Rio de Janeiro, 24 de março de 2006.

1^a Lista de Exercícios de Controle e Servomecanismos II

Tópicos: autovalores, estabilidade, controlabilidade, observabilidade, realimentação de estado e observadores para sistemas em tempo contínuo.

Professor: José Paulo V. S. da Cunha

UERJ — Faculdade de Engenharia

Departamento de Eletrônica e Telecomunicações — DETEL

1 Controlabilidade, observabilidade e estabilidade de sistemas em tempo contínuo

Para o estudo introdutório desses conceitos referentes a sistemas em tempo contínuo recomenda-se a leitura parcial das seções 11.1, 11.2, 11.6 e 11.7 do livro [1] ou das seções 11.1, 11.2, 11.4, 11.6 e 11.7 do livro [2].

Exercícios recomendados: B.11.1, B.11.2, B.11.4, B.11.10 a B.11.17 do livro [1] ou B.11.1, B.11.2, B.11.4, B.11.10 a B.11.17 do livro [2].

2 Realimentação de estado

A realimentação de estado de sistemas em tempo contínuo é apresentada nas seções 12.1 a 12.4 do livro [1] ou [2].

Exercícios recomendados: B.12.3 a B.12.7 e B.12.15 do livro [1] ou B.12.3 a B.12.9 do livro [2].

3 Observadores de estado

Para o estudo de observadores de estado de sistemas em tempo contínuo recomenda-se parte das seções 12.5 e 12.6 do livro [1] ou parte da seção 12.5 do livro [2].

Exercícios recomendados: B.12.8, B.12.10 e B.12.11 do livro [1] ou B.12.10 a B.12.14 do livro [2].

4 Outros Exercícios

1. Considere o sistema definido por:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & (1+\alpha) \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} u\,, \tag{1}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & \beta \end{pmatrix} x\,. \tag{2}$$

   (a) Calcule os autovalores do sistema (1)–(2).

   (b) Determine todos os valores dos parâmetros α e β para que o sistema (1)–(2) seja **controlável**.

   (c) Determine todos os valores dos parâmetros α e β para que o sistema (1)–(2) seja **observável**.

   (d) Calcule a função de transferência do sistema (1)–(2), i.e., $G(s)=y(s)/u(s)$.

   (e) Calcule os pólos e zeros da função de transferência $G(s)$.

   (f) Os pólos de $G(s)$ coincidem com os autovalores do sistema (1)–(2)?

   (g) Determine todos os valores dos parâmetros α e β para que o sistema (1)–(2) seja **estável**.

   (h) Para $\alpha=\beta=0$, projete uma realimentação de estado ($u=-Kx$) que posicione os autovalores do sistema (1)–(2) em malha fechada em $\mu_1=-1\,rad/s$ e $\mu_2=-5\,rad/s$.

2. Considere o circuito elétrico RC na Figura 1, onde v_{in} é a tensão aplicada em sua entrada e a tensão v_o é o sinal de saída.

   (a) Desenvolva as equações diferenciais da dinâmica do circuito elétrico e as reescreva na forma de equações de estado matriciais.

   (b) Quais são os valores de R1, R2, C1 e C2 que mantêm o circuito na Figura 1 estável?

   (c) Quais são os valores de R1, R2, C1 e C2 que mantêm o circuito na Figura 1 controlável?

   (d) Quais são os valores de R1, R2, C1 e C2 que mantêm o circuito na Figura 1 observável?

   (e) Calcule a função de transferência do circuito na Figura 1 dada pela relação $G_{RC}(s) = v_o(s)/v_{in}(s)$.

   (f) O que ocorre com a função de transferência $G_{RC}(s)$ calculada no item 2e quando o circuito é não controlável ou não observável?

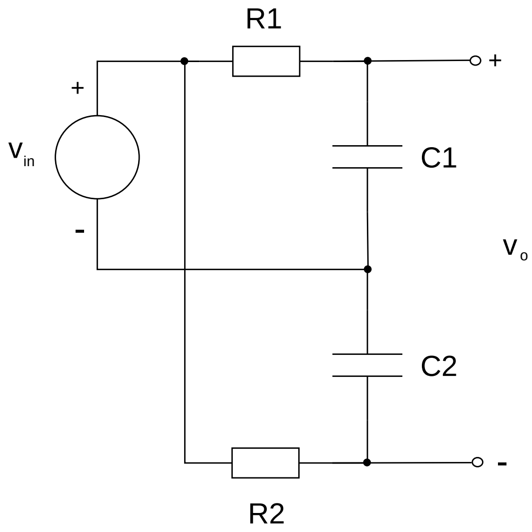

Figura 1: Circuito elétrico RC.

3. Um sistema é representado pelas seguintes equações de estado:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u\,, \tag{3}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x\,. \tag{4}$$

   (a) O sistema (3)–(4) é estável?
   (b) Calcule os autovalores do sistema (3)–(4).
   (c) O sistema (3)–(4) é controlável?
   (d) O sistema (3)–(4) é observável?
   (e) Calcule a matriz K da realimentação de estado $u = -Kx$ para que todos os novos autovalores do sistema (3) em malha fechada sejam iguais a $-1\,rad/s$.
   (f) Projete um observador para estimar o estado do sistema (3)–(4) com autovalores em $-4\,rad/s$ e $-5 \pm 3j\,rad/s$.

4. Um sistema é representado pela equação de estado:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u\,, \tag{5}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} x\,. \tag{6}$$

   (a) Calcule os autovalores do sistema (5)–(6).

(b) O sistema (5)–(6) é estável?

(c) O sistema (5)–(6) é controlável?

(d) O sistema (5)–(6) é observável?

(e) Desenhe um diagrama de blocos para representar a dinâmica do sistema (5)–(6).

(f) Calcule a matriz K da realimentação de estado $u = -Kx$ para que os autovalores do sistema (5)–(6) em malha fechadas sejam ambos iguais a $-2\,rad/s$.

(g) É possível projetar um observador estável para estimar o estado do sistema (5)–(6)? Justifique a sua resposta. Se for possível, projete um observador estável.

5. Nesta questão considere o sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u\,, \tag{7}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x\,. \tag{8}$$

(a) Projete uma realimentação de estado ($u = -Kx$) que posicione os autovalores do sistema (7) em $s_1 = -5\,rad/s$ e $s_{2,3} = -2 \pm 2j\,rad/s$.

(b) Acrescente ao sistema em malha fechada ((7)–(8) incluindo a realimentação de estado projetada no item 5a) uma entrada de referência y_{ref} conectada adequadamente para que o ganho DC seja $y(s)/y_{ref}(s) = 5$ (para $s = 0\,rad/s$).

6. Um sistema é representado pela seguinte equação de estado:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u\,, \tag{9}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x\,. \tag{10}$$

(a) O sistema (9)–(10) é estável?

(b) Calcule os autovalores do sistema (9)–(10).

(c) O sistema (9)–(10) é controlável?

(d) O sistema (9)–(10) é observável?

(e) Desenhe um diagrama de blocos para representar a dinâmica do sistema (9)–(10).

(f) Calcule a função de transferência do sistema (9)–(10), i.e., $G(s) = y(s)/u(s)$.

(g) Calcule os pólos e zeros da função de transferência $G(s)$.

(h) Os pólos de $G(s)$ coincidem com os autovalores do sistema (9)–(10)? Qual é a justificativa?

(i) Calcule a matriz K da realimentação de estado $u = -Kx$ para que todos os novos autovalores do sistema (9) em malha fechada sejam iguais a $-2\,rad/s$.

7. A dinâmica normalizada de um motor elétrico DC é representada pelo diagrama de blocos na Figura 2. O campo do motor é formado por ímãs permanentes.

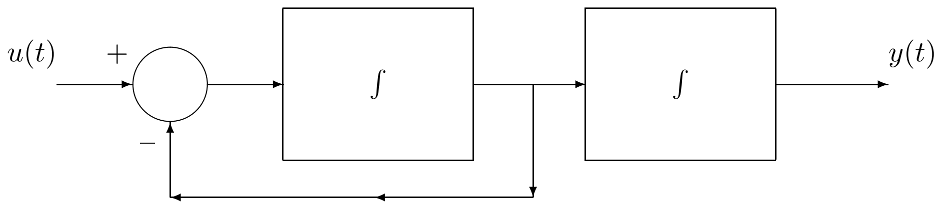

Figura 2: Diagrama de blocos da dinâmica normalizada de um motor elétrico DC, onde: y é a posição angular do eixo do motor e u é a tensão de controle fornecida à armadura.

(a) Desenvolva as equações diferenciais da dinâmica do motor e as reescreva na forma de equações de estado matriciais.

(b) Calcule a função de transferência do motor em malha aberta $G_m(s) = y(s)/u(s)$.

(c) Calcule os autovalores da dinâmica do motor em malha aberta.

(d) Projete uma realimentação de estado ($u = -Kx$) que posicione os autovalores do motor em $s_1 = -2$ e $s_2 = -5$.

(e) Acrescente ao motor realimentado (incluindo a realimentação de estado projetada no item 7d) uma entrada de referência y_{ref} da seguinte forma:

$$u = L_c y_{ref} - Kx\,. \tag{11}$$

Calcule o valor do ganho L_c para que o ganho DC seja $y(s)/y_{ref}(s) = 1$ (para $s = 0$).

(f) Projete um observador para estimar o estado do motor com autovalores em $-10\,rad/s$.

(g) Desenhe o diagrama de blocos do sistema de controle completo, incluindo o motor e a realimentação do estado estimado pelo observador.

Referências

[1] K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*. Livros Técnicos e Científicos S.A., 3ª ed., 1998.

[2] K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Brasil, 4ª ed., 2003.