Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

Disciplina: **Controle por Computador**

Aula: **Sistemas no Espaço de Estado em Tempo Contínuo com Sinais Amostrados**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turma 01 – 2024/2

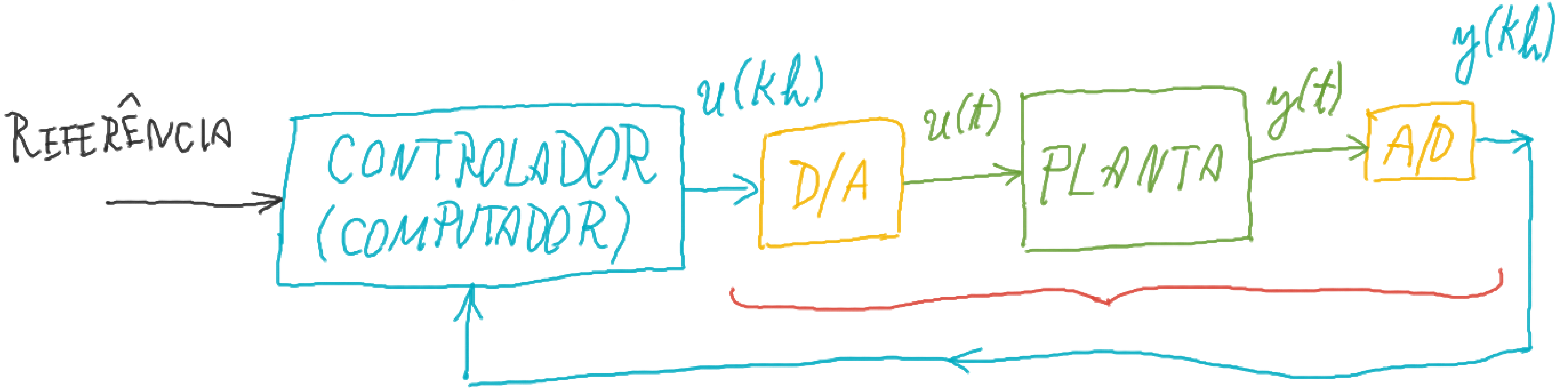
Rio de Janeiro, 05 de setembro de 2024.

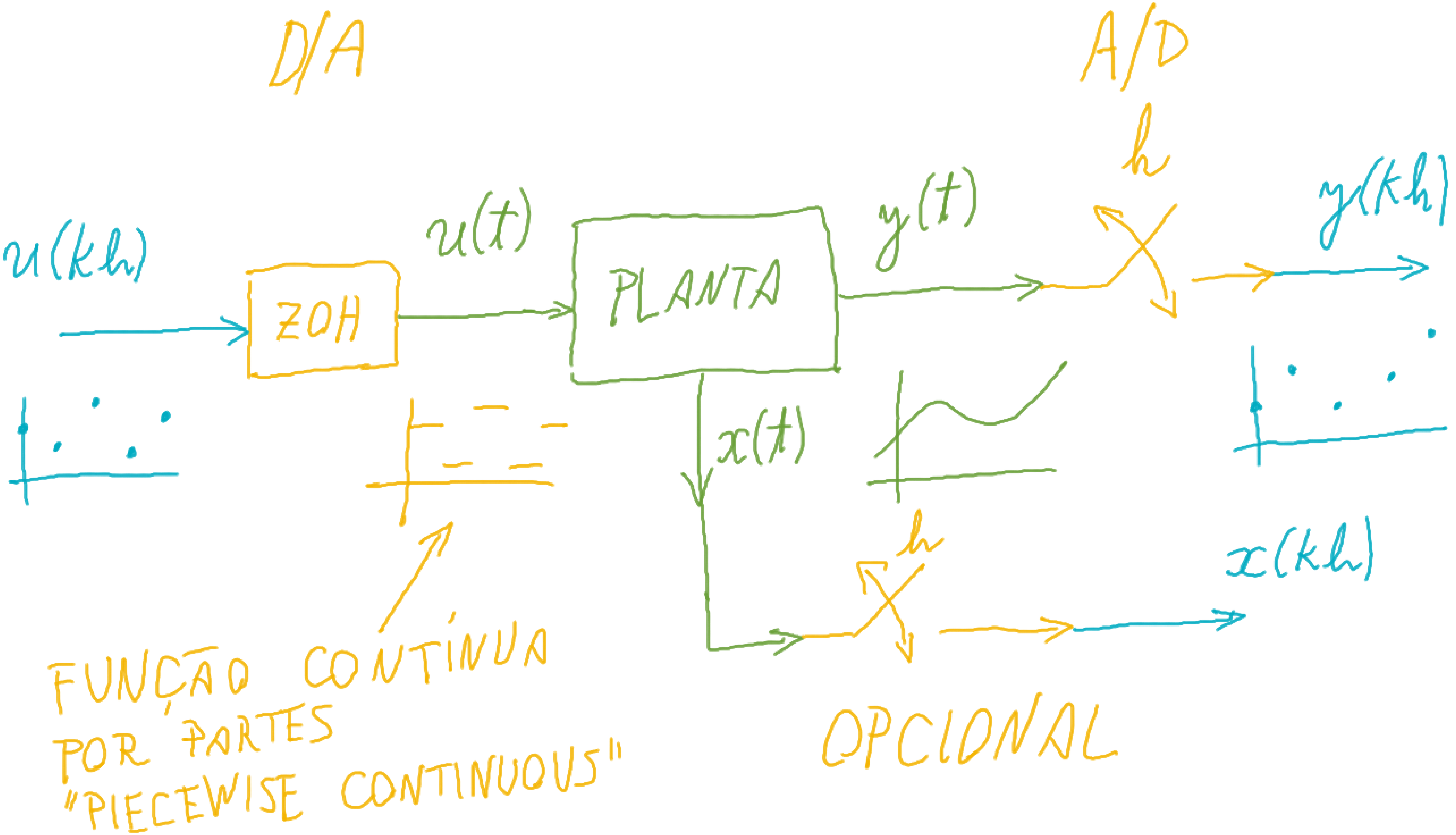
Referências

- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2011). Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd ed., Dover Publications. (*)

(*) Organizado para as Seções 2.1 a 2.3 da 3ª Edição.

UM SISTEMA DE CONTROLE POR COMPUTADOR




D/A
A/D
h
u(kh)
ZOH
u(t)
PLANTA
y(t)
y(kh)
x(t)
h
x(kh)
FUNÇÃO CONTÍNUA
POR PARTES
"PIECEWISE CONTINUOUS"
OPCIONAL

PLANTA LTI: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \geq 0,$$

NA QUAL:

$x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado;

$y \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída;

$u \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de entrada (controle).

AMOSTRADORES PERIÓDICOS:

$$y(kh) = y(t)\big|_{t=kh},$$

$$x(kh) = x(t)\big|_{t=kh},$$

NOS QUAIS:

$t \in \mathbb{R}$ é tempo contínuo (físico);

$k \in \mathbb{Z}$ é tempo discreto (número da amostra, "sample");

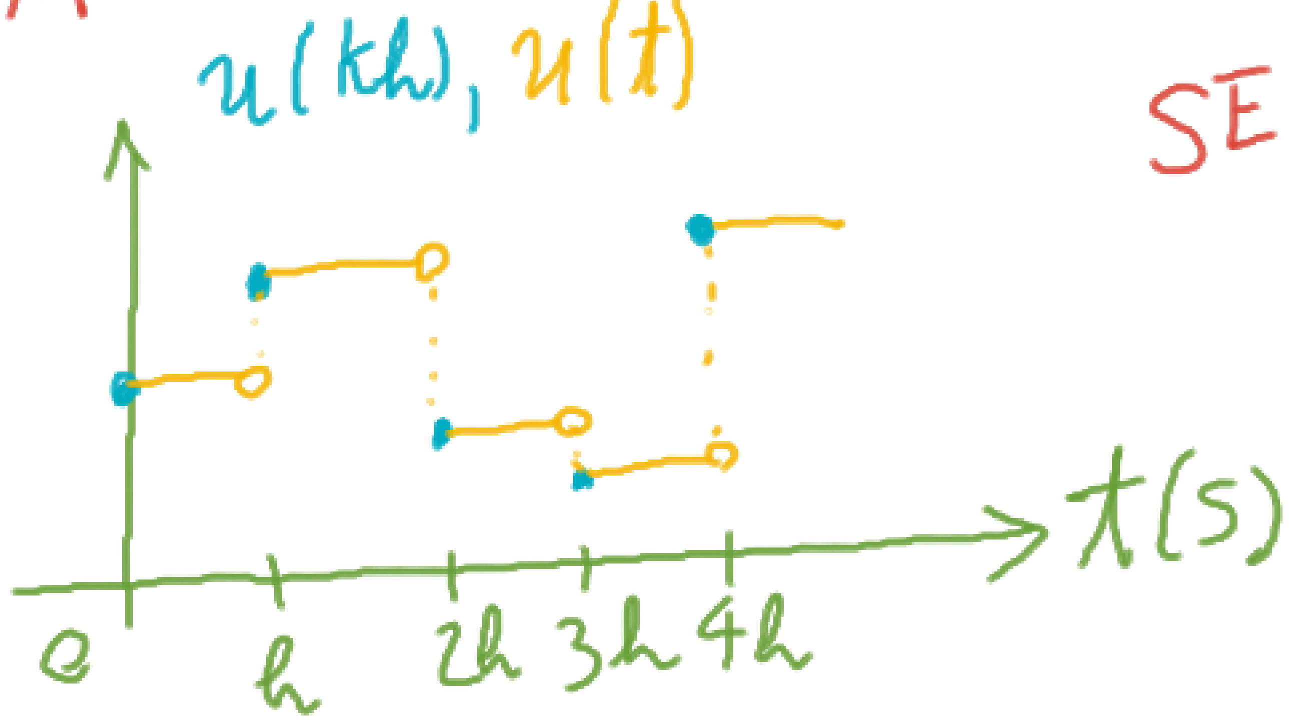
$h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ é o período de amostragem.

ZOH ("ZERO ORDER HOLD"):

$$u(t) = u(kh), \quad kh \leq t < kh + h.$$

INSTANTE DE AMOSTRAGEM ATUAL

INSTANTE DE AMOSTRAGEM SEGUINTE



SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau, \quad t \geqslant t_0$$

$kh+h$

$t_k = kh$

$u(t_k)$

$$x(t_{k+1}) = \underbrace{e^{\overbrace{A(t_{k+1}-t_k)}^{h}}}\, x(t_k) + \underbrace{\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} B\, d\tau\right]}_{\Gamma} u(t_k)$$

MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE ESTADO → $\boxed{\Phi = e^{Ah}}$

Scilab: phi=expm(A*h)

$$\Gamma = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A\underbrace{(t_{k+1}-\tau)}_{\bar{t}}} B\, d\tau = \int_{h}^{0} e^{A\bar{t}} B(-d\bar{t}) \Rightarrow$$

$$d\tau = -d\bar{t}$$

$$\boxed{\Gamma = \int_0^h e^{At} B\, dt}$$

MODELO EM TEMPO DISCRETO:

$$x(kh+h) = \Phi x(kh) + \Gamma u(kh), \quad x(0) = x_0,$$

$$y(kh) = Cx(kh) + Du(kh), \quad k \geq 0.$$

DESENVOLVIMENTO DAS MATRIZES Φ E Γ VIA TRANSFORMADA DE LAPLACE:

$$\mathcal{L}\left\{\dot{x}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{Ax(t) + Bu(t)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \Rightarrow$$

NO INTERVALO $0 \leq t < h$

$$\longrightarrow \mathcal{L}\left\{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{DEGRAU}}}{u(0)}\right\} = \frac{u(0)}{s}$$

$$\Rightarrow \quad sX(s) - AX(s) = x_0 + B \cdot \frac{1}{s} u_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (sI - A)X(s) = x_0 + \frac{B}{s} u_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = (sI-A)^{-1} x_0 + (sI-A)^{-1} \frac{B}{s} u_0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1} x_0 + (sI-A)^{-1} \frac{B}{s} u_0\right\}$$

$$\Rightarrow \quad x(\underset{h}{t}) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}\Big|_{t=h}}_{\Phi} x_0 + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1} \frac{B}{s}\right\}\Big|_{t=h}}_{\Gamma} u_0$$

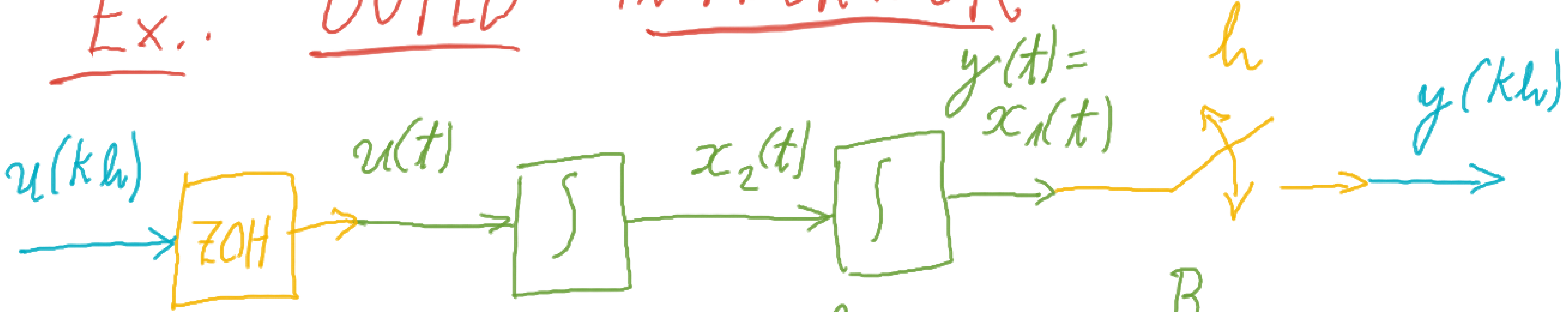
ENTÃO:

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1}\left\{ (sI-A)^{-1} \right\}\Big|_{t=h}$$

$$\Gamma = \mathcal{L}^{-1}\left\{ (sI-A)^{-1} \frac{B}{s} \right\}\Big|_{t=h}$$

Ex.: DUPLO INTEGRADOR

AW (1997), Ex. A.1



$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

MODELO EM TEMPO DISCRETO:

$$x(kh+h) = \Phi x(kh) + \Gamma u(kh), \quad x(0) = x_0,$$

$$y(kh) = C x(kh)$$

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1}\left\{ (sI-A)^{-1} \right\}\Big|_{t=h}$$

$$\Gamma = \mathcal{L}^{-1}\left\{ (sI-A)^{-1} \frac{B}{s} \right\}\Big|_{t=h}$$

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\mathrm{cofat}^T(sI-A)}{\det(sI-A)} = \frac{\begin{bmatrix} s & -0 \\ -(-1) & s \end{bmatrix}^T}{s^2 - 1\cdot 0} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}\Big|_{t=h} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Big|_{t=h}$$

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}\Big|_{t=h} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{(sI-A)^{-1}\,\frac{B}{s}}_{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}}\right\}\Bigg|_{t=h} = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}\Bigg|_{t=h} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix}$$

USO DA EXPONENCIAL MATRICIAL PARA COMPUTAR Φ & Γ

Ref.: Åström & Wittenmark (1997), p. 34, eq. (2.6)

$$\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} = \underbrace{\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h \right)}_{*}$$

$$X := \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \qquad \dot{X} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X \Rightarrow X(\underset{\substack{\uparrow \\ h}}{t}) = * \; X(0)$$

O INVERSO DA AMOSTRAGEM

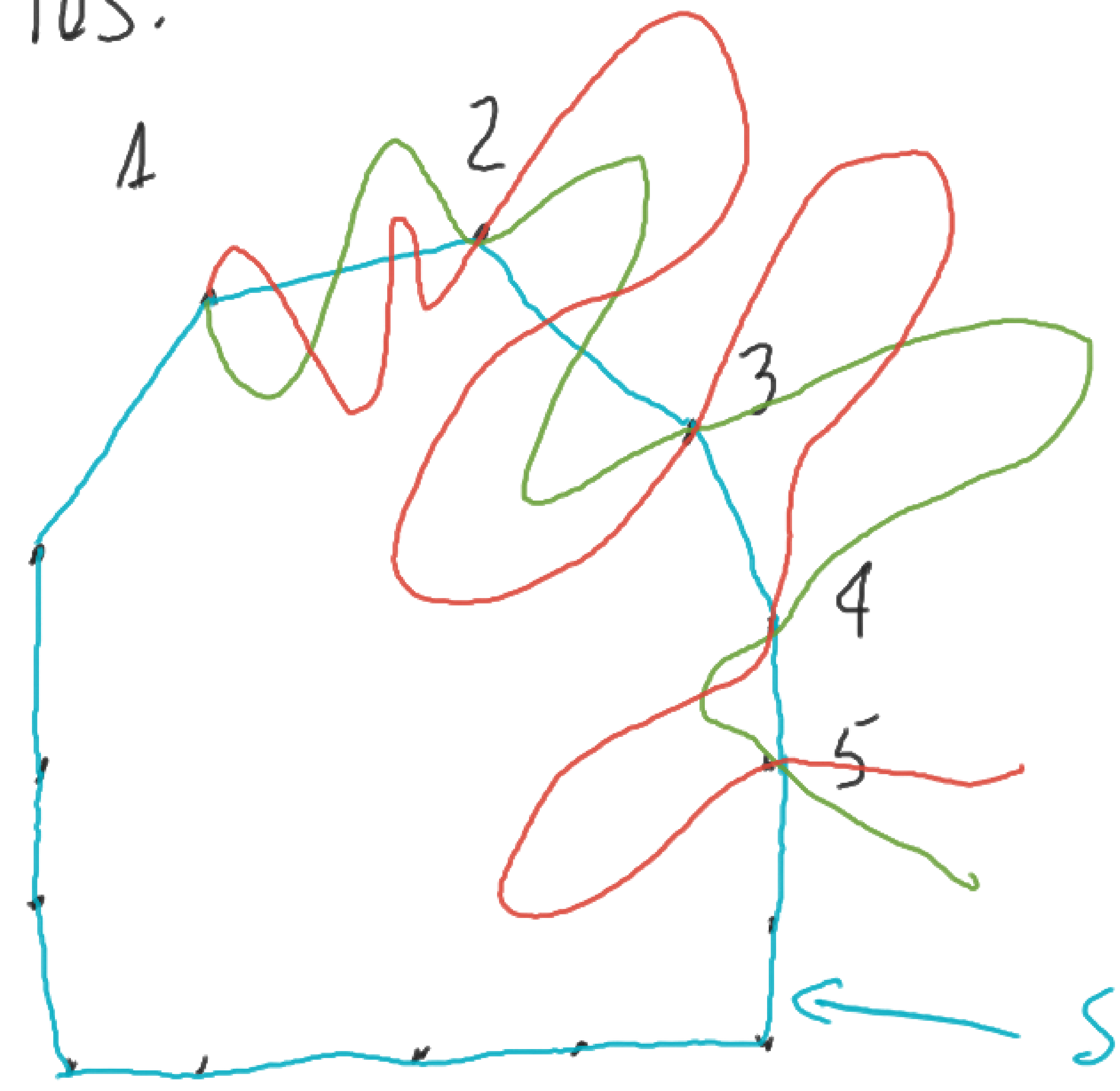
REF.: ÅSTRÖM & WITTENMARK (1997), PP. 36-37.

$$\Phi, \Gamma \longrightarrow A, B$$

$$\ln \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} = \ln\left(\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h\right)\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \ln \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} \longleftarrow \text{PODE TER MÚLTIPLAS SOLUÇÕES}$$

LIGUE PONTOS:



VIDE

Ex. 2.5, p. 37

SOLUÇÃO MAIS SIMPLES!

EFEITOS DO "ALIASING"!