Faculdade de Engenharia / UERJ

Disciplina: **Controle e Servomecanismos I**

Atividade: **Revisão da Transformada de Laplace**

Professor: José Paulo Vilela Soares da Cunha

Rio de Janeiro, 23 de julho de 2020.

Referências

- Castrucci, P. B. L., Bittar, A. & Sales, R. M. (2018). Controle Automático, 2ª edição, LTC. (*)
- Castrucci, P. B. L., Bittar, A. & Sales, R. M. (2011). Controle Automático, LTC.

(*) Organizado para a 2ª edição, Seção 2.3.

REVISÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

UNILATERAL

TRANSFORMADA DE FOURIER:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

BILATERAL

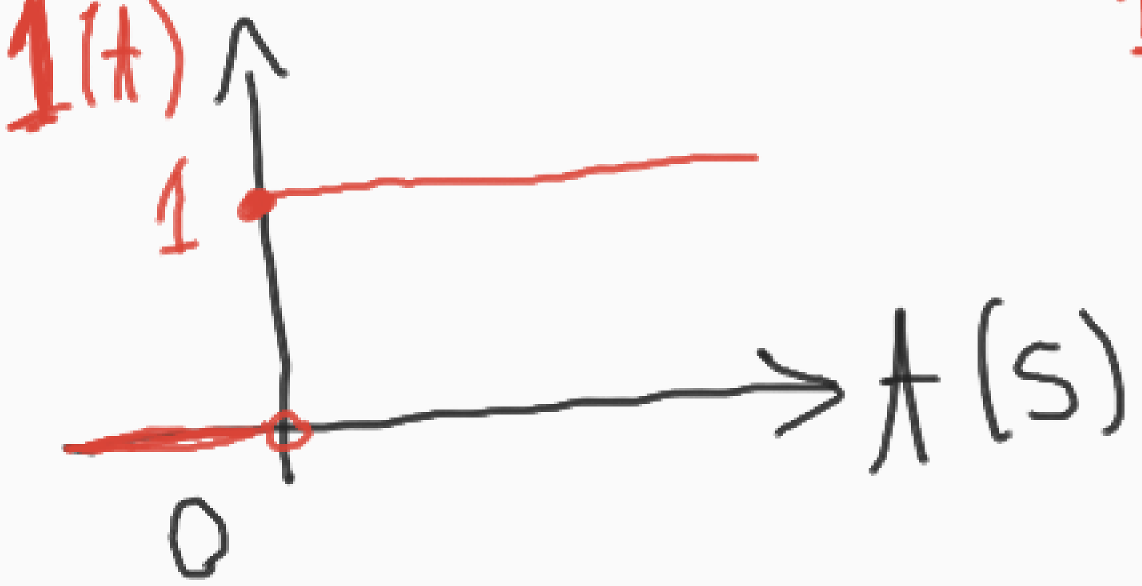
$s = \sigma + j\omega$ é a "frequência complexa"

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{-\sigma t} \underbrace{(\cos \omega t - j \,\text{sen}\, \omega t)}$$

FOURIER: $\sigma = 0 \Rightarrow e^{-\sigma t} = 1$

TRANSFORMADAS DE LAPLACE BÁSICAS PARA CONTROLE

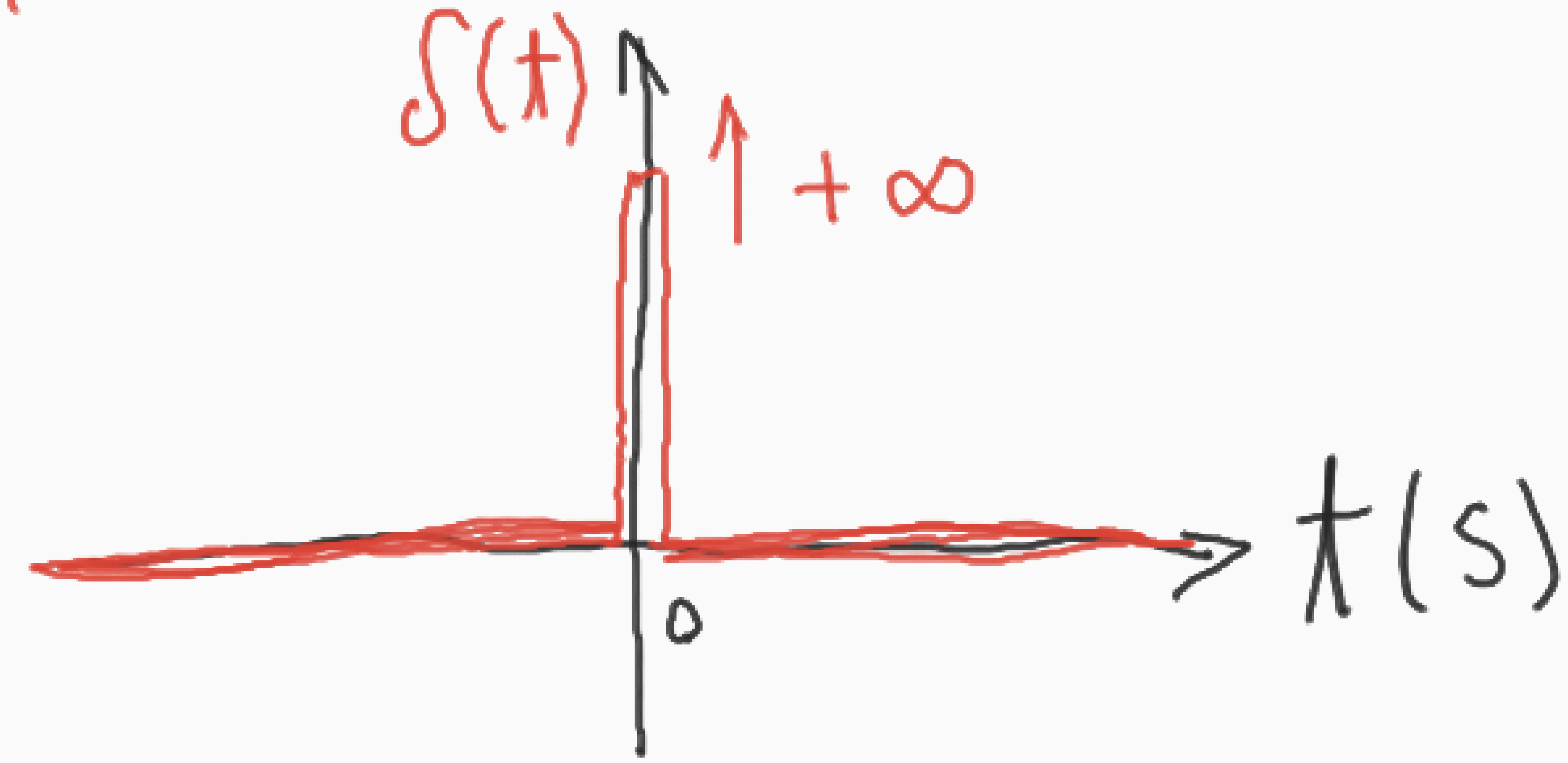
1 DEGRAU UNITÁRIO



$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\} = \frac{1}{s}$$

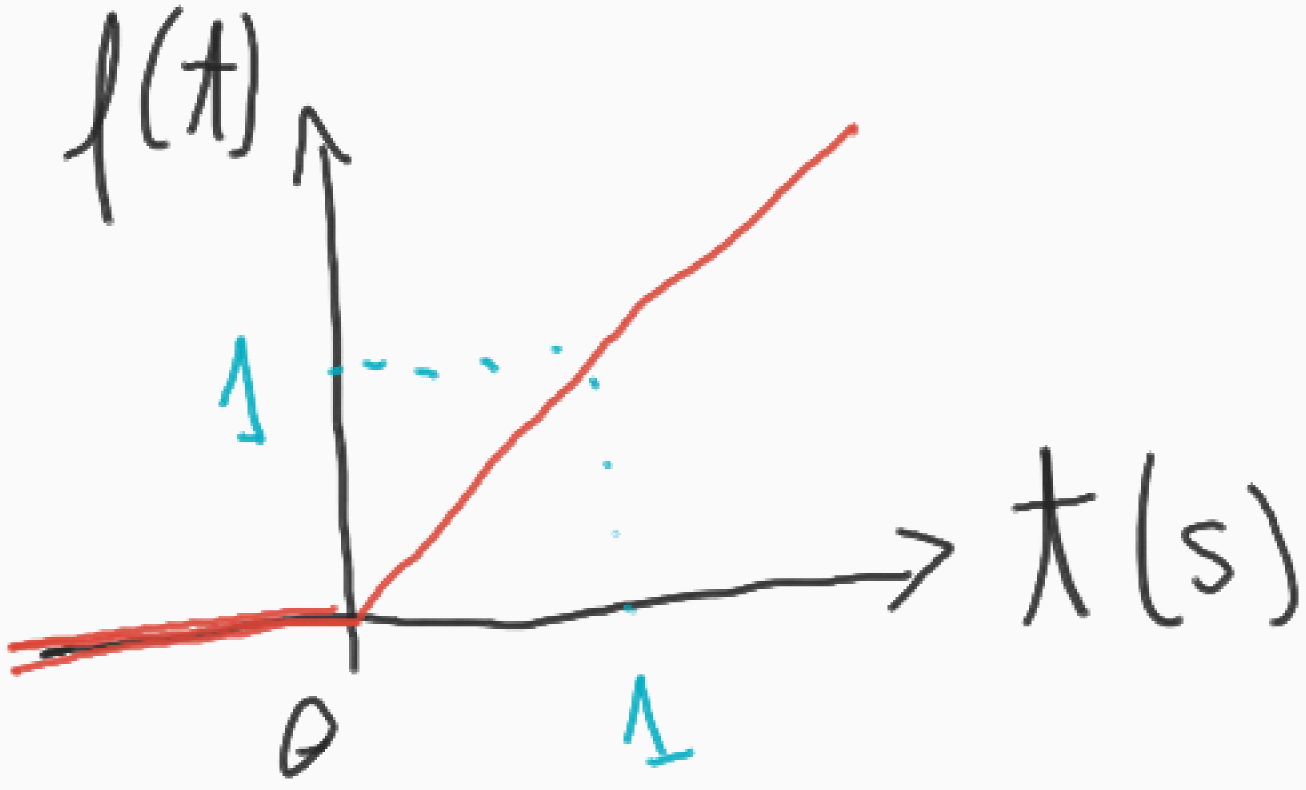
② IMPULSO UNITÁRIO



- NULO, EXCETO NUMA VIZINHANÇA DE $t = 0s$;
- NESSA VIZINHANÇA $\longrightarrow +\infty$;
- DURAÇÃO É INFINITESIMAL;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

3 RAMPA UNITÁRIA

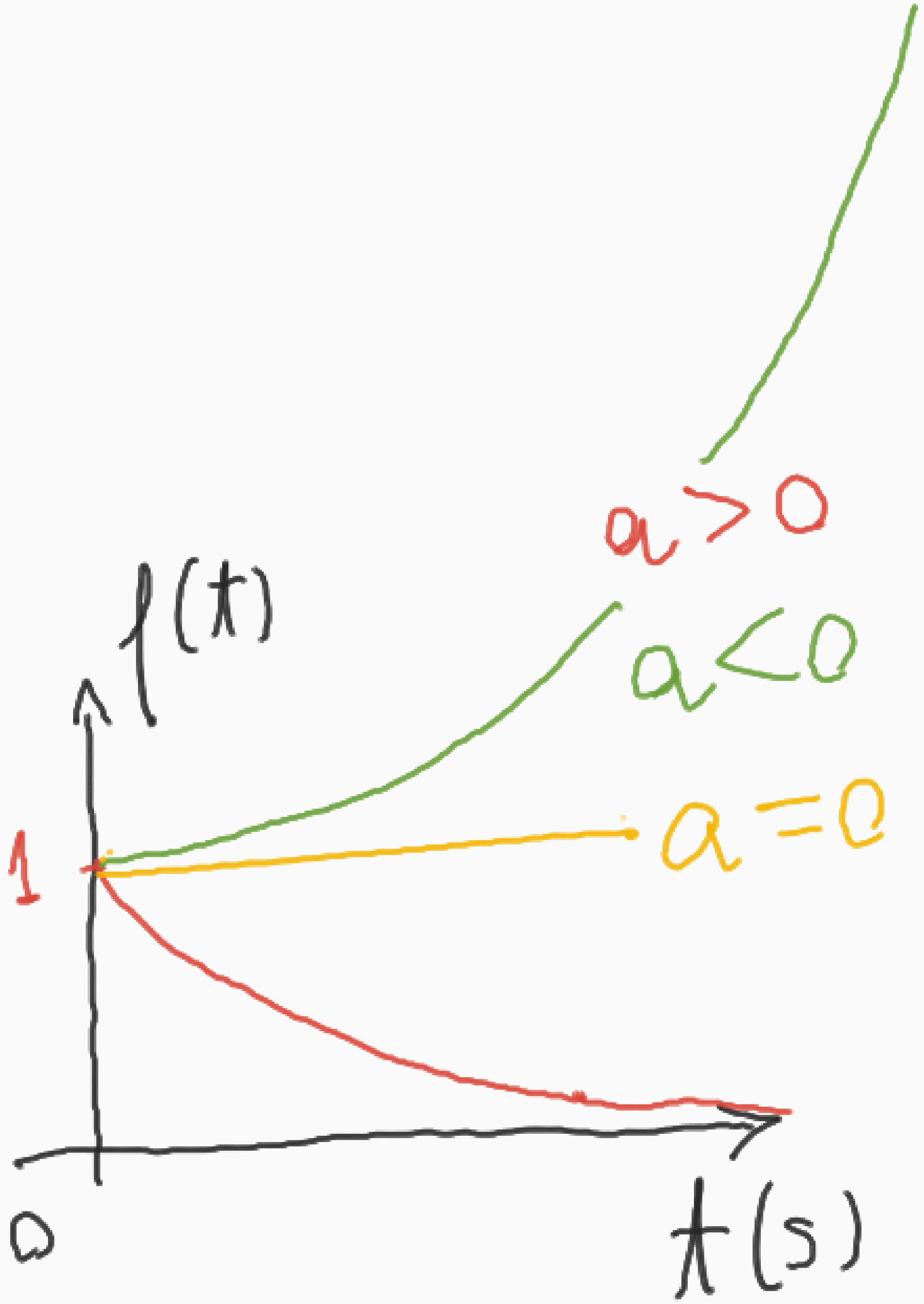


$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

4 EXPONENCIAL

$$f(t) = e^{-at} \quad , \quad t \geq 0$$



$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

POLO: $s = -a$

5 FUNÇÃO SENOIDAL

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$ ← NÃO TEM ZERO

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$ ← ZERO: $s = 0$

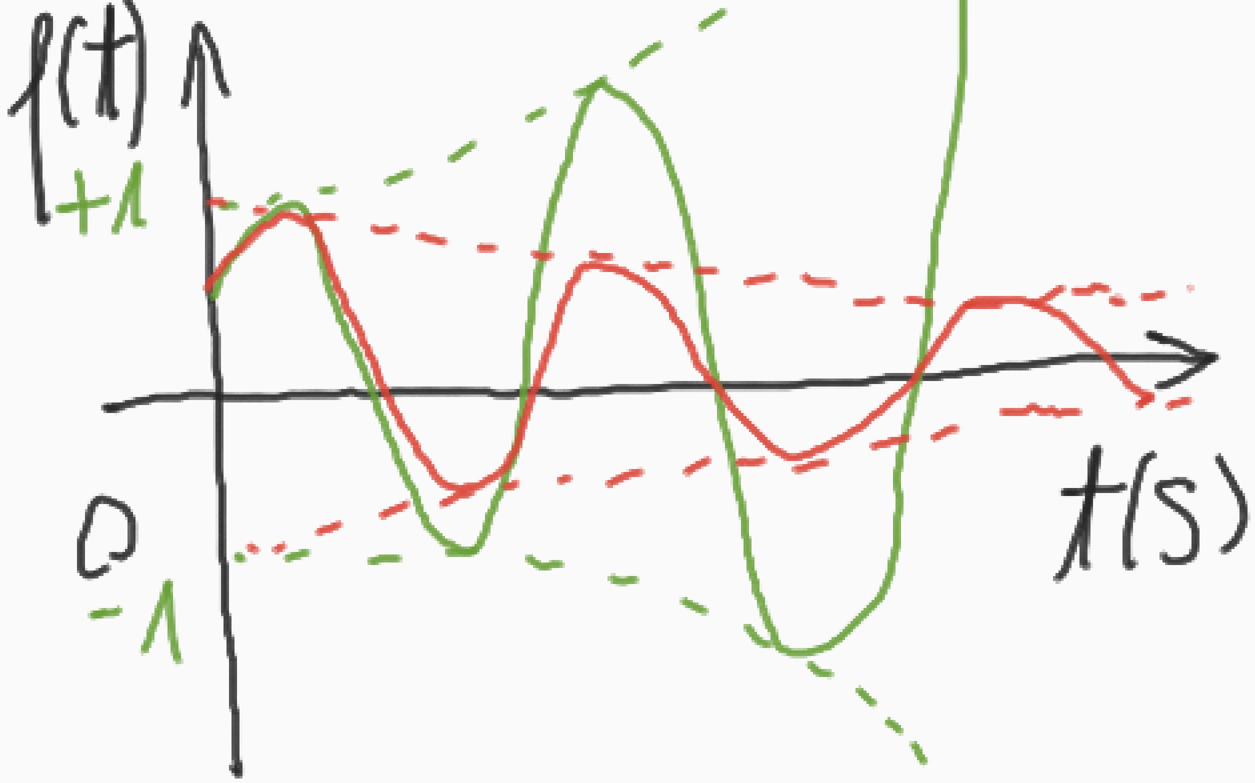
POLOS: $s = \pm j\omega$

6 SENÓIDE COM ENVOLTÓRIA EXPONENCIAL

$$\mathcal{L}\left\{ e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \right\} = \frac{*}{(s-\sigma+j\omega)(s-\sigma-j\omega)}$$

$? \leftarrow \phi$

POLOS: $s = \sigma \pm j\omega$



$\sigma > 0$

$\sigma < 0$

$\operatorname{sen}(\omega t + \phi) \longleftarrow \sigma = 0$

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1 LINEARIDADE

$$\mathcal{L}\{a f_a(t) + b f_b(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f_a(t)\} + b\,\mathcal{L}\{f_b(t)\}$$

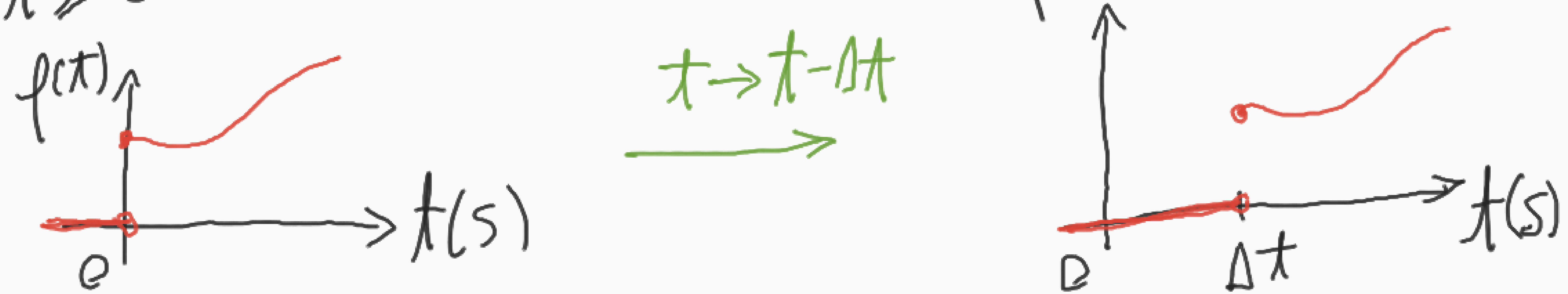
② DESLOCAMENTO NO TEMPO

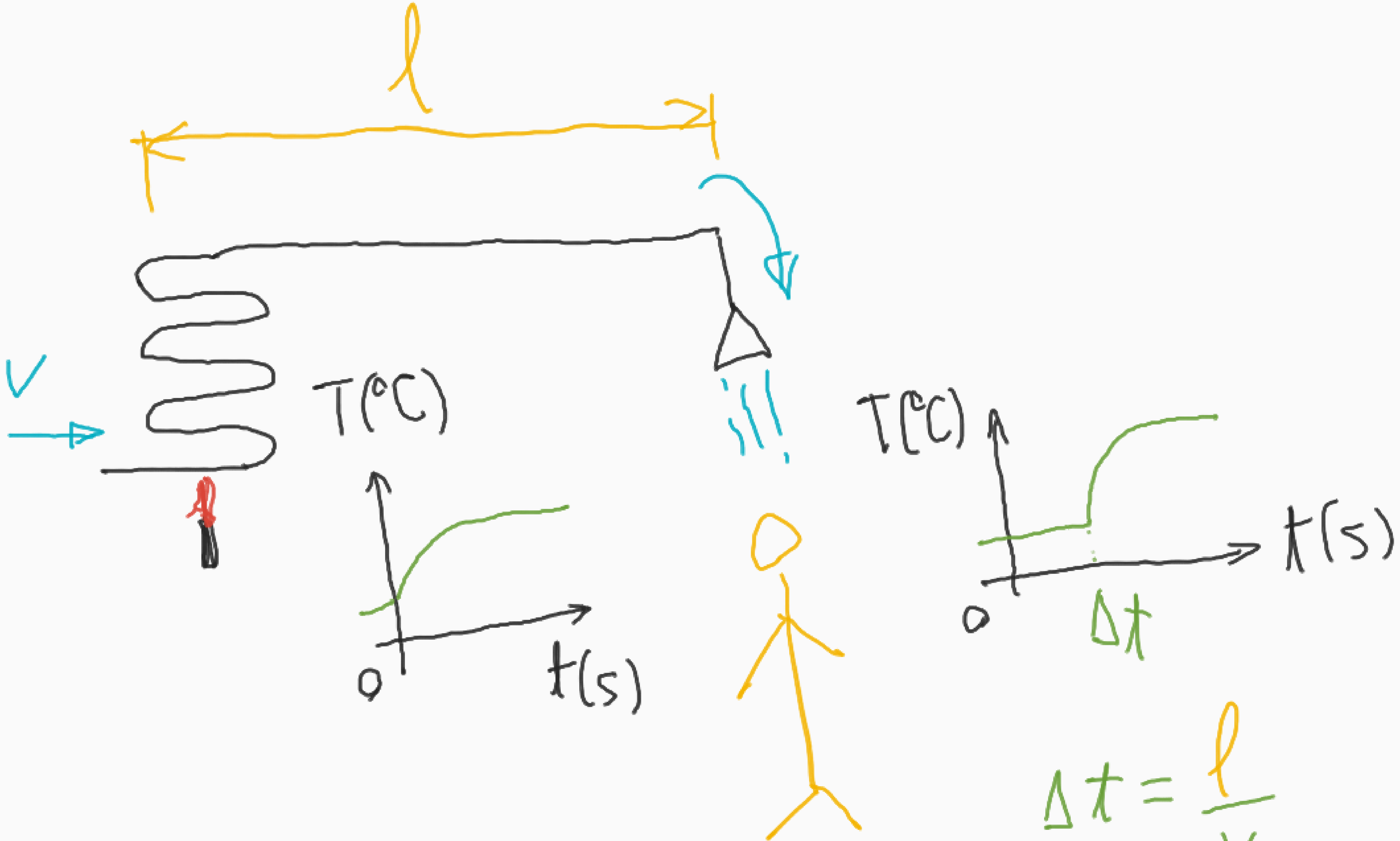
$$\mathcal{L}\{f(t-\Delta t)\,\mathbb{1}(t-\Delta t)\} = \underbrace{e^{-s\Delta t}}_{\uparrow}\,\mathcal{L}\{f(t)\}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO ATRASO

NA QUAL

$\Delta t \geq 0$ é um atraso.





$$\Delta t = \frac{l}{v}$$

③ DERIVAÇÃO NO TEMPO

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d f(t)}{dt}\right\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^-)$$

$f(0)$

CONDIÇÃO INICIAL

FOURIER:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d f(t)}{dt}\right\} = j\omega\,\mathcal{F}\{f(t)\}$$

④ CONVOLUÇÃO

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right\} =$$

$$= \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$$

5 TEOREMA DO VALOR INICIAL

$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\,\mathcal{L}\{f(t)\}$$

6 TEOREMA DO VALOR FINAL

$$f(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,\underbrace{\mathcal{L}\{f(t)\}}_{\text{NÃO PODE CONTER POLOS NO SEMIPLANO COMPLEXO DIREITO}}$$