Faculdade de Engenharia / UERJ

Disciplina: **Controle e Servomecanismos I**

Atividades: **Revisão da Resolução de Equações Diferenciais via Transformada de Laplace, Função de Transferência**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Rio de Janeiro, 29 de julho de 2020.

Referências

- Castrucci, P. B. L., Bittar, A. & Sales, R. M. (2018). Controle Automático, 2ª edição, LTC. (*)
- Castrucci, P. B. L., Bittar, A. & Sales, R. M. (2011). Controle Automático, LTC.

(*) Organizado para a 2ª edição, Seções 2.4 e 2.5.

EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES VIA TRANSFORMADA DE LAPLACE

EQ. DIF.:

$$\dot{y}(t) + a\,y(t) = b\,u(t), \qquad y(0) = y_0, \quad t \geq 0.$$

ENTRADA: $u(t) = \mathbb{1}(t)$

PROBLEMA: $y(t)$? $\rightarrow$ OU SEJA: DETERMINAR $y(t)$

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)+ay(t)\}=\mathcal{L}\{b\,\mathbb{1}(t)\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}\{\dot{y}\}+a\,\mathcal{L}\{y\}=b\,\mathcal{L}\{\mathbb{1}(t)\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow sY(s)-y(0)+aY(s)=b\frac{1}{s} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow sY(s)+aY(s)=y_0+b\frac{1}{s} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (s+a)Y(s)=y_0+b\frac{1}{s} \Longrightarrow$$

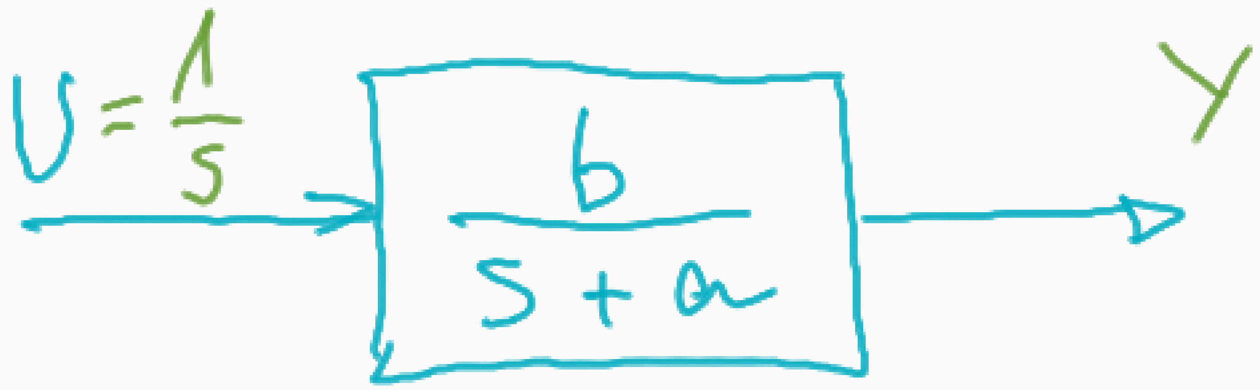
$$\Longrightarrow Y(s)=\frac{y_0}{s+a}+\frac{b}{s(s+a)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y_0}{s+a}\right\}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s(s+a)}\right\}}$$

TERMO TRANSITÓRIO
(DEPENDE DA CONDIÇÃO
INICIAL

TERMO DA RESP.
FORÇADA
(DEPENDE DA
ENTRADA)



$$y(t) = y_0 e^{-at} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{\underset{s+a}{\cancel{s}}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_2}{\underset{s}{\cancel{s+a}}}\right\}}_{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s(s+a)}\right\}}$$

$$c_1(s+a) + c_2 s = b \Longrightarrow c_1 s + c_1 a + c_2 s = b$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 & \Longrightarrow c_2 = -c_1 = -\dfrac{b}{a} \\ c_1 a \qquad\; = b & \Longrightarrow c_1 = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{as}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-b}{a(s+a)}\right\}$$

$$= y_0 e^{-at} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} e^{-at}, \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 e^{-at} + \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right), \quad t \geq 0$$

$\tau = \frac{1}{a}$ ⟵ CONSTANTE DE TEMPO

$\tau = RC \quad ; \quad \tau = L/R$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

SISTEMA SISO LTI:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t)$$

ESTADO INICIAL (INTERNO) É NULO: $x(0) = 0$
OU SISTEMA RELAXADO

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$\Sigma : a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y =$$

$$= b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^m} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

COM $n \geq m$ e CONDIÇÕES INICIAIS NULAS,

$$\mathcal{L}\{\Sigma\} : a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) =$$

$$= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \ldots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0\right) Y(s) =$$

$$= \left(b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0\right) U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$Y(s) = G(s)\,U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = g(t) \overset{\text{CONVOLUÇÃO}}{\ast} u(t)$$

$$U(s) = 1 \implies Y(s) = G(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$u(t) = \delta(t) \longrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$$

RESPOSTA IMPULSIVA!

$$\boxed{G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}}$$

$$y(t) = g(t) * u(t)$$

CONDIÇÕES INICIAIS NULAS

O que fazer com a_n?

$$G(s) = \frac{\frac{b_m}{a_n} s^m + \dots + \frac{b_1}{a_n} s + \frac{b_0}{a_n}}{\frac{a_n}{a_n} s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} s + \frac{a_0}{a_n}} =$$

$$= \frac{\bar{b}_m s^m + \dots + \bar{b}_1 s + \bar{b}_0}{s^n + \bar{a}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 s + \bar{a}_0}$$

$\bar{b}_i := \frac{b_i}{a_n}$

$\bar{a}_i := \frac{a_i}{a_n}$

$\boxed{\text{POLINÔMIO MÔNICO}}$