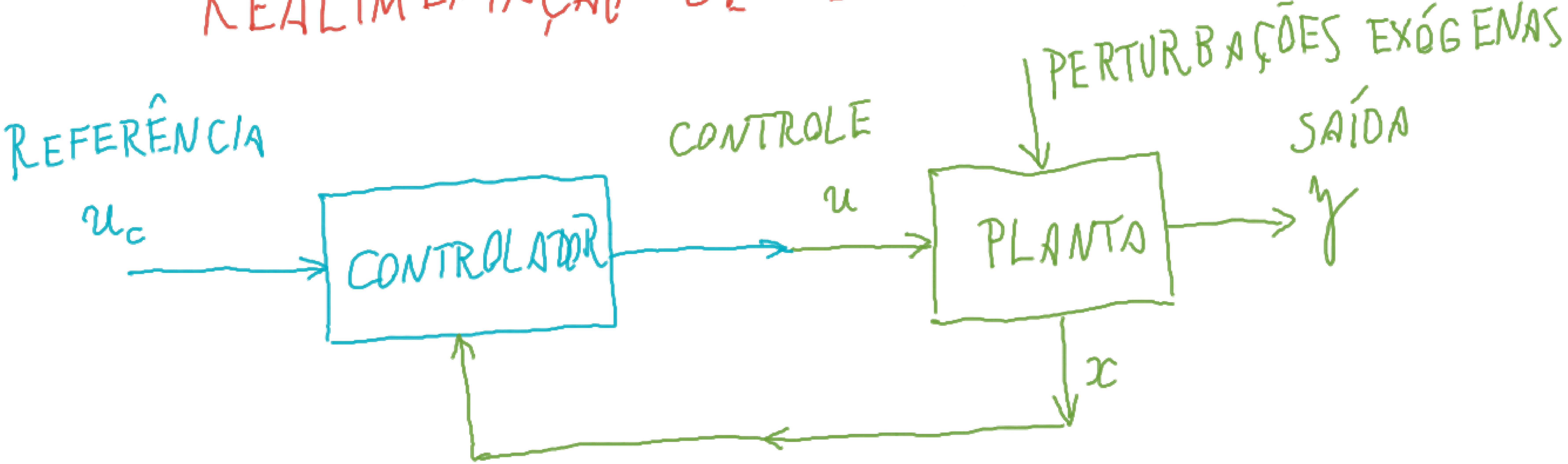
- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para a Seção 4.3 e pp. 148-149 da 3ª Edição.

REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA



REALIMENTAÇÃO DE ESTADO



REALIMENTAÇÃO DE ESTADO

PLANTA:

$$x(k+1) = \Phi\, x(k) + \Gamma\, u(k) \qquad (1)$$

$$y(k) = C\, x(k) \qquad (2)$$

CONTROLADOR:

$$u(k) = L_c\, u_c(k) - L\, x(k) \qquad (3)$$

REALIMENTAÇÃO DE ESTADO

PLANTA:

$$x(k+1) = \Phi\, x(k) + \Gamma\, u(k) \qquad (1)$$

$$y(k) = C\, x(k) \qquad (2)$$

$x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^p$

CONTROLADOR:

$$u(k) = \underbrace{L_c}_{\text{MATRIZ DE PRÉ-COMPENSAÇÃO}}\ \underbrace{u_c}_{\text{SINAL DE REFERÊNCIA}}(k) - \underbrace{L}_{\text{MATRIZ DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADO}}\, x(k) \qquad (3)$$

$L_c \in \mathbb{R}^{r \times r}$

$L \in \mathbb{R}^{r \times m}$

$u_c \in \mathbb{R}^r$

MALHA FECHADA: SUBSTITUI-SE (3) EM (1):

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma \left(L_c u_c(k) - L x(k) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k+1) = \left(\Phi - \Gamma L \right) x(k) + \Gamma L_c u_c(k)$$

$$y(k) = C x(k)$$

MALHA FECHADA: SUBSTITUI-SE (3) EM (1):

$$x(k+1) = \Phi\, x(k) + \Gamma \left(L_c u_c(k) - L\, x(k) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k+1) = \left(\Phi - \Gamma L \right) x(k) + \Gamma L_c u_c(k)$$

$$y(k) = C\, x(k)$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA:

$$H_{cl}(z) = C\left(zI - \Phi + \Gamma L \right)^{-1} \Gamma L_c \quad \leftarrow \text{MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA}$$

$$y(z) = H_{cl}(z)\, u_c(z)$$

NO CASO SISO $u_c(z)$ E $y(z)$ SÃO ESCALARES, ENTÃO PODE-SE ESCREVER:

$$H_{cl}(z) = \frac{y(z)}{u_c(z)}$$

GANHO CC (DC):

$$s = 0 \text{ rad/s} \Rightarrow z = e^{sh} = e^{0h} = 1$$

$$H_{cl}(1) = C(I - \Phi + \Gamma L)^{-1} \Gamma L_c \Rightarrow$$

$$L_c = \left[C(I - \Phi + \Gamma L)^{-1} \Gamma\right]^{-1} H_{cl}(1)$$

PROJETADA PARA OS AUTOVALORES DESEJADOS

GANHO CC DESEJADO

REF.: (ÅSTRÖM & WITTENMARK, 1997, PP. 148-149), "A NAIVE APRROACH" → UMA ABORDAGEM INGÊNUA.

Ex.:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(k)$$

PROBLEMA: PROJETAR UMA REALIMENTAÇÃO DE ESTADO PARA QUE OS AUTOVALORES SEJAM $\lambda_1 = 0,5$ E $\lambda_2 = 0,9$.

REALIMENTAÇÃO DE ESTADO:

$$u(k) = -Lx(k) = -\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} x(k)$$

MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE ESTADO DA MALHA FECHADA:

$$\Phi - \Gamma L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ (3-5l_1) & (4-5l_2) \end{bmatrix}$$

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DA MALHA FECHADA:

$$|\lambda I - \Phi + \Gamma L| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ (3-5l_1) & (4-5l_2) \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda-1) & -2 \\ (5l_1-3) & (\lambda-4+5l_2) \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4+5l_2) -$$

$$-(-2)(5l_1-3) = \lambda^2 + \lambda(\underbrace{-1-4+5l_2}_{-5+5l_2}) + \underbrace{10l_1 - 6 + 4 - 5l_2}_{10l_1 - 5l_2 - 2}$$

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DESEJADO:

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=(\lambda-0{,}5)(\lambda-0{,}9)=$$

$$=\lambda^2-1{,}4\lambda+0{,}45$$

IGUALANDO-SE OS POLINÔMIOS:

$$\left.\begin{aligned}
&-5+5l_2=-1{,}4 \Rightarrow l_2=\frac{-1{,}4+5}{5}=0{,}72\\
&-5l_2+10l_1-2=0{,}45 \Rightarrow l_1=\frac{0{,}45+2+5\cdot 0{,}72}{10}=0{,}605
\end{aligned}\right\}$$

$$L=\begin{bmatrix}0{,}605 & 0{,}72\end{bmatrix}$$

Ex.:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

PROBLEMA 1: PROJETAR UMA REALIMENTAÇÃO DE ESTADO PARA QUE OS AUTOVALORES SEJAM $\lambda_1 = 0{,}5$ E $\lambda_2 = 0{,}9$.

SOLUÇÃO: $L = \begin{bmatrix} 0{,}605 & 0{,}72 \end{bmatrix}$

PROBLEMA 2: INCLUIR ENTRADA DE REFERÊNCIA COM GANHO CC $\underbrace{\text{UNITÁRIO}}$.

$$L_c = \frac{\overbrace{H_{cl}(1)}^{=1}}{C(I-\Phi+\Gamma L)^{-1}\Gamma}$$

DO PROBLEMA 1

$$I - \Phi + \Gamma L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}605 & 0{,}72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3{,}025 & 3{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0{,}025 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

$$(I - \Phi + \Gamma L)^{-1} = \frac{\mathrm{cofat}^T (I - \Phi + \Gamma L)}{\det (I - \Phi + \Gamma L)} = \frac{\begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}025 \\ -(-2) & 0 \end{bmatrix}^T}{0 \cdot 0{,}6 - 0{,}025(-2)} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0{,}6 & 2 \\ -0{,}025 & 0 \end{bmatrix}}{0{,}05} = \begin{bmatrix} 12 & 40 \\ -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C\left(I-\Phi+\Gamma L\right)^{-1}\Gamma=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12 & 40\\ -0{,}5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}=200$$

$$L_c=\frac{H_{cl}(1)}{C\left(I-\Phi+\Gamma L\right)^{-1}\Gamma}=\frac{1}{200}=0{,}005$$

TEOREMA: O PAR $\{\Phi, \Gamma\}$ É <u>ALCANÇÁVEL</u> S.S.S. É POSSÍVEL POSICIONAR OS AUTOVALORES DA MATRIZ $(\Phi - \Gamma L)$ ARBITRARIAMENTE POR MEIO DA ESCOLHA DA MATRIZ L.

Ex. 4.3:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\det(W_c) = \det([\Gamma \quad \Phi\Gamma]) = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ NÃO ALCANÇÁVEL!

REALIMENTAÇÃO DE ESTADO: $u(k) = -L\,x(k)$,

$L = [l_1 \quad l_2]$

$$\left| zI - \Phi + \Gamma L \right| = \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} (z - 0,5 + l_1) & (-1 + l_2) \\ 0 & (z - 0,3) \end{vmatrix} = (z - 0,5 + l_1)(z - 0,3)$$

AUTOVALORES:

$z_1 = 0,5 - l_1 \leftarrow$ PODE SER POSICIONADO ARBITRARIAMENTE

$z_2 = 0,3 \leftarrow$ NÃO ALCANÇÁVEL $\Rightarrow$ FIXO!

$\leftarrow$ DENTRO DO CÍRCULO UNITÁRIO $\rightarrow$ SIST. ESTABILIZÁVEL

COMO ESCOLHER OS AUTOVALORES

$$z = e^{sh}$$

PARA SISTEMAS DE 2ª ORDEM:

$\omega_n \rightarrow$ FREQUÊNCIA NATURAL NÃO AMORTECIDA (rad/s);

$\zeta \rightarrow$ FATOR DE AMORTECIMENTO.

POLOS NO PLANO S: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Vide: https://www.lee.uerj.br/~jpaulo/Contri/sistemas-de-segunda-ordem.html

NO PLANO z:

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2} h} = e^{(-\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\xi^2}) h}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = e^{-\xi \omega_n h} \left(\cos\left(\omega_n h \sqrt{1-\xi^2}\right) \pm j \,\mathrm{sen}\left(\omega_n h \sqrt{1-\xi^2}\right) \right)$$

SE $\omega_n \rightarrow +\infty$ rad/s $\Rightarrow z_{1,2} \rightarrow 0$

TODOS AUTOVALORES EM $z=0$ IMPLICAM A RESPOSTA "DEAD BEAT" (BATIDA MORTA).