

Disciplina: Controle e Servomecanismos I



Aula: Erros em Regime Permanente

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Turmas 01 e 02 – 2025/1

Rio de Janeiro, 09 de maio de 2025.

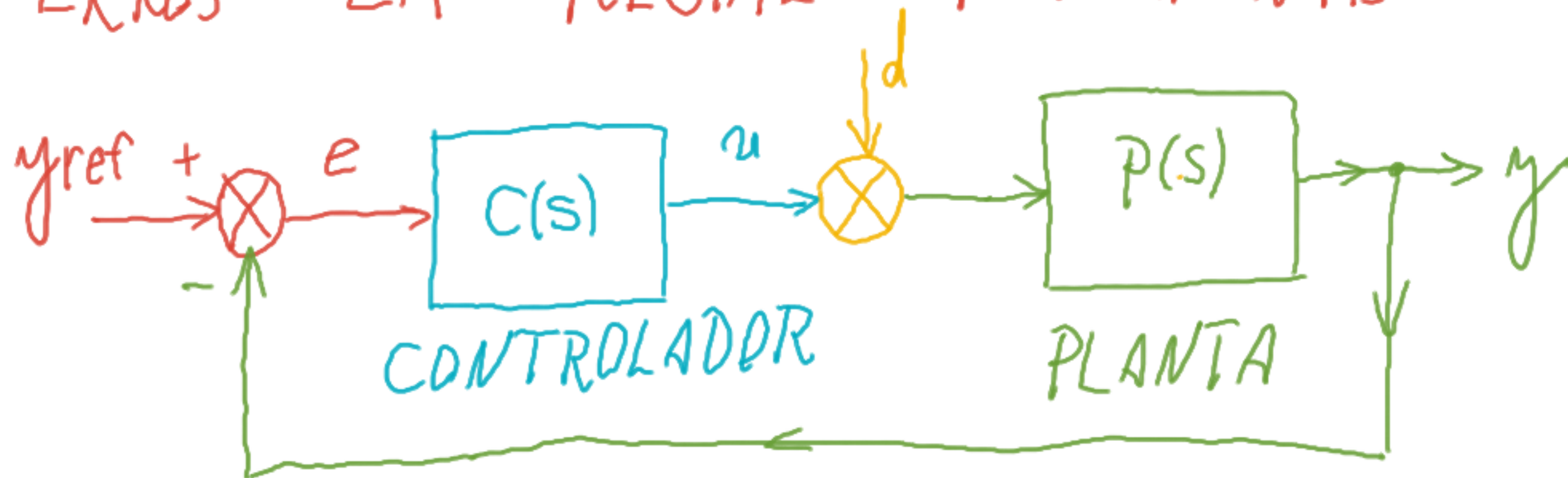


Referências

- Castrucci, P. B. L., Bittar, A. & Sales, R. M. (2018). Controle Automático, 2ª edição, LTC. (*)
- Castrucci, P. B. L., Bittar, A. & Sales, R. M. (2011). Controle Automático, LTC.

(*) Organizado para a 2ª edição, Seção 3.11.

ERROS EM REGIME PERMANENTE



$$y = G_p(s) y_{ref} + G_d(s) d$$

$$\begin{aligned} e &= y_{ref} - y = y_{ref} - G_p(s) y_{ref} - G_d(s) d = \\ &= [1 - G_p(s)] y_{ref} - G_d(s) d \end{aligned}$$

$$e(\infty) = e_{ss} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t)$$

"SS" - "STEADY STATE" or
REGIME PERMANENTE

TEOREMA DO VALOR FINAL:

• APLICÁVEL SE O SISTEMA FOR ESTÁVEL.

$$e_{ss} := \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)$$

NO QUAL $e(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}.$

NOTA SOBRE LIMITES:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \rightarrow \nexists$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0- \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ASSIM:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \left[1 - G_f(s) \right] y_{ref}(s) - s G_d(s) d(s) \right\}$$

MAS:

$$G_f(s) = \frac{P(s) C(s)}{1 + P(s) C(s)}$$

$$G_d(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s) C(s)}$$

$$\begin{aligned} & s \left[1 - \frac{P(s) C(s)}{1 + P(s) C(s)} \right] = \\ &= s \left[\frac{1 + P(s) C(s) - P(s) C(s)}{1 + P(s) C(s)} \right] = \\ &= s \left[\frac{1}{1 + P(s) C(s)} \right] \end{aligned}$$

CASOS:

① $y_{ref}(t) = 1(t) \rightarrow y_{ref}(s) = \frac{1}{s} \leftarrow \text{DEGRAU NA REFERÊNCIA}$

• SEM INTEGRADORES:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \right] \frac{1}{s} = \frac{1 + \cancel{P(0)C(0)} - \cancel{P(0)C(0)}}{1 + P(0)C(0)}$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1 + P(0)C(0)} //$$

- SE A PLANTA E/OU CONTROLADOR POSSUIR PELO MENOS UM INTEGRADOR, ENTÃO: $P(s) = \frac{1}{s} \bar{P}(s)$ OU $C(s) = \frac{1}{s} \bar{C}(s)$ LOGO $P(0) = \infty$ OU $C(0) = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0 //$

② $d(t) = 1(t) \Rightarrow d(s) = \frac{1}{s} \leftarrow \text{DEGRAU NA PERTURBAÇÃO}$

• SEM INTEGRADORES:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} - \cancel{s} \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \frac{1}{\cancel{s}} = - \frac{P(0)}{1 + P(0)C(0)} //$$

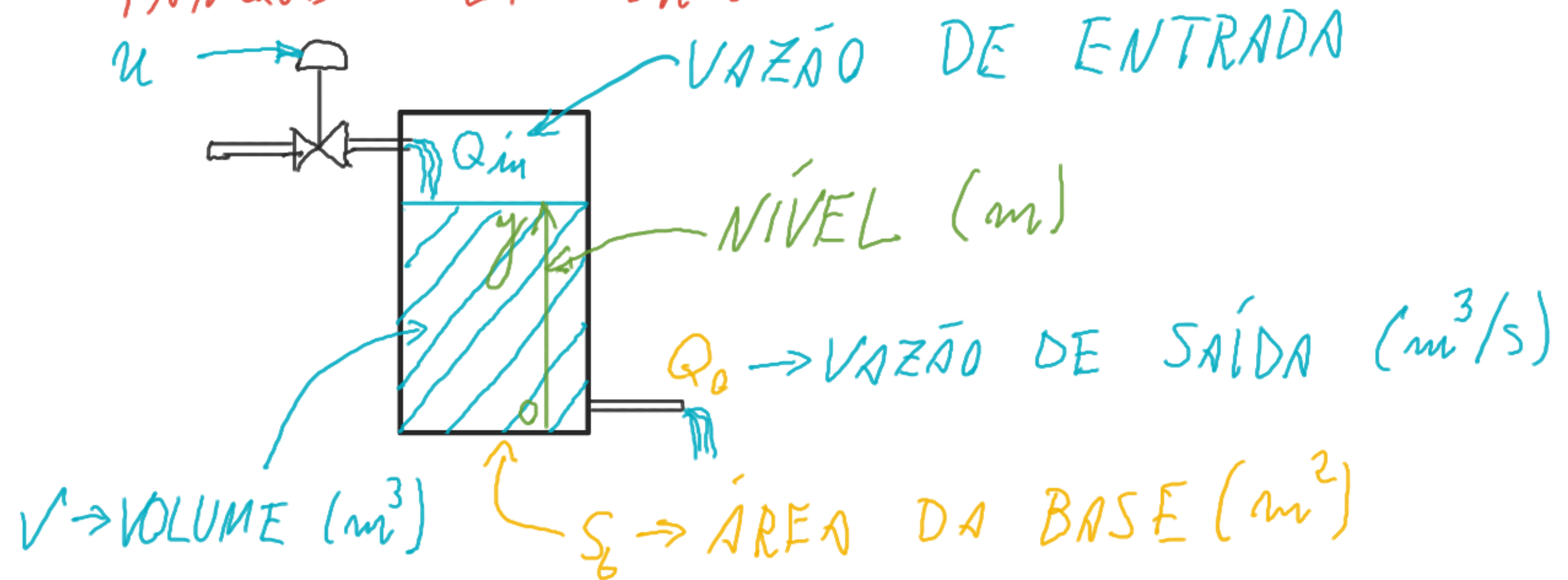
• SE A PLANTA POSSUIR INTEGRADOR ($P(s) = \frac{1}{s} \bar{P}(s)$), ENTÃO

$$e_{ss} = - \frac{1}{\bar{C}(0)} //$$

• SE O CONTROLADOR POSSUIR INTEGRADOR ($C(s) = \frac{1}{s} \bar{C}(s)$), ENTÃO

$$e_{ss} = 0 //$$

Ex. 1: CONTROLE DE NÍVEL NUM TANQUE CILÍNDRICO*



*REF.: EXERCÍCIO 2.2, CASTRUCCI et alii (2018, 2011).

$$V = S_b y$$

INTEGRADOR



$$\dot{V} = Q_{in} - Q_o \Rightarrow \int \dot{V} dt = \int (Q_{in} - Q_o) dt \Rightarrow V = \int (Q_{in} - Q_o) dt$$

SINAL DE CONTROLE: $U = Q_{in}$ (ENTRADA INCLUI CONTROLE DE VAZÃO)

SINAL DE SAÍDA: y

PERTURBAÇÃO: $d = -Q_o$

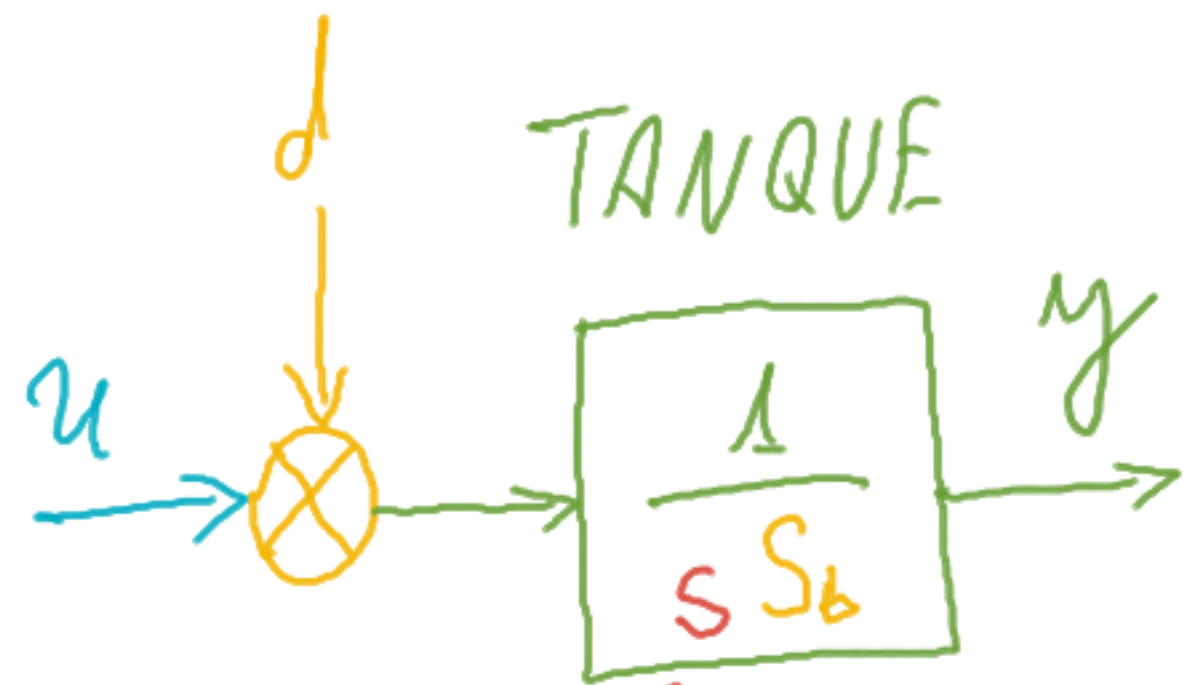
ENTÃO: $y = \frac{1}{S_b} V \Rightarrow \dot{y} = \frac{1}{S_b} \dot{V} = \frac{1}{S_b} (Q_{in} - Q_o) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{1}{S_b} (u + d)$$

↓ $\mathcal{L}$

$$s y(s) - \underset{\downarrow 0}{y(0)} = \frac{1}{S_b} (u(s) + d(s)) \Rightarrow$$

$$y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{S_b} (u(s) + d(s))$$



UM INTEGRADOR: UM POLO NA ORIGEM

① CONTROLADOR PROPORCIONAL (P)

$$C(s) = K_p \rightarrow \text{GANHO PROPORCIONAL}$$

PLANTA TEM INTEGRADOR (TANQUE):

- y_{ref} tipo degrau $\Rightarrow e_{ss} = 0 \text{ m}$

- d tipo degrau, ^{por} exemplo unitário, então:

$$e_{ss} = -\frac{1}{C(0)} = -\frac{1}{K_p} \rightarrow \text{ERRO NÃO NULO!}$$

ii) CONTROLE PI (PROPORCIONAL + INTEGRAL)

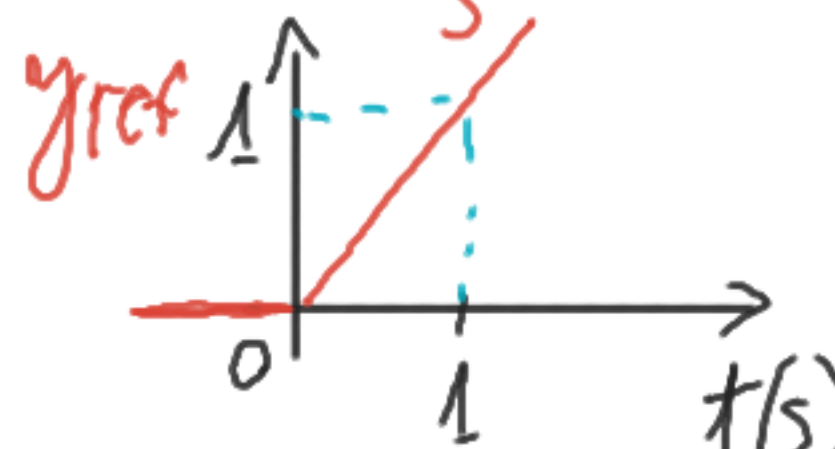
$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \leftarrow \text{POLO NA ORIGEM (INTEGRADOR)}$$

$e_{ss} = 0$ para entrada de referência

ou perturbação tipo degrau $\rightarrow$ mais adequado num reator químico.

③ $y_{ref}(t) = t \cdot 1(t)$ (RAMPA UNITÁRIA) $\Rightarrow y_{ref}(s) = \frac{1}{s^2}$

$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \cdot \frac{1}{s^2}$



- SE NÃO HOUVER INTEGRADORES: $e_{ss} = \infty //$
- SE HOUVER UM INTEGRADOR, ENTÃO $P(s)C(s) = \frac{1}{s} \bar{P}(s) \bar{C}(s)$,
 LOGO: $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \bar{P}(s) \bar{C}(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \bar{P}(s) \bar{C}(s)} = \frac{1}{\bar{P}(0) \bar{C}(0)} //$
- SE HOUVER DOIS INTEGRADORES, ENTÃO $P(s)C(s) = \frac{1}{s^2} \bar{P}(s) \bar{C}(s)$,
 LOGO $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \frac{1}{s} \bar{P}(s) \bar{C}(s)} = 0 //$

④ $d(t) = t \cdot 1(t) \Rightarrow d(s) = \frac{1}{s^2}$ (RAMPA UNITÁRIA)

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} - \cancel{s} \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s^2}}$$

- SE O CONTROLADOR NÃO POSSUIR INTEGRADORES, ENTÃO $e_{ss} = \infty //$
- SE O CONTROLADOR POSSUIR UM INTEGRADOR, ENTÃO $C(s) = \frac{1}{s} \bar{C}(s)$

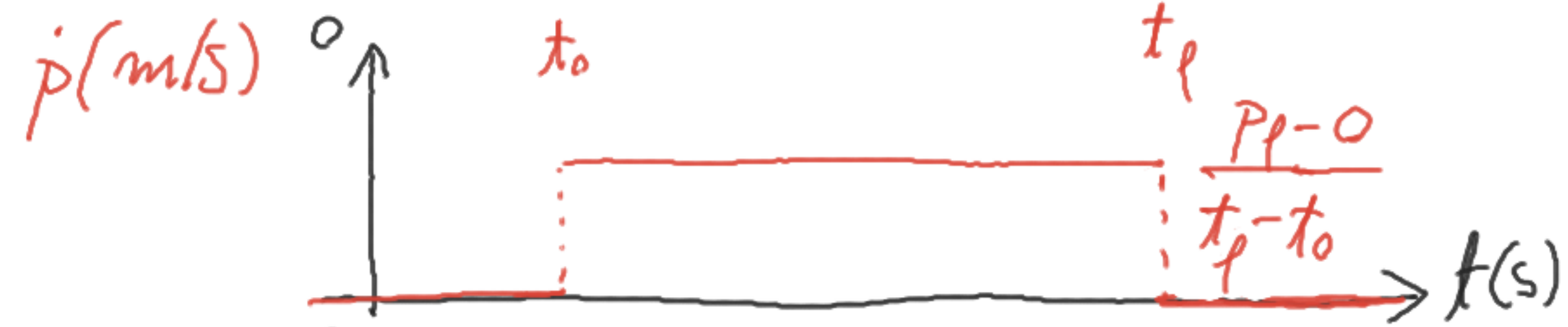
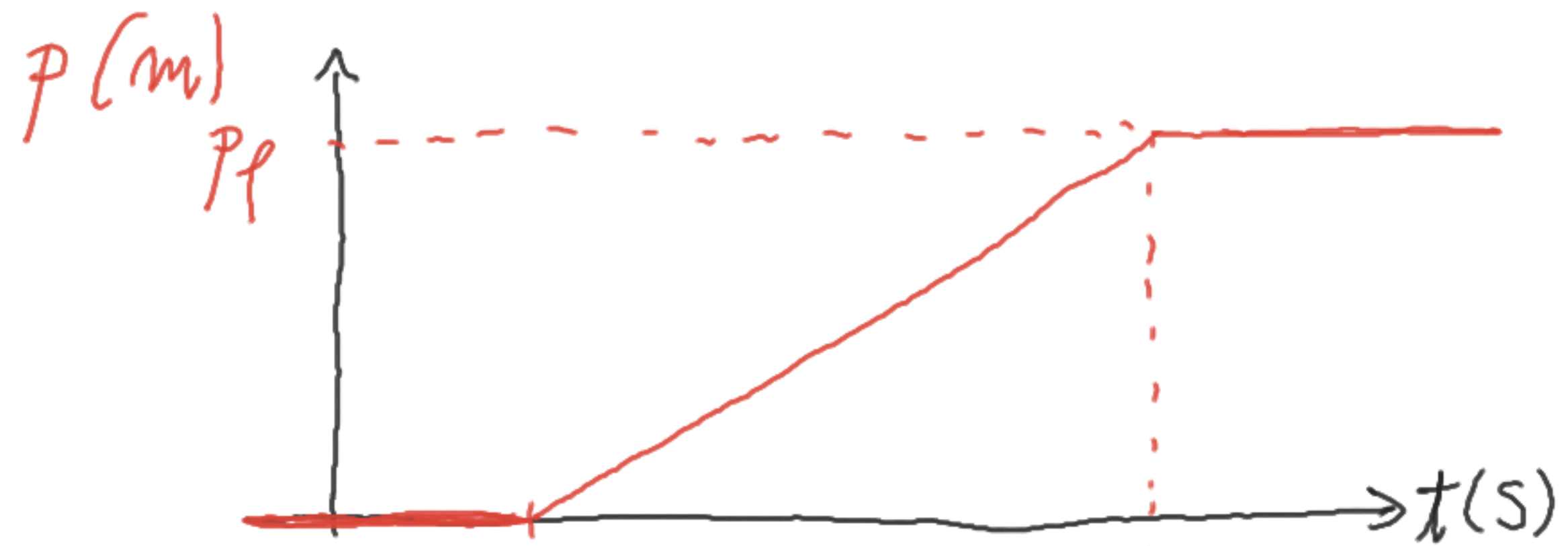
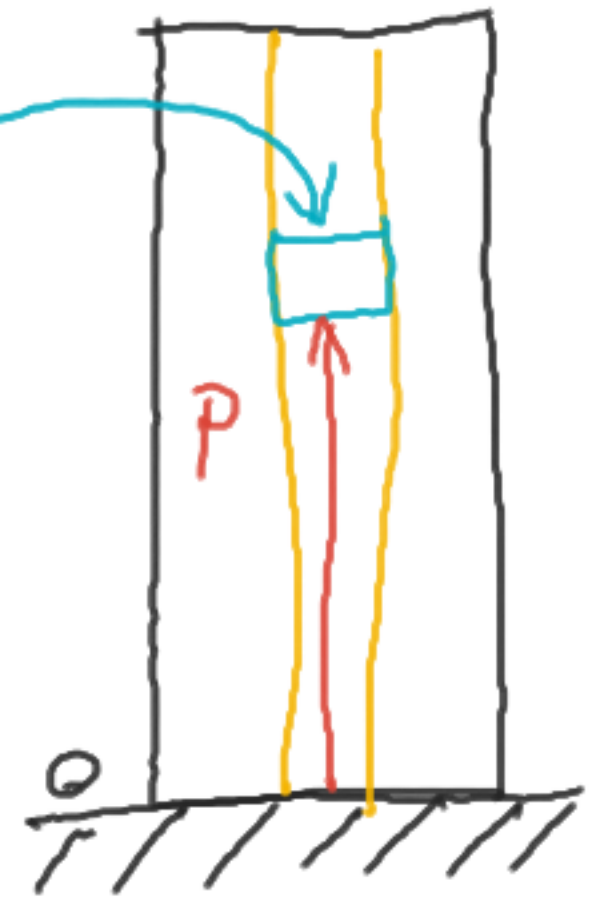
LOGO $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{P(s)}{1 + P(s) \frac{1}{s} \bar{C}(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{P(s)}{s + P(s) \bar{C}(s)} = -\frac{1}{\bar{C}(0)} //$

- SE O CONTROLADOR POSSUIR DOIS INTEGRADORES, ENTÃO $C(s) = \frac{1}{s^2} \bar{C}(s)$, LOGO $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{P(s)}{s + P(s) \frac{1}{s} \bar{C}(s)} = 0 //$

NÚMERO DE INTEGRADORES NA PLANTA/CONTROLADOR OU CONTROLADOR	y_{ref} ou d	e_{ss}
0	DEGRAU	CONSTANTE
≥ 1	DEGRAU	0
0	RAMPA	∞
1	RAMPA	CONSTANTE
≥ 2	RAMPA	0
≤ 1	PARÁBOLA	∞
2	PARÁBOLA	CONSTANTE
≥ 3	PARÁBOLA	0

EXEMPLO 2: ELEVADOR

CABINE



(IMPULSO INFINITO)

$p(m)$

TRÊS INTEGRADORES PARA $e_{ss} = 0$

PARÁBOLAS

$\dot{p}(m/s)$

t_0

t_f

$\ddot{p}(m/s^2)$

ACELERAÇÃO FINITA

LIMITAR

$\dddot{p}$ ("JERK" OU
ARRANQUE)
PARA CONFORTO

