



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

# Disciplina: Controle por Computador



**Aula: Parte I: Análise de Sistemas em Tempo Discreto:  
Estabilidade Entrada/Saída**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2021/2

Rio de Janeiro, 05 de outubro de 2021.



## Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3<sup>rd</sup> ed., Dover Publications. (\*)

(\*) Organizado para a Seção 3.2 da 3<sup>a</sup> Edição.

# ESTABILIDADE INTERNA DE SISTEMAS LINEARES

$$x(k+1) = \Phi x(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \geq 0$$

SOLUÇÃO:

$$x(k) = \Phi^k x_0, \quad k \geq 0.$$

PONTO DE EQUILÍBRIO:  $x(k+1) = x(k), \quad \forall k \geq 0$   
 $x(k) = x(k+1) = \Phi x(k) \Rightarrow (\Phi - I)x(k) = 0 \rightarrow x \in \text{ESPAÇO NULO DE } (\Phi - I)$

TEOREMA 3.1: O SISTEMA LINEAR É  
ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL S.S.S. TODOS  
OS SEUS AUTOVALORES ESTIVEREM DENTRO  
DO CÍRCULO UNITÁRIO:  $|\lambda_i| < 1, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ .

$$H(k) = \left. \begin{cases} 0, & k < 0 \\ D, & k = 0 \\ C \Phi^{k-1} \Gamma, & k \geq 1 \end{cases} \right\} \text{S\AA O LIMITADOS}$$

DEFINIÇÃO 3.3: "BOUNDED-INPUT - BOUNDED-OUTPUT (BIBO) STABILITY": ENTRADA LIMITADA  $\Rightarrow$  SAÍDA LIMITADA

TEOREMA 3.2: A ESTABILIDADE ASSINTÓTICA ( $|\lambda_i| < 1$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ )  $\Rightarrow$  BIBO ESTABILIDADE.  
 $\Phi^k \rightarrow 0$  NA MEDIDA QUE  $k \rightarrow +\infty$ .

# ESTABILIDADE ENTRADA/SAÍDA

$$x(0) = 0$$

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k), \quad x(0) = 0,$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \quad k \geq 0$$

SOLUÇÃO:

$$y(k) = H(k) * u(k)$$

# Ex. 3.1, p. 79: OSCILADOR HARMÔNICO

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos \omega h & \text{sen } \omega h \\ -\text{sen } \omega h & \cos \omega h \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega h \\ \text{sen } \omega h \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

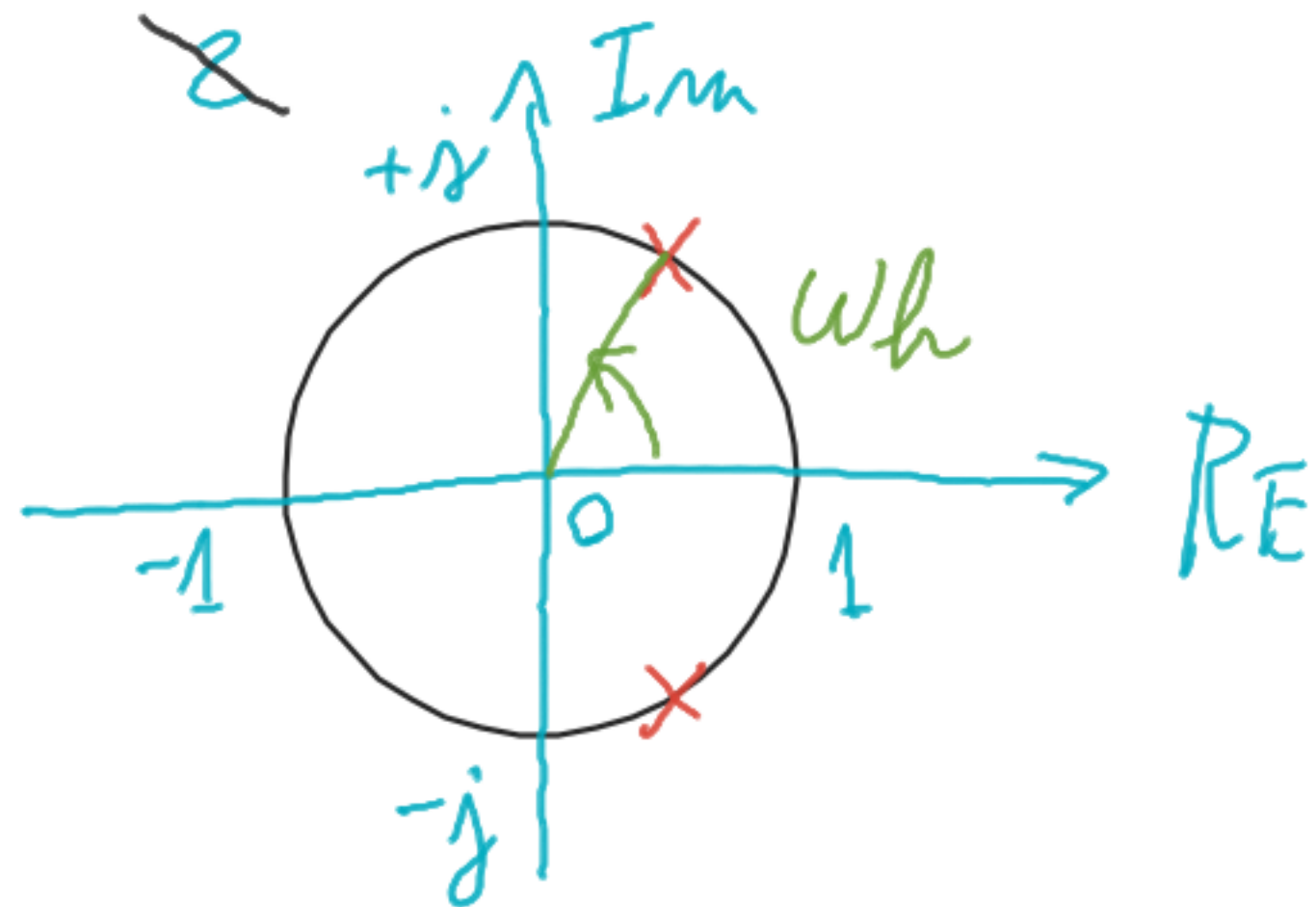
• SISTEMA INTERNAMENTE ESTÁVEL:  $\|x(k)\| \equiv \|x(0)\|$  SE  $u(k) \equiv 0$

• AUTOVALORES:  $\det(\lambda I - \Phi) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos \omega h & \text{sen } \omega h \\ -\text{sen } \omega h & \cos \omega h \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda - \cos \omega h) & -\sin \omega h \\ \sin \omega h & (\lambda - \cos \omega h) \end{vmatrix} = (\lambda - \cos \omega h)^2 - (-\sin^2 \omega h) =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda \cos \omega h + \cos^2 \omega h + \sin^2 \omega h = \lambda^2 - 2\lambda \cos \omega h + 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \cos \omega h \pm \sqrt{4 \cos^2 \omega h - 4}}{2} = \cos \omega h \pm j \sin \omega h$$





NÃO É BIBO ESTÁVEL: POIS ENTRADAS  
SENOIDAIS COM FREQUÊNCIA  $\omega + \frac{2m\pi}{h}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  
EXCITARIAM OSCILAÇÕES ILIMITADAS.

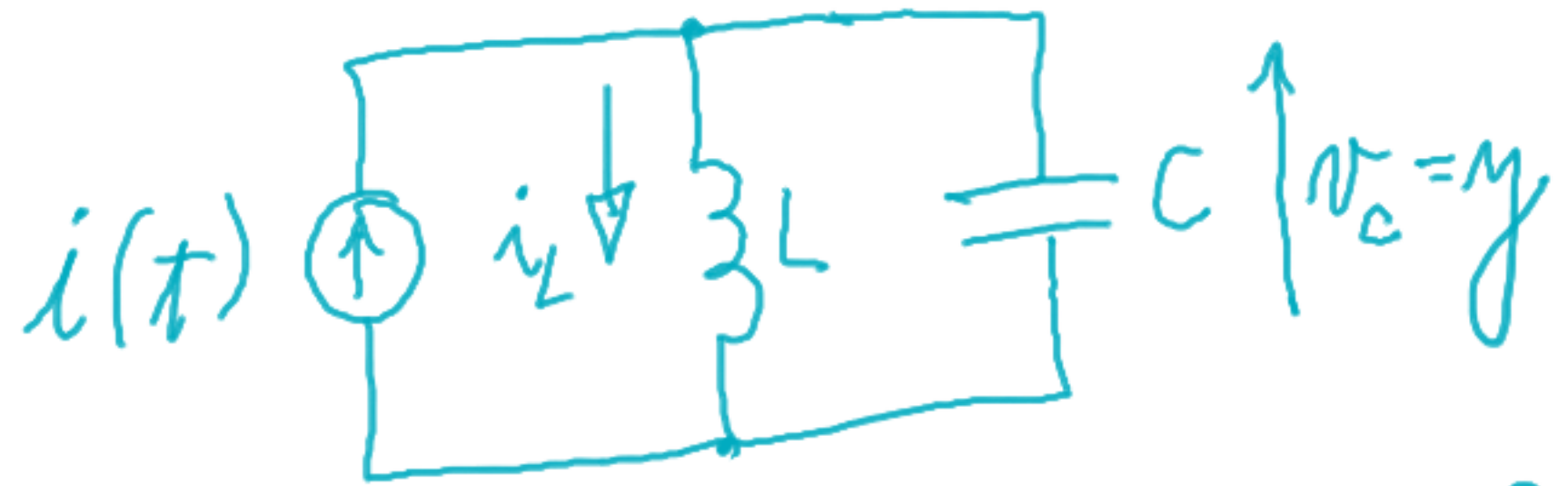
# ANALOGIA: CIRCUITO LC

AUTOVALORES:  $\lambda = \pm j\omega_0$

FREQ. RESSONÂNCIA:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

NÃO É BIBO  
ESTÁVEL!



- 1 SE  $i(t) \equiv 0A$ , AS VARIÁVEIS DE ESTADO APRESENTARÃO OSCILAÇÕES SENOIDAIS PERPÉTUAS, POIS A ENERGIA INICIAL (ESTADO) NÃO SE DISSIPA.  $\rightarrow$  SEM CONV. ASSINTÓTICA
- 2 SE  $i(t) = I \sin(\omega t)$ ,  $\omega \neq \omega_0$ , ENTÃO HAVERÁ OSCILAÇÕES DE AMPLITUDE LIMITADA NA FREQUÊNCIA  $\omega$ .
- 3 SE  $i(t) = I \sin(\omega_0 t)$ , ENTÃO AS OSCILAÇÕES SERÃO ILIMITADAS  $\rightarrow$  RESSONÂNCIA!

TEOREMA: O SISTEMA É BIBO ESTÁVEL

S.S.S.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \|h(k)\|$  FOR FINITO.

---

Ex.:  $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

- É INTERNAMENTE INSTÁVEL, POIS HÁ AUTOVALOR (2) FORA DO CÍRCULO UNITÁRIO.

• BIBO ESTÁVEL?

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| = \sum_{k=1}^{+\infty} |c \Phi^{k-1} \Gamma| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5^{k-1} & 0 \\ 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 0,5^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} 0,5^k = \frac{1}{1-0,5} = 2 \Rightarrow \text{É FINITO}$$

⇓  
É BIBO ESTÁVEL

BIBO ESTÁVEL



TODOS

OS POLOS DA FUNÇÃO DE  
TRANSFERÊNCIA ESTÃO DENTRO DO  
CÍRCULO UNITÁRIO ( $|p_i| < 1$ ).

# TESTE DE ESTABILIDADE DE JURY

DENOMINADOR DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA  
OU O POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DE  $\Phi$ :

$$A(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$$

SUAS RAÍZES ESTÃO NO INTERIOR DO

CÍRCULO UNITÁRIO?

BASEADO NA TABELA:

$$\begin{array}{cccc}
 a_0^m & a_1^m & \dots & a_{m-1}^m & a_m^m \\
 a_m^m & a_{m-1}^m & \dots & a_1^m & a_0^m
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 a_0^{m-1} & a_1^{m-1} & \dots & a_{m-1}^{m-1} \\
 a_{m-1}^{m-1} & a_{m-2}^{m-1} & \dots & a_0^{m-1}
 \end{array}$$

$$a_0^0$$

$$a_i^{m-1} = a_i^m - \frac{a_m^m}{a_0^m} a_{m-1-i}^m$$

$$a_i^{k-1} = a_i^k - \frac{a_k^k}{a_0^k} a_{k-1-i}^k$$

TEOREMA 3.3: SE  $a_0 > 0$ , ENTÃO  $A(z) = 0$   
TEM TODAS AS RAÍZES NO INTERIOR DO  
CÍRCULO UNITÁRIO DESDE QUE TODOS  
 $a_0^k$  SEJAM POSITIVOS.

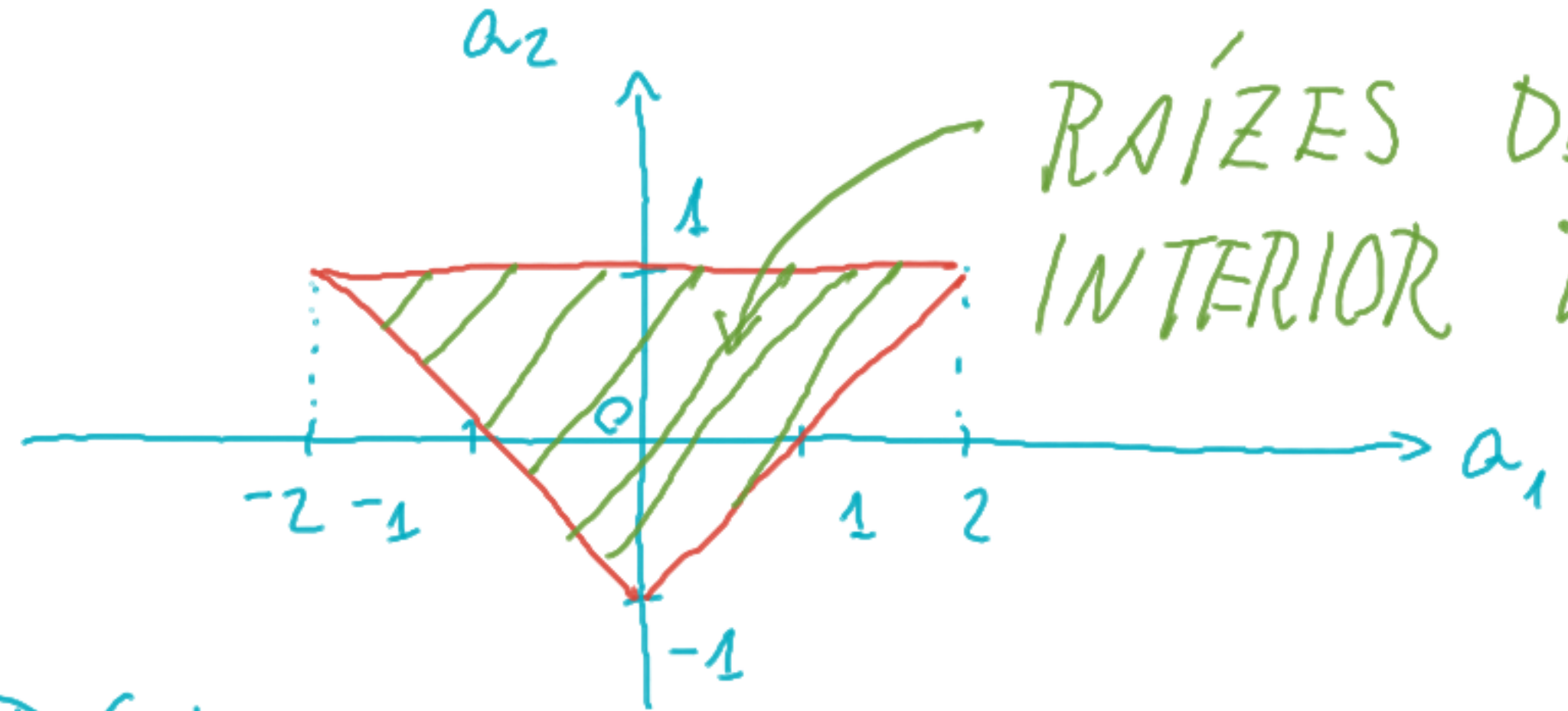
SE NENHUM  $a_0^k$  FOR NULO, ENTÃO O  
NÚMERO DE  $a_0^k < 0$  É O NÚMERO DE  
RAÍZES FORA DO CÍRCULO UNITÁRIO.



Ex. 1:

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$

TEMPO DISCRETO

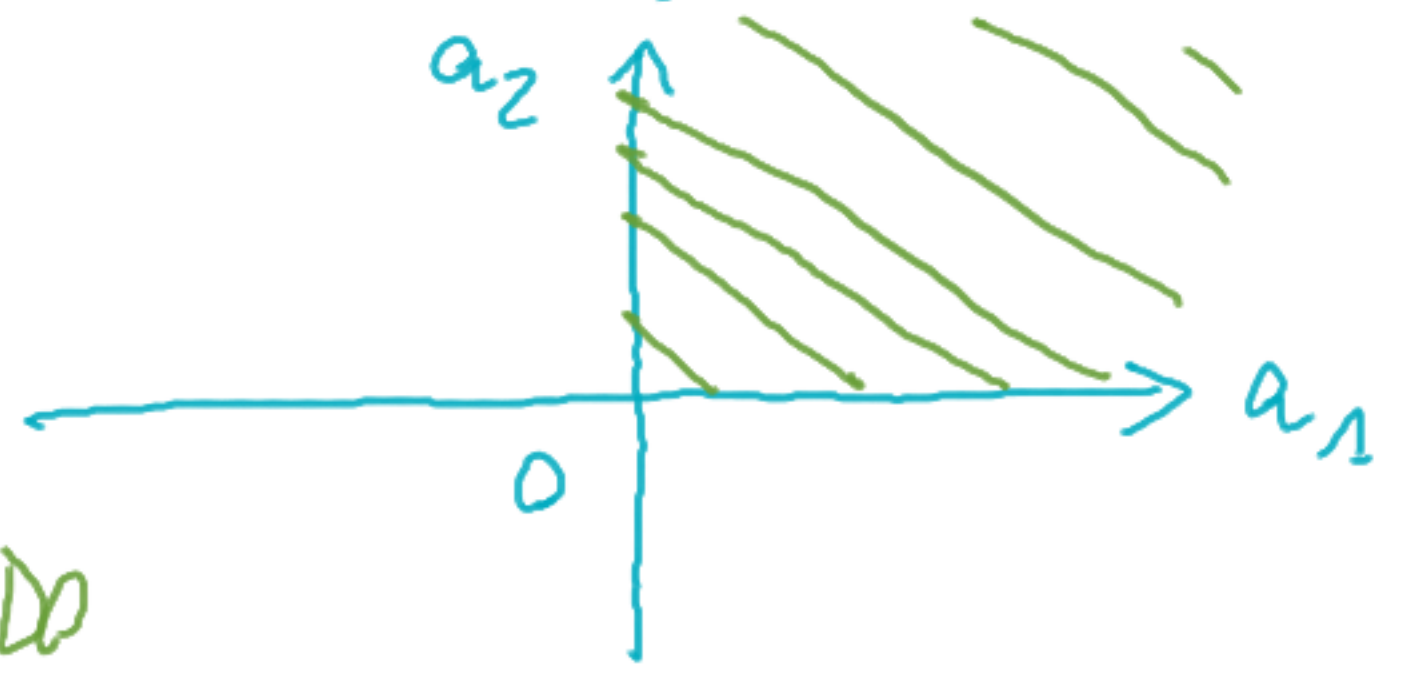


RAÍZES DE  $A(z)$  NO INTERIOR DO CÍRCULO UNITÁRIO

Ex. 2:

$$D(s) = s^2 + a_1 s + a_2$$

$a_1, a_2 > 0$   
 $\Rightarrow$  RAÍZES NO SEMIPLANO ESQUERDO



TEMPO CONTÍNUO



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

# Disciplina: Controle por Computador



**Aula: Parte II: Análise de Sistemas em Tempo Discreto: Controlabilidade, Alcançabilidade e Estabilizabilidade**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2021/2

Rio de Janeiro, 05 de outubro de 2021.



## Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3<sup>rd</sup> ed., Dover Publications. (\*)

(\*) Organizado para a Seção 3.4 da 3<sup>a</sup> Edição.

$$u \in \mathbb{R}^r, x \in \mathbb{R}^n$$

CONSIDERA-SE O SISTEMA:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \geq 0. \quad (3.15)$$

**DEF. 3.7 - CONTROLABILIDADE:** O SISTEMA (3.15) É CONTROLÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE A ORIGEM SEJA ATINGIDA EM TEMPO FINITO  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**DEF. 3.8 - ALCANÇABILIDADE:** O SISTEMA (3.15) É ALCANÇÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE UM ESTADO ARBITRÁRIO  $x_p \in \mathbb{R}^n$  SEJA ATINGIDO EM TEMPO FINITO  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

ESTABILIZABILIDADE: O SISTEMA (3.15) É ESTABILIZÁVEL SE É POSSÍVEL CONSTRUIR SEQUÊNCIAS DE CONTROLE TAIS QUE A ORIGEM SEJA ATINGIDA AO MENOS ASSINTOTICAMENTE  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  (EM TEMPO INFINITO).

CONCLUI-SE:

ALCANÇABILIDADE



CONTROLABILIDADE



ESTABILIZABILIDADE

SOLUÇÃO DA EQ. (3.15):

$$\begin{aligned}x(n) &= \Phi^n x_0 + \Phi^{n-1} \Gamma u(0) + \dots + \Phi \Gamma u(n-2) + \Gamma u(n-1) \\ &= \Phi^n x_0 + W_c U,\end{aligned}$$

NA QUAL:

$$W_c := [\Gamma \quad \Phi \Gamma \quad \Phi^2 \Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1} \Gamma] \in \mathbb{R}^{m \times nr}$$

$$U := \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

• SE  $W_c$  FOR INVERSÍVEL PELA ESQUERDA, ENTÃO:

$$W_c U = x(n) - \mathbb{I}^m x_0 \Rightarrow \underbrace{W_c^{-1} W_c}_{\mathbb{I}} U = W_c^{-1} (x(n) - \mathbb{I}^m x_0)$$

$$\Rightarrow U = W_c^{-1} (\underbrace{x(n)}_{x_p} - \mathbb{I}^m x_0)$$

• SE  $r=1$ , ENTÃO  $W_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , LOGO SERÁ INVERSÍVEL

s.s.s.  $\det(W_c) \neq 0$ .

• SE  $r \geq 1$ , ENTÃO  $W_c \in \mathbb{R}^{n \times nr}$  SERÁ INVERSÍVEL PELA ESQUERDA S.S.S.  $\text{posto}(W_c) = n$  (COMPLETO).

TEOREMA 3.7: O SISTEMA (3.15) É  
ALCANÇÁVEL S. S. S. posto  $(W_c) = m$ .



Ex. 3.7. a:  $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$

ENTÃO:  $W_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{posto}(W_c) = 2 \Leftrightarrow \exists W_c^{-1} \Leftrightarrow$  ALCANÇÁVEL

$\Downarrow$   
CONTROLÁVEL

$\Downarrow$   
ESTABILIZÁVEL

Ex. 3.7. b:  $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$

ENTÃO:  $W_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  MATRIZ  
NILPOTENTE

$\text{posto}(W_c) = 1 \Rightarrow \nexists W_c^{-1} \Leftrightarrow$  NÃO ALCANÇÁVEL

$$x(2) = \Phi^2 x_0 + W_c U$$

$$\Phi^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c/U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

CONTROLÁVEL

ESTABILIZÁVEL