Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Faculdade de Engenharia
Departamento de Eletrônica e Telecomunicações
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica
Disciplina: Sistemas Lineares
Professor: José Paulo V. S. da Cunha

Controle de um Pêndulo Invertido

Alunos: Elaine de M. Silva &
Richard Antunes

1^o Semestre - 2010, 1 de Setembro de 2010
Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Resumo

Este é o relatório do trabalho final proposto na disciplina Sistemas Lineares, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 1 ^{a} turma de 2010. O objetivo deste trabalho é o de empregar as técnicas de controle apresentadas durante o curso ao controle de um pêndulo invertido.

O sistema foi descrito através de variáveis de estado (posição angular do pêndulo - α , posição linear do carrinho - z, velocidade angular do pêndulo - ω e velocidade linear do carrinho - v). O modelo dinâmico linear do sistema foi avaliado e validado através de simulações por computador do sistema em malha aberta. Após a validação do modelo, dois controladores por realimentação de estado foram projetados para controlar a posição angular do pêndulo e a posição linear do carrinho. No primeiro controlador os dois estados que não podiam ser medidos diretamente (ω e v) foram obtidos por meio de um derivador com atraso ($\frac{s}{0.03s+1}$). Após esta implementação, o projeto foi melhorado inserindo um observador, eliminando assim o ruído gerado pelo derivador. Depois de testados e ajustados, os controladores foram implementados como código executável para o controle da planta real. Os resultados são discutidos na seção de conclusões.

Todas as simulações foram realizadas com o programa *Simulink* da *MathWorks*. A implementação do controlador em código executável foi realizada pelo programa *WinCon* da *Quanser*. Este relatório foi redigido com o LaTeX e as figuras editadas com o *Xfig*, todos produtos de *software* livre.

Conteúdo

1 Introdução

O pêndulo invertido é um sistema mecânico muito útil no estudo de controle de posição de sistemas instáveis como o controle de posição de veículos espaciais na fase de lançamento (Ogata (2003)), o controle da postura ereta natural dos seres bípedes (Naves (2006)) e outros.

O sistema consiste de um pêndulo invertido preso a um carrinho motorizado que pode se movimentar sobre um trilho. O objetivo do controle é manter o pêndulo equilibrado na posição vertical (sentido norte), mesmo quando perturbações são aplicadas ao sistema, por exemplo, uma força aplicada ao carrinho ou o deslocamento do pêndulo de um ângulo não nulo. Ribeiro (2007) cita como analogia ao controle da posição do pêndulo invertido a brincadeira de se equilibrar um lápis com a ponta dos dedos.

A seção 2 descreve detalhes do servomecanismo e apresenta o desenvolvimento do modelo matemático do sistema e sua representação em uma matriz de estado. A seção também aborda as simulações em malha aberta para a validação do modelo, o projeto do controlador, as simulações em malha fechada, os testes com a planta real e os resultados obtidos. A seção 3 trata das observações finais sobre o trabalho. Os apêndices apresentam detalhes sobre a obtenção do modelo como o cálculo da massa total, o cálculo do momento de inércia do pêndulo em torno do eixo de contato com o carrinho e as tabelas de variáveis e parâmetros do sistema, bem como os *scripts* computacionais utilizados nas simulações.

2 Desenvolvimento

O servomecanismo utilizado neste experimento foi o IP01 da *Quanser*. Este *kit* consiste de um carrinho movido por um motor DC de imã permanente, um trilho e uma cremalheira que garantem tração contínua (Quanser (2006)). O carrinho permite o acoplamento de um pêndulo e, tanto a posição do carrinho como o ângulo do pêndulo são medidos através de potenciômetros. A Fig. 1 apresenta uma imagem do servomecanismo.

Figura 1: IP01 - Quanser Inc.

Para realizar as simulações afim de projetar um controlador para este servomecanismo desenvolveu-se seu modelo dinâmico através de equações mecânicas e elétricas. O desenvolvimento é mostrado na próxima seção.

2.1 Modelo matemático

A Fig. 2 mostra um esquema do sistema, as forças que atuam no pêndulo e no carrinho e as coordenadas adotadas.

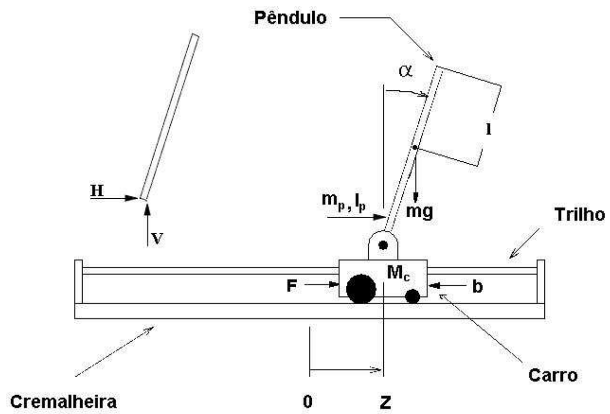

Figura 2: Esquema do servomecanismo.

Considere-se o diagrama de corpo livre do pêndulo apresentado na Fig. 3. Definindo o ângulo do pêndulo (α) a partir do referencial y e as coordenadas do centro de massa do pêndulo como (z_c, y_c) obtemos as equações de movimento do centro de massa:

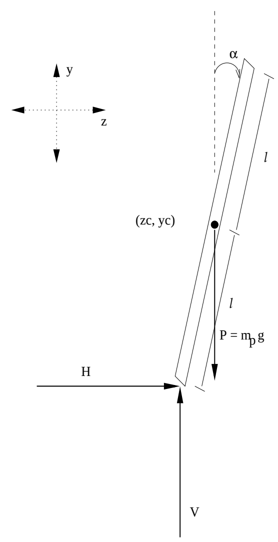

Figura 3: Diagrama de corpo livre do pêndulo.

$$z_c = z + l\,sen\alpha \tag{1}$$

$$y_c = l\,cos\alpha \tag{2}$$

Aplicando a segunda lei de Newton ($\Sigma F = ma$) ao sistema representado pelo diagrama de corpo livre do pêndulo tem-se as Eq. 3, 4 e 5[1].

Soma das forças no referencial horizontal (z):

$$H = m_p \frac{d^2}{dt^2}(z + l\,sen\alpha) = m_p \ddot{z} + m_p l \ddot{\alpha}\,cos\alpha - m_p l(\dot{\alpha})^2\,sen\alpha \tag{3}$$

Soma das forças no referencial vertical (y):

$$V - m_p g = m_p \frac{d^2}{dt^2}(l\,cos\alpha) = m_p l[-\ddot{\alpha}\,sen\alpha - (\dot{\alpha})^2\,cos\alpha] \tag{4}$$

Soma dos momentos em torno do centróide do pêndulo (z_c, y_c):

$$I_p \ddot{\alpha} = V\,l\,sen\alpha - H\,l\,cos\alpha \tag{5}$$

Substituindo as forças H e V das Eq. 3 e 4 na Eq. 5, obtém-se:

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\alpha} \quad = \quad & \left(-\ddot{\alpha}\, m_p\, l\, sen\alpha - (\dot{\alpha})^2\, m_p\, l\, cos\alpha + m_p\, g\right) l\, sen\alpha \\ & - \left(m_p\, \ddot{z} + m_p\, l\, \ddot{\alpha}\, cos\alpha - m_p\, l(\dot{\alpha})^2\, sen\alpha\right) l\, cos\alpha \end{aligned} \tag{6}$$

As equações do movimento do carrinho foram obtidas de forma similar as do pêndulo. A partir do diagrama de corpo livre do carrinho mostrado na Fig. 4 foi deduzida a Eq. 7. É importante notar que o atrito foi desprezado.

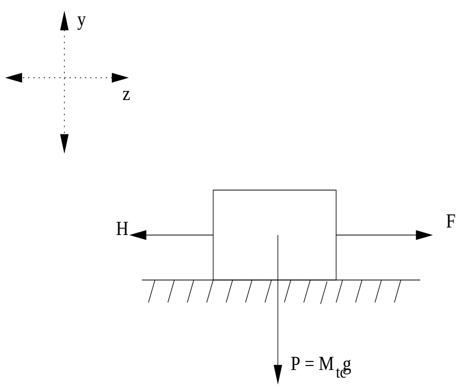

Figura 4: Diagrama de corpo livre do carrinho.

$$F - H = M_{tc} \ddot{z} \tag{7}$$

[1] Neste desenvolvimento adotou-se a grafia z para indicar o eixo horizontal, para não confundir com o vetor de estado x

Substituindo H da Eq. 3 na Eq. 7 obtém-se:

$$F - m_p l\ddot{\alpha}\, cos\alpha + m_p\, l\, (\dot{\alpha})^2\ sen\alpha = \ddot{z}\, (M_{tc} + m_p) \tag{8}$$

Para eliminar $\ddot{z}$ da Eq.6 substituiu-se o mesmo pelo da Eq.8. Após algumas manipulações algébricas obteve-se:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}\left[(M_{tc} + m_p)\, I + M_{tc} m_p l^2 + m_p^2 l^2\, sen^2\alpha\right] \quad = \quad & (M_{tc} + m_p)\, m_p gl\, sen\alpha \\ & -m_p^2 l^2 (\alpha)^2\, sen\alpha\, cos\alpha \\ & -F\, m_p l\, cos\alpha \end{aligned} \tag{9}$$

Como a Eq.8 possui um termo com $\ddot{\alpha}$ isolou-se o mesmo na Eq.9 e substituiu-se na Eq.8, conforme mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \ddot{z}\left[(M_{tc} + m_p)\, I + M_{tc} m_p l^2 + m_p^2 l^2\, sen^2\alpha\right] \quad = \quad & F\ \left(I + m_p l^2\right) \\ & m_p l (\dot{\alpha})^2\ sen\alpha\ \left[I + m_p l^2\right] \\ & -m_p^2 l^2\, g\, sen\alpha\, cos\alpha \end{aligned} \tag{10}$$

As Eq. 9 e 10 são as equações não-lineares que regem o movimento do sistema. A fim de obter um modelo linear deste sistema admitiu-se que o ângulo α desvia-se muito pouco de zero (Ogata (2003)). Desta forma, ao linearizar as equações em torno de $\alpha = 0$ considera-se que α^2, $\dot{\alpha}^2$ e $\alpha\,\dot{\alpha}$ sejam desprezíveis e que $cos\alpha = 1$ e $sen\alpha = \alpha$. As equações linearizadas são descritas abaixo:

$$\ddot{\alpha} = \frac{(M_{tc} + m_p)\, m_p gl\alpha - m_p lF}{[(M_{tc} + m_p)\, I + M_{tc} m_p l^2]} \tag{11}$$

$$\ddot{z} = \frac{\left(-m_p^2 l^2 g\alpha\right) + F\left(I + m_p l^2\right)}{[(M_{tc} + m_p)\, I + M_{tc} m_p l^2]} \tag{12}$$

Para substituir a força F utilizou-se o modelo do motor DC com imã permanente, descrito na Fig.5.

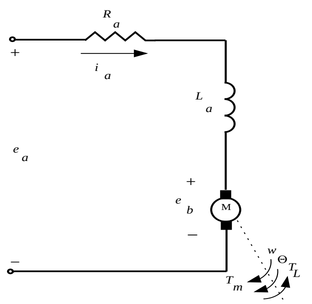

Figura 5: Modelo do motor DC com ímã permanente.

O torque desenvolvido pelo motor é proporcional ao fluxo no entreferro e a corrente de armadura:

$$T_m = k_m\, k_g i_a \tag{13}$$

Pela análise do circuito obtemos a corrente de armadura:

$$i_a = \frac{e_a - e_b}{Ra} \tag{14}$$

Sendo a força contra-eletromotriz proporcional à velocidade do rotor $e_b = k_m \omega_m$ então:

$$T_m = k_m k_g \frac{(e_a - k_m \omega_m)}{R_a} = \frac{k_m k_g}{R_a} e_a - \frac{k_m^2\, k_g}{R_a} \omega_m \tag{15}$$

Considerando que $F = \frac{T}{r}$, temos:

$$F = \frac{1}{r} \left(\frac{k_m k_g}{R_a} e_a - \frac{k_m^2\, k_g}{R_a} \omega_m \right) \tag{16}$$

e sabendo que $\omega_m = \frac{v}{r}$

$$F = \frac{k_m k_g}{R_a\, r} e_a - \frac{k_m^2\, k_g}{R_a\, r^2}\, v \tag{17}$$

Substituindo F da Eq.17 nas Eqs.11 e 12 obteve-se:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = \quad & \frac{(M_{tc}+m_p)m_p g l}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2]} \alpha \quad + \frac{m_p l k_m^2 k_g}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2] R_a r^2} v \\ & - \frac{m_p l k_m k_g}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2] R_a r} e_a \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} = \quad & - \frac{m_p^2 l^2 g}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2]} \alpha \quad - \frac{(I + m_p l^2) k_m^2 k_g}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2] R_a r^2} v \\ & + \frac{(I + m_p l^2) k_m k_g}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2] R_a r} e_a \end{aligned} \tag{19}$$

Sendo $v = \dot{z}$, e $e_a = u$ e tomando $\alpha, z, \omega\ (\dot{\alpha})$ e v como variáveis de estado e α e z como saídas, foi possível escrever uma equação de estado com as seguintes matrizes:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(M_{tc}+m_p)m_p g l}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2]} & 0 & 0 & \frac{m_p l k_m^2 k_g}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2] R_a r^2} \\ -\frac{m_p^2 l^2 g}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2]} & 0 & 0 & -\frac{(I + m_p l^2) k_m^2 k_g}{[(M_{tc}+m_p)I + M_{tc} m_p l^2] R_a r^2} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$
B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{m_p l k_m k_g}{[(M_{tc}+m_p)I+M_{tc}m_p l^2]R_a r} \\ \frac{(I+m_p l^2)k_m k_g}{[(M_{tc}+m_p)I+M_{tc}m_p l^2]R_a r} \end{bmatrix} \tag{22}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}
$$

$$
D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{24}
$$

A partir destas equações foi possível realizar a simulação do sistema em malha aberta.

2.2 Simulação do sistema em malha aberta

Depois de obtidas as equações do sistema foi possível escrevê-las na forma de uma equação de estado. A partir das matrizes A, B, C e D do sistema e da tabela de parâmetros (Tab.1) [2] escreveu-se um *script* a ser executado no programa *Matlab*. O sistema foi simulado em malha aberta com o objetivo de avaliar o modelo dinâmico obtido matematicamente. As situações avaliadas foram: **(i)** a resposta ao degrau unitário, com o sistema em equilíbrio (condições iniciais nulas) e, **(ii)** a resposta às condições iniciais (pêndulo deslocado de aproximadamente $10^{\,o}$). O modelo linear da planta, construído no programa *Simulink*, é mostrado na Fig.6.

Na primeira situação o sistema está em repouso quando é aplicado um degrau unitário; esperava-se que o pêndulo caísse para a esquerda (ângulo diminuísse) e o carrinho se movimentasse para a direita. A segunda situação ilustra o comportamento do sistema quando o pêndulo está inicialmente deslocado de $10^{\,o}$ para a direita e nenhuma força foi aplicada. Esperava-se que o pêndulo continuasse a cair e o carrinho se deslocasse para a esquerda. As duas situações se confirmaram, validando o modelo linear. Os gráficos são mostrados na Fig.7.

Todos os *scripts* utilizados estão disponíveis no Apêndice D

2.3 Projeto do controlador

Sendo um sistema naturalmente instável, com um autovalor no semiplano direito de s e um autovalor em zero, utilizou-se a técnica de realimentação de estado para realocar os autovalores de forma a estabilizar o sistema e a controlar o ângulo do pêndulo e a posição do carrinho.

Os objetivos estabelecidos foram o de manter o sinal de controle dentro de uma faixa aceitável para a tensão do motor, entre -3,5V e +3,5V, e manter o deslocamento do carrinho entre -45cm e +45cm pois a excursão total do carrinho é de 91,4cm (Quanser (2006)). Os critérios de desempenho estabelecidos foram o

[2] disponível no Apêndice C

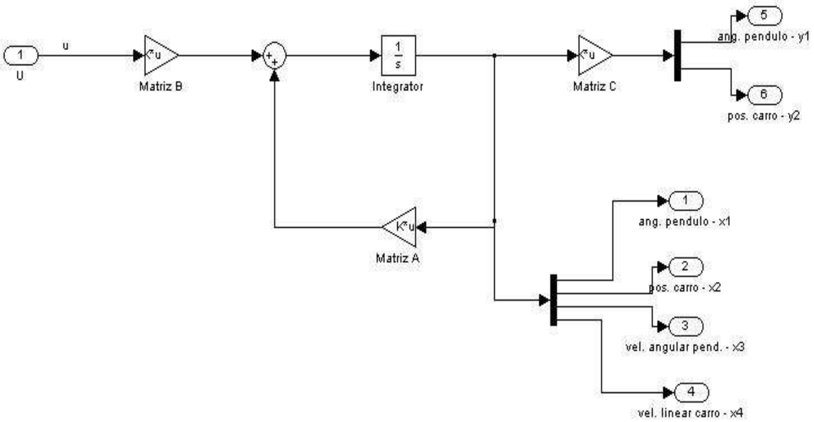

Figura 6: Modelo da planta.

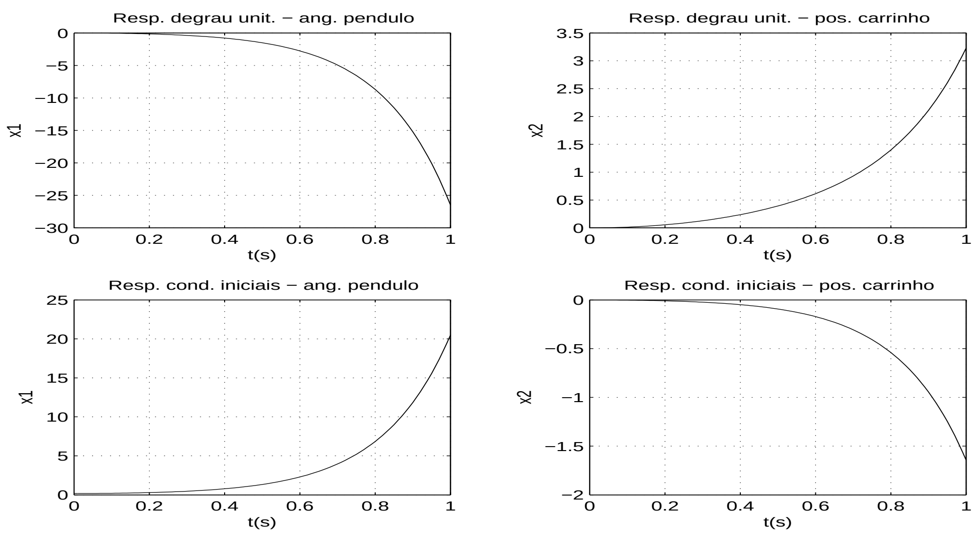

Figura 7: Respostas ao degrau e às condições iniciais.

de manter o tempo de acomodação (t_s) abaixo de 5s para o carrinho e o pêndulo, tempo de subida (t_r) de menos de 1s para o carrinho, sobressinal máximo (M_p) do pêndulo em 0.35 rad e um erro de estado permanente (e_{ss}) dentro da margem de 2%.

A escolha de novos autovalores foi realizada com base em Chen (1999), pp. 238-239, e um pouco de tentativa e erro. Inicialmente, para os dois autovalores dominantes na forma $-\sigma \pm j\omega_d$, com $t_s = \frac{4}{\sigma} = 5$, obteve-se $\sigma = 0,8$. Escolhendo um círculo de raio 1, obteve-se $\omega_d = 0,6$. Os outros dois autovalores foram posicionados a uma distância de $\pm$ 10 e 20 vezes a parte real dos autovalores dominantes. Os primeiros autovalores utilizados foram $-0,8 + j\,0,6$ rad/s, $-0,8 - j\,0,6$ rad/s, -10 rad/s e -20 rad/s. As respostas ao degrau de 0,30 m e à condição inicial estão na Fig.8.

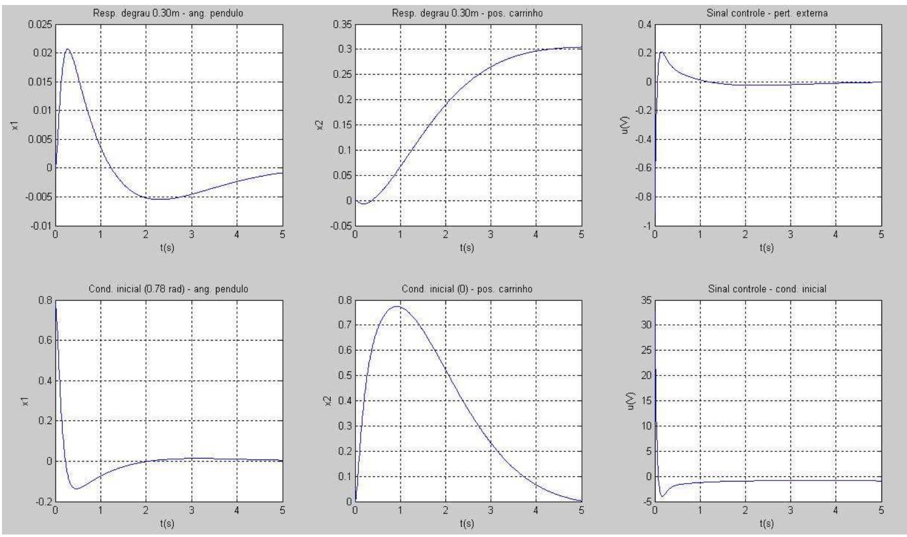

Figura 8: Respostas ao degrau e às condições iniciais, utilizando o primeiro conjunto de autovalores.

Com este primeiro conjunto de autovalores os valores de M_p ficaram dentro do critério estipulado, porém t_s e t_r ficaram lentos. O sinal de controle também ficou muito pequeno, de forma que, na planta real, o sinal não seria suficientemente grande para vencer a inércia no carrinho. Por estes motivos, escolheu-se um outro conjunto de autovalores.

O conjunto final de autovalores utilizados no projeto foram $-2,5 + j\,1,65$ rad/s, $-2,5 - j\,1,65$ rad/s, -10 rad/s e -9 rad/s. A Fig.9 ilustra a resposta ao degrau e às condições iniciais para este conjunto de autovalores.

O *script* "ml_fechada_regulador.m" contém os parâmetros do projeto.

O modelo do *Simulink* utilizado está ilustrado na Fig.10

Como os dois estados que podem ser obtidos diretamente são α e z, foi projetado um observador de ordem completa. O modelo do *Simulink* é mostrado

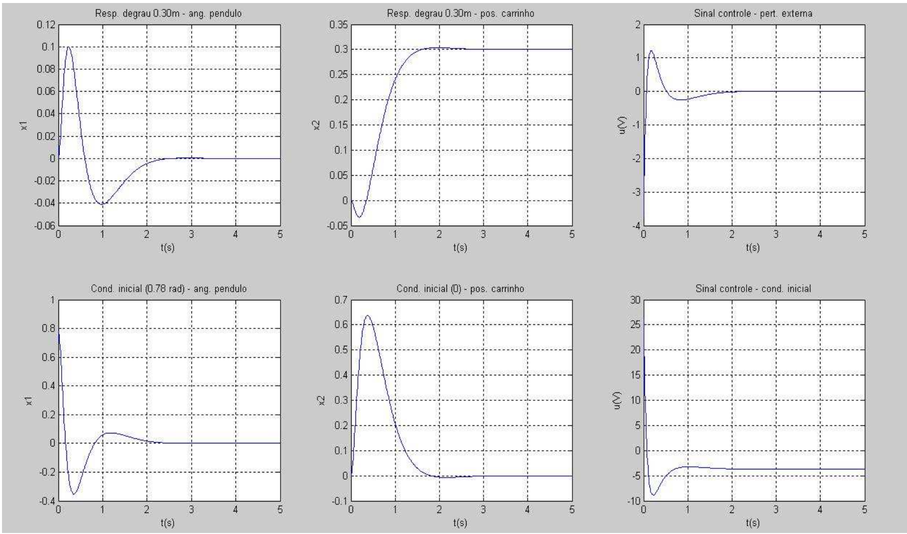

Figura 9: Respostas ao degrau e às condições iniciais, utilizando o segundo conjunto de autovalores.

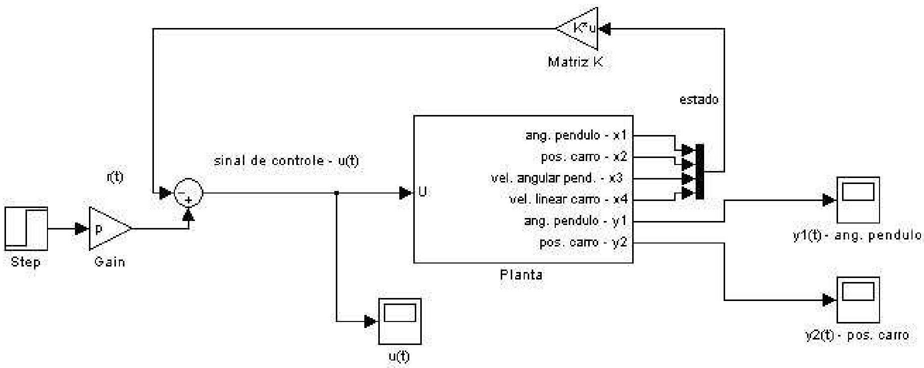

Figura 10: Diagrama do controlador com rastreamento.

na Fig. 11 e o *script* "ml_fechada_observador.m" contém o projeto.

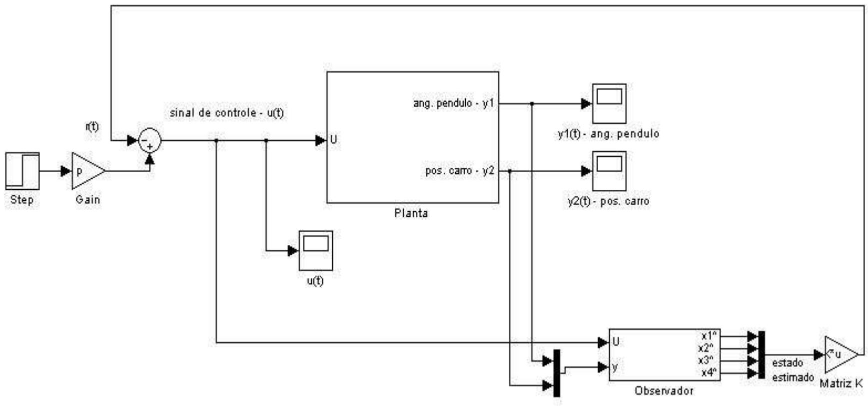

Figura 11: Diagrama do observador.

As respostas ao degrau e às condições iniciais do sistema com observador são mostradas na Fig. 12.

2.4 Simulações com planta real

As simulações com a planta real se deram no Laboratório de Controle e Automação do Laboratório de Engenharia Elétrica - LEE. O diagrama do controlador foi montado, desta vez, para atuar sobre o sistema real. O modelo da planta no *Simulink* foi substituído pelas entradas do sistema, ângulo do pêndulo e posição do carrinho, medidas pela placa de aquisição de dados (conversor AD) e a saída, sinal de controle, enviado à planta pelo conversor DA da placa de aquisição de dados.

Este modelo foi compilado no *software Wincon*, que gera um programa que pode ser executado para controlar a planta em tempo real. Considerando que a constante de tempo dominante do sistema é de 0,33s ($\frac{1}{|2{,}5+j1{,}65|}$), o tempo de amostragem de 1ms usado pelo *WinCon* para gerar o código executável é suficiente para permitir tratar o controle em tempo contínuo.

Inicialmente, com os autovalores estipulados no projeto, o sistema se apresentou altamente instável, com o conjunto pêndulo-carrinho oscilando em uma frequência constante. Os autovalores foram modificados, ajustando assim a matriz K. O melhor valor para o conjunto de autovalores foi $-5 + j\,1.65$ rad/s, $-5 - j\,1.65$ rad/s, -8 rad/s e -7 rad/s.

Os gráficos com os valores dos quatro estados e do sinal de controle é mostrado nas Figs.14, 15 e 16 abaixo.

Note-se que os gráficos da velocidade angular do pêndulo e da velocidade linear do carrinho, mostrados na Fig. 15 foram obtidos através do derivador

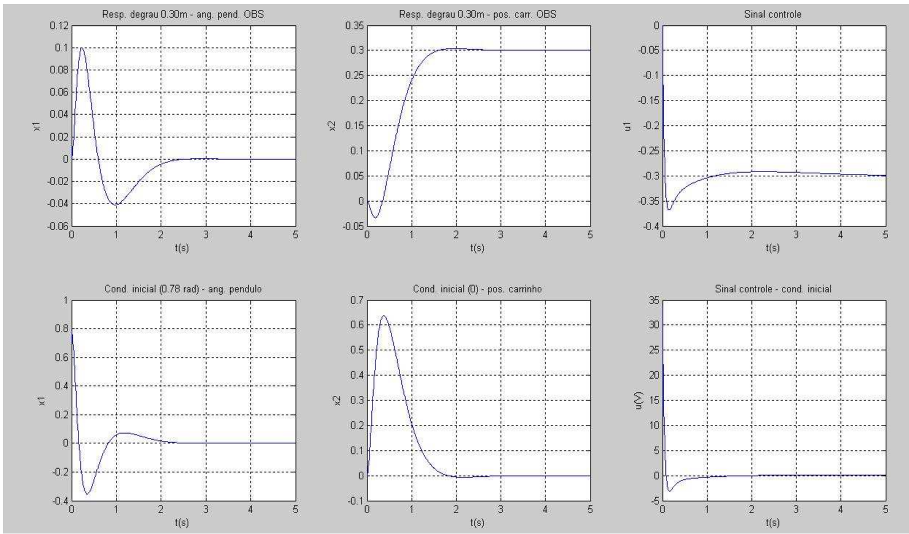

Figura 12: Respostas ao degrau e às condições iniciais, sistema com observador.

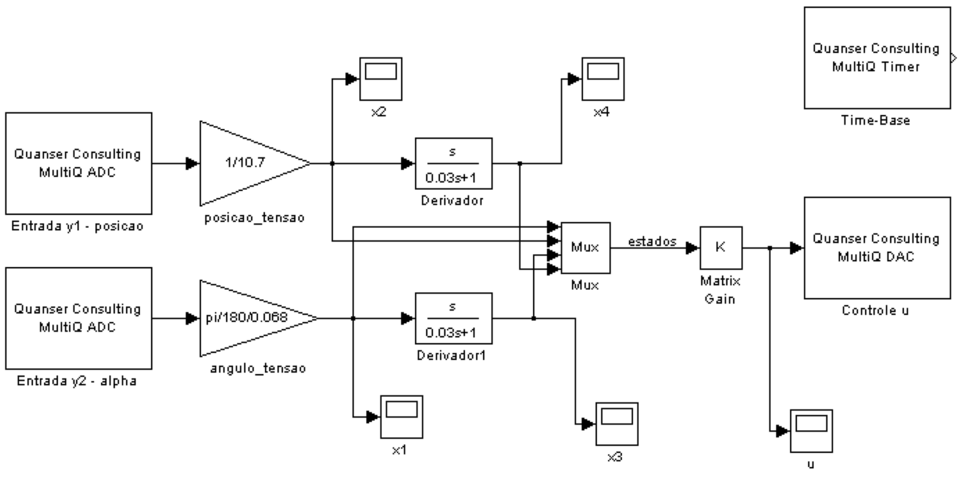

Figura 13: Diagrama no Simulink do Controlador da Planta Real

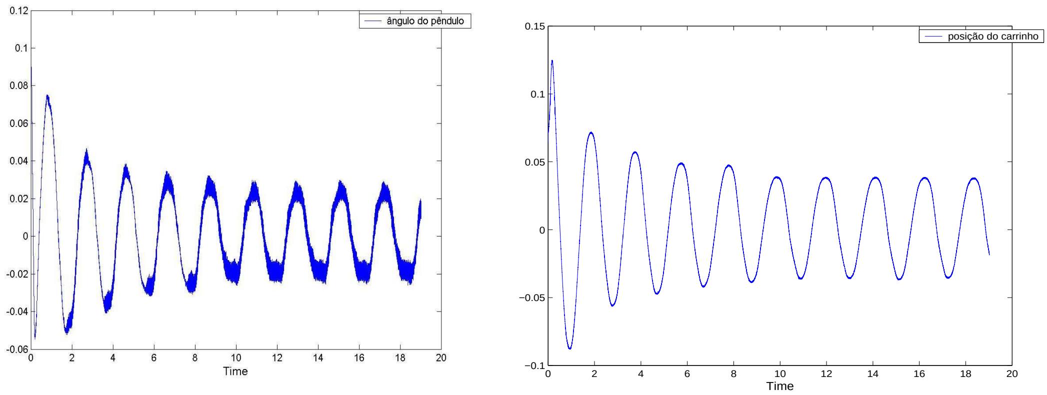

Figura 14: Gráficos do ângulo do pêndulo e posição do carrinho.

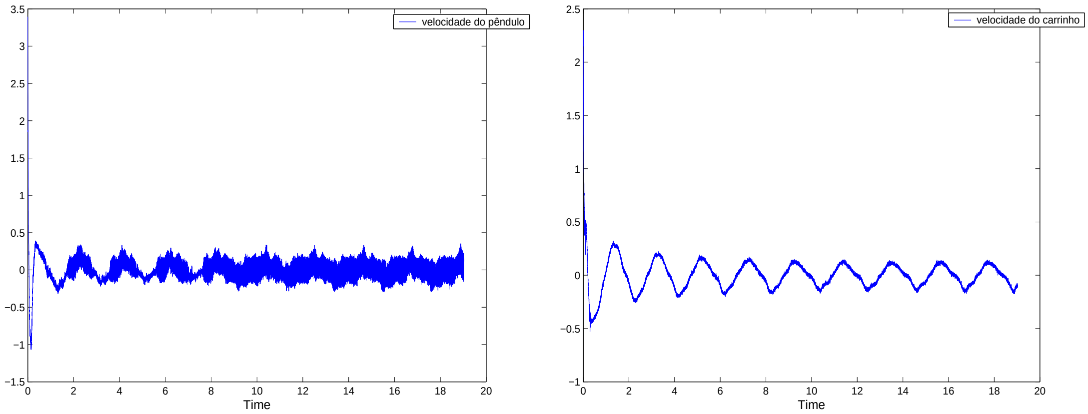

Figura 15: Gráficos da velocidade do pêndulo e do carrinho.

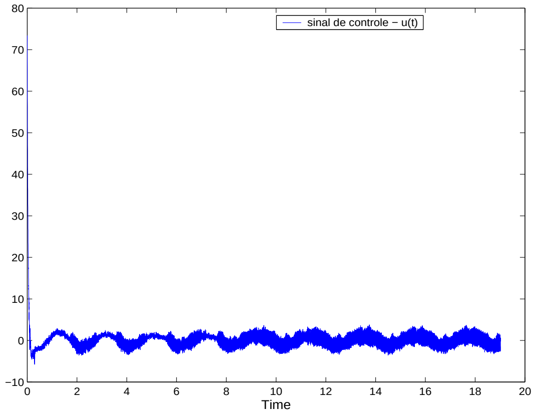

Figura 16: Sinal de controle

com atraso, mostrado na Fig.13. Observa-se o ruído causado pela inserção dos derivadores nos gráficos das velocidades.

Para melhorar o sistema, um observador foi inserido. O diagrama da Fig.13 foi modificado conforme ilustrado na Fig.17. Porém os testes realizados com o observador se mostraram insatisfatórios. O sistema se mostrou novamente instável e não foi possível obter um conjunto de autovalores que o estabilizasse. Algumas explicações para o não funcionamento do controlador com observador foram sugeridas, porém a mais plausível talvez seja algum erro na modelagem matemática do sistema.

3 Conclusões

Apresentou-se neste relatório a modelagem matemática de um sistema físico, o pêndulo invertido. Sendo um sistema altamente instável projetou-se um controlador por realimentação de estado. Este controlador foi implementado como código executável para controlar o sistema real, com o auxílio do *Matlab*, *Simulink* e *WinCon*

A técnica de alocação de pólos utilizada exige a escolha dos autovalores e algumas dificuldades surgiram, como o *trade-off* entre velocidade de resposta e amplitude do sinal de controle. Além disto, os resultados obtidos com o controlador com derivador com atraso foram bons, porém apresentaram um caráter oscilatório, e, embora tenha sido possível equilibrar o pêndulo, não foi possível eliminar a oscilação.

Os testes com o observador também se mostraram insatisfatórios visto que não foi possível equilibrar o pêndulo, o sistema mostrou-se altamente instável.

Como não se encontrassem erros no projeto dos controladores, o modelo não-linear da planta, baseado nas Eq.9 e 10 foi construído no *Simulink*. O modelo não linear, mostrado na Fig.18 foi submetido ao controlador com observador e

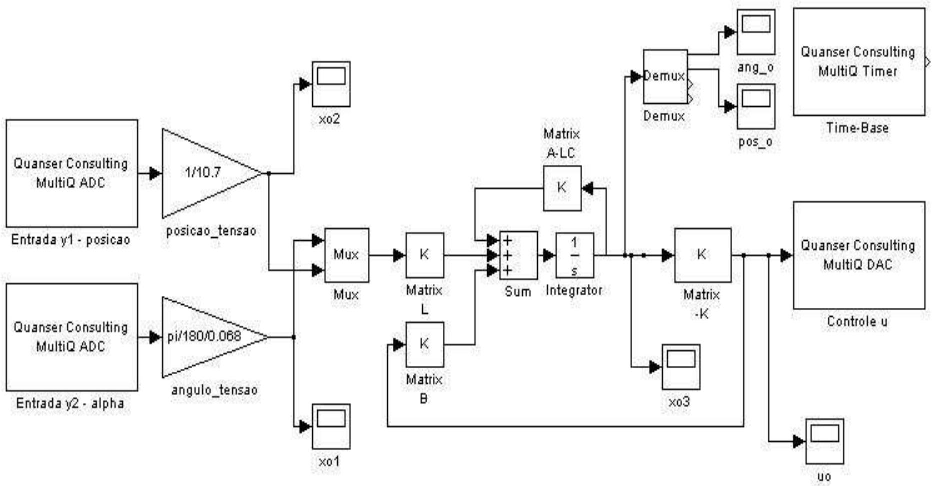

Figura 17: Diagrama no Simulink do Controlador com Observador da Planta Real

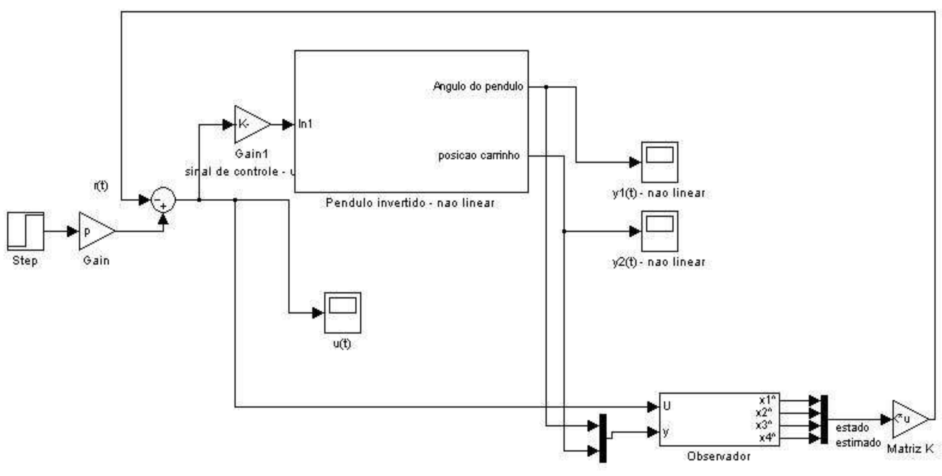

Figura 18: Diagrama no Simulink do Controlador com Observador para Modelo não-linear

os resultados obtidos se mostraram satisfatórios muito similares aos resultados obtidos com o modelo linear (Fig.12), como pode ser visto nas Fig.19, ?? e 20

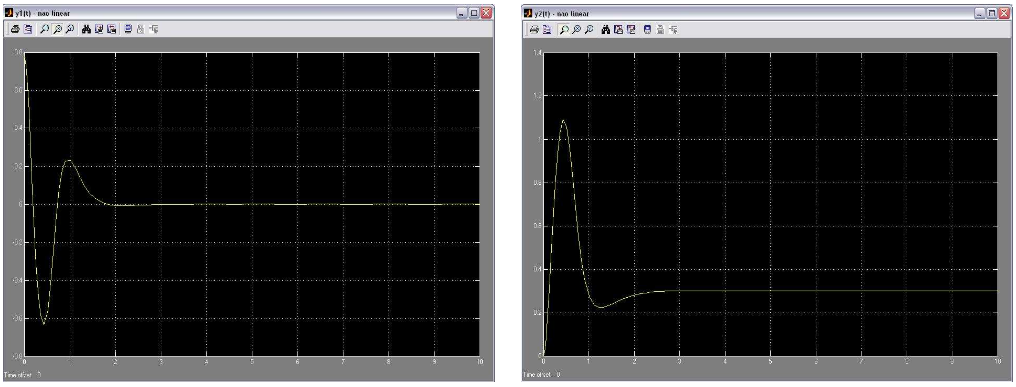

Figura 19: Respostas do modelo não-linear - ângulo do pêndulo e posição do carrinho

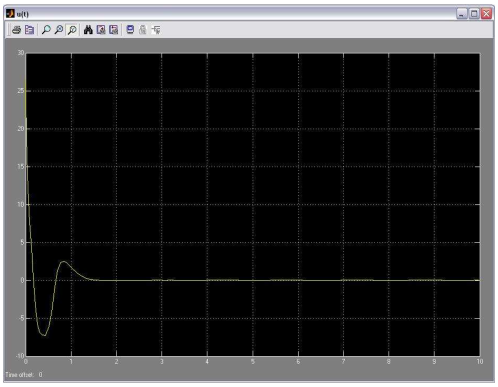

Figura 20: Resposta do modelo não-linear - sinal de controle

Tendo em vista estes resultados concluiu-se que a modelagem matemática devia ser revista.

A Cálculo da massa total do carrinho

O cálculo da massa total do carrinho leva em consideração a massa do motor, m_m. Mas o manual da Quanser não traz informações sobre m_m, então esta massa foi calculada através do momento de inércia da armadura do motor, deslocado para o eixo onde foram acopladas as rodas do carrinho. Sendo J o momento de inércia no eixo, r o raio da roda, m_m a massa do motor e m_c a massa do carrinho, podemos escrever a equação do momento de inércia do ponto material em relação ao eixo:

$$J = m_m r^2 \tag{25}$$

Como não existiam informações sobre J, utilizou-se J_m, a inércia de armadura, que foi deslocada até o eixo:

$$J = J_m k_g^2 \tag{26}$$

Substituindo J da Eq.26 na Eq.25, obtemos:

$$m_m = \frac{J_m k_g^2}{r^2} \tag{27}$$

A massa total é então dada pela soma entre a massa do motor e a massa do carrinho:

$$M_{tc} = \frac{J_m k_g^2}{r^2} + m_c \tag{28}$$

B Cálculo do momento de inércia do pêndulo em torno do eixo de contato com o carrinho

A modelagem do pêndulo foi realizada utilizando o centro de massa. Porém para as equações de movimento do pêndulo tornou-se necessário o cálculo do momento de inércia do pêndulo com relação ao ponto de contato com o carrinho, em uma das extremidados do pêndulo.

Sabendo que o momento de inércia de uma barra em torno de seu centro de gravidade é (Russell, Beer and Clausen (2008)):

$$I_c = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{Mx^2 dx}{l} = \frac{1}{12} ml^2 \tag{29}$$

para deslocar este momento para uma das extremidades, utiliza-se o teorema de Steiner, também conhecido como teorema dos eixos paralelos. Este teorema permite que se calcule o momento de inércia da barra relativo a um eixo perpendicular à mesma que passa por uma das extremidades (Russell et al. (2008)):

$$I = I_c + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{3} ml^2 \tag{30}$$

C Tabelas de variáveis e parâmetros do sistema

D Arquivos .m

Tabela 1: Parâmetros do sistema.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
k_m	Constante de força contraeletromotriz	0,00767	V/(rad/seg)
R_a	Resistência de armadura	2,6	Ω
k_g	Relação de engrenagens	3,7:1	—
J_m	Inércia de armadura	3,87e^{-7}	Kgm^2
r	Raio da engrenagem do motor	0,635	cm
m_c	Massa do carrinho	0,45	Kg
g	Aceleração da gravidade	9,8	m/s^2
m_p	Massa do pêndulo	0,21	Kg
r	Raio da engrenagem do motor	0,635	cm

Tabela 2: Variáveis do sistema.

Variável	Descrição
F	força aplicada ao carrinho
z	posição do carrinho
α	ângulo de defasagem do pêndulo
V	força vertical exercida pelo carrinho
H	força horizontal exercida pelo carrinho
b	atrito (desprezado)

Referências

Chen, C.-T. (1999). *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press.

Naves, E. L. M. (2006). Modelagem e simulação do controle da postura ereta humana quasi-estática com reflexos neuromusculares, *Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia*.

Ogata, K. (2003). *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edn, Pearson Education do Brasil.

Quanser, I. (2006). *IP01 and IP02 Linear Motion Servo Plants - Product Information Sheet L1 - 1- rev.B*, Quanser Inc.

Ribeiro, R. (2007). Implementação de um sistema de controle de um pêndulo invertido, *Tese de Mestrado - Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Itajubá*.

Russell, E. J., Beer, F. P. and Clausen, W. W. (2008). *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Dinâmica*, 7^a edn, Mcgraw Hill.