

Rio de Janeiro, 3 de outubro de 2005.

2^a Lista de Exercícios de Controle e Servomecanismos II

Tópicos: Equações a Diferenças, Transformada z e Funções de Transferência.

Professor: José Paulo V. S. da Cunha

UERJ — Faculdade de Engenharia

Departamento de Eletrônica e Telecomunicações — DETEL

1 Equações a Diferenças

Para o estudo de equações a diferenças recomenda-se a seção 2.5 do livro [1] e as seções 2.1 e 2.2 do livro [2].

Exercícios recomendados: exercícios 2.1, 2.2.a, 2.4 e 2.5 do livro [2].

2 Transformada z

Inicialmente deve-se estudar a transformada de Fourier de sinais discretos nas seções 2.6 e 2.7 do livro [1]. Então passa-se à transformada z e suas propriedades que são bem apresentadas nas seções 3.0, 3.1, 3.3, 3.4 e 3.5 [1].

Exercícios recomendados: todos os exercícios do Capítulo 3 do livro [1] e os exercícios 2.6, 2.13, 2.20, 2.21, 2.22 e 2.23 do livro [2].

3 Funções de Transferência de Sistemas em Tempo Discreto

Para o estudo de funções de transferência de sistemas em tempo discreto recomenda-se as seções 2.3 a 2.3.4 do livro [2].

Exercícios recomendados: os exercícios 2.2.b, 2.3, 2.15 e 2.16 do livro [2].

4 Outros Exercícios

1. Considere a equação a diferenças [3, Exercício 2.6]

$$y[n] = \alpha y[n - 1], \quad y[-1] = 1. \quad (1)$$

Calcule os primeiros cinco passos da seqüência $y[n]$ ($y[0], y[1], \dots, y[4]$) para cada um dos seguintes valores do parâmetro α :

- (a) $\alpha = 0,8$;
- (b) $\alpha = 1,2$;
- (c) $\alpha = -0,8$;
- (d) $\alpha = 1$;
- (e) $\alpha = 0$.

2. O que se pode concluir sobre a relação entre a estabilidade da equação a diferenças (1) e o valor do parâmetro α [3, Exercício 2.6]?
3. Considere a equação a diferenças

$$y[n] = \alpha y[n - 1] + (1 - \alpha) x[n - 1]. \quad (2)$$

com seqüência de entrada $x[n]$. Calcule os primeiros cinco passos da resposta impulsiva ($y[0], y[2], \dots, y[4]$, isto é, $h[0], h[2], \dots, h[4]$) para $\alpha = 0,8$.

4. Encontre uma solução fechada, isto é, não recursiva e geral, para a equação a diferenças (1).
5. A partir dos resultados dos exercícios 1 a 4, relacione as equações a diferenças (1) e (2) com algum sistema físico com sinais amostrados periodicamente, considerando $0 < \alpha < 1$.
6. A partir dos primeiros cinco passos da resposta impulsiva calculados no item 3, escreva a equação a diferenças de um filtro FIR que aproxime o filtro IIR (2) para $\alpha = 0,8$.
7. Calcule os primeiros cinco passos da resposta ao degrau do filtro IIR (2).
8. Calcule os primeiros cinco passos da resposta ao degrau do filtro FIR (2) obtido no item 6.
9. Compare a resposta ao degrau do filtro IIR (item 7) com a resposta ao degrau do filtro FIR (item 8).
10. Uma operação numérica usual denominada *primeira diferença* é definida como:

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n - 1], \quad (3)$$

onde $x[n]$ é a entrada e $y[n]$ é a saída do sistema primeira diferença.

- (a) Mostre que o sistema (3) é linear e invariante no tempo.

(b) Calcule a resposta impulsiva do sistema (3).

(c) Mostre que se

$$x[n] = f[n] * g[n], \tag{4}$$

então

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n]) * g[n] = f[n] * \nabla(g[n]), \tag{5}$$

onde “*” simboliza a convolução discreta.

(d) Encontre a resposta impulsiva de um sistema que possa ser conectado em cascata com o sistema (3) para recuperar a sua entrada, isto é, encontre $h_i[n]$ de forma que

$$x[n] = h_i[n] * \nabla(x[n]). \tag{6}$$

11. Calcule a transformada z unilateral de cada uma das seguintes seqüências:

(a) $x[n] = 3e^{-5n}\text{sen}(0,1n)$;

(b) $x[n] = 3e^{-5n}\text{sen}(0,1n + 2)$;

(c) $x[n] = 5e^{2n} - 3e^{-3n}$;

(d) $x[n] = (5e^{2n-10} - 3e^{-3n+15}) \mathbf{1}[n - 5]$;

(e) $x[n] = \begin{cases} 2n, & \text{se } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{se } n \geq N \end{cases}, \quad N \geq 1.$

12. Use a expansão em frações parciais para calcular a transformada z inversa de cada uma das seguintes funções do domínio z [3, Exercício 2.10]:

(a) $X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0,125)}$;

(b) $X(z) = \frac{z-2}{z(z-0,4)(z+0,25)}$;

(c) $X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0,5)^2}$;

(d) $X(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}$;

(e) $X(z) = \frac{5(z+0,5)}{(z-0,8)(z+0,6)}$;

(f) $X(z) = \frac{1}{1+z^{-2}}$;

(g) $X(z) = \frac{z(z-1)}{z^2-1,25z+0,25}$.

13. Calcule o valor final da seqüência no tempo discreto associada com a seguinte transformada z [3, Exercício 2.15]:

$$X(z) = \frac{z^{-1} - 3}{(1 - z^{-1})(0,48z^{-2} - 1,4z^{-1} + 1)}. \tag{7}$$

Observação: Não se esqueça de verificar se todos os pólos estão dentro do círculo unitário exceto um em $z=1$.

14. A dinâmica de um sistema em tempo discreto é representada pela equação a diferenças

$$y[n] - 5y[n - 1] + 6y[n - 2] = 2x[n - 1]. \quad (8)$$

Faça os itens a seguir utilizando a transformada z :

- (a) Calcule a resposta homogênea da equação a diferenças (8) (i.e., $x[n]=0, \forall n$) para $n \geq 0$ e condições iniciais arbitrárias $y_1=y[-1]$ e $y_2=y[-2]$.
- (b) Calcule a função de transferência $H(z)=y(z)/x(z)$.
- (c) Calcule a resposta impulsiva do sistema (8).

15. Seja a equação a diferenças:

$$y[n] + a_1 y[n - 1] + 0,5 y[n - 2] = x[n], \quad (9)$$

onde $a_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante e as condições iniciais são $y[-1]=1$ e $y[-2]=1$. Faça os seguintes itens:

- (a) A equação a diferenças (9) é invariante no tempo? (Justifique!)
- (b) A equação a diferenças (9) é linear? (Justifique!)
- (c) Quais são as faixas de valores admissíveis para o parâmetro a_1 para que a equação a diferenças (9) seja BIBO estável?
- (d) Calcule uma seqüência de entrada $x[n]$ para que a solução da equação a diferenças (9) seja anulada a partir do primeiro passo ($y[n]=0, \forall n \geq 0$).
- (e) Use a transformada z unilateral para calcular a resposta ao degrau unitário ($x[n]=1, \forall n \geq 0$) da equação a diferenças (9) para $a_1=0,5$.
- (f) Calcule a função de transferência $H(z)=y(z)/x(z)$.

16. Um sistema de primeira ordem tem função de transferência

$$G(z) := \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{0,2z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1}}. \quad (10)$$

Calcule a resposta desse sistema em regime permanente a uma senóide $x[n]=2 \text{sen}(nh)$ amostrada com periodicidade $h=0,5 \text{ s}$ [3, Exercício 2.17].

Referências

- [1] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 2nd ed., 1999.
- [2] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 2nd ed., 1990.
- [3] R. G. Jacquot, *Modern Digital Control Systems*. Marcel Dekker, Inc., 1981.